

# شبیه‌سازی عددی و مدل‌سازی رتبه‌کاسته‌ی انتقال جرم بر اثر جریان جابه‌جایی طبیعی با بهره‌گیری از جفت‌شدگی مودهای درجه حرارت و نرخ غلظت

محمدکاظم مؤیدی (استادیار)

بخش مکانیک سیالات و آلوده‌نابین، دانشگاه قم

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۶)  
دوری ۲ - ۳، شماره ۲، ص. ۵۲-۶۳

در این پژوهش یک مدل عددی و یک الگوی رتبه‌کاسته برای شبیه‌سازی میدان جریان سیال بر اثر اختلاف دما همراه با مدل انتقال آلاینده‌ها با استفاده از روش تجزیه‌ی متعامد بهینه بسط داده شده است. بدین منظور معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر همراه با اثرات نیروهای شناوری، معادله‌ی انرژی، و معادله‌ی انتقال غلظت به‌صورت هم‌زمان با استفاده از روش عددی حل شده‌اند. برای محاسبه‌ی نمایه‌های لازم برای بازسازی سیستم دینامیکی از نتایج حل عددی استفاده شده است. به‌منظور توسعه‌ی الگوی رتبه‌کاسته، بر اساس مفهوم سیستم دینامیکی و بر مبنای تصویرسازی، معادلات حاکم به فضای مودهای تجزیه‌ی متعامد بهینه بهره‌برده شده است. برای مدل‌سازی دینامیک میدان جریان، معادلات سیستم دینامیکی برای ضرایب مودال میدان سرعت و نرخ غلظت حل می‌شوند. برای مدل‌سازی معادله‌ی انتقال حرارت، مودهای میدان دما بر حسب ضرایب مودال نرخ غلظت محاسبه شده‌اند. این موضوع، که دستاورد خاص این پژوهش است، سبب می‌شود تا تعداد معادلات موردنیاز برای شبیه‌سازی دینامیک میدان کاهش یابد. نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته با داده‌های حاصل از حل عددی مقایسه شده است که دقت و توانایی مدل توسعه‌یافته را نمایش می‌دهد.

واژگان کلیدی: مدل رتبه‌کاسته، شبیه‌سازی عددی، جابه‌جایی آزاد، انتقال آلاینده‌ها، انتقال جرم، سیستم‌های دینامیکی.

mk.moayyedi@qom.ac.ir

## ۱. مقدمه

احتراقی و... دارد. بسیاری از پژوهش‌ها در زمینه‌ی جریان جابه‌جایی پیرامون توسعه‌ی روش‌های عددی صورت گرفته است. از جمله می‌توان به پژوهش شی و همکارانش اشاره کرد. آنها به مطالعه‌ی پدیده‌ی انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک حفره‌ی مربع شکل با اثر ارتعاش یک پره‌ی نازک پرداختند. نتایج حاصل نشان‌دهنده‌ی ایجاد یک جریان گذار و نوسانی بر اثر افزایش و کاهش دوره‌ی طول پره است.<sup>[۱]</sup> هاسنویی و همکارانش رفتار یک سیستم تحت تأثیر انتقال حرارت جابه‌جایی ناشی از صفحه‌ی داغ‌شده درون یک حفره‌ی مربع شکل را مطالعه کرده‌اند. رفتار نوسانی مسئله در اعداد رایلی بالا در نتایج حاصل این پژوهش نیز نشان داده شده است.<sup>[۲]</sup> در پژوهش استوینز و همکارانش اثر سه صفحه‌ی داغ‌شده در یک ناحیه‌ی بسته در انتقال حرارت جابه‌جایی مطالعه شده است. رفتار نوسانی مسئله در اعداد رایلی بالا از نتایج این پژوهش نیز هست. آنها معادلات حاکم را در فضای سه‌بعدی با روش عددی حل کردند. در این پژوهش نیز به مطالعه‌ی رفتار نوسانی جریان جابه‌جایی بر اثر گردابان دما پرداخته شده است.<sup>[۳]</sup> تیمورتاش جابه‌جایی طبیعی روی یک صفحه‌ی عمودی

فرایند انتقال حرارت صورتی از انتقال انرژی است که به شکل‌های هدایت، جابه‌جایی، و تشعشع رخ می‌دهد. انتقال حرارت جابه‌جایی بین یک سطح جامد و سیال متحرک مجاور آن رخ می‌دهد. این‌گونه از انتقال گرما شامل جابه‌جا شدن حرارت از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر بر اثر حرکت سیال است؛ یعنی، انتقال حرارت بر اثر انتقال جرم صورت گرفته است. روشن است نرخ انتقال حرارت به سرعت حرکت سیال وابستگی شدید پیدا می‌کند. انتقال حرارت جابه‌جایی به دو صورت اجباری و آزاد انجام می‌گیرد. اگر حرکت سیال بر اثر یک عامل خارجی باشد در آن صورت انتقال حرارت صورت‌گرفته از نوع اجباری است و در صورتی که حرکت سیال توسط نیروی شناوری ناشی از اختلاف چگالی (متأثر از گردابان دما) باشد، انتقال حرارت از نوع جابه‌جایی آزاد رخ داده است. انتقال حرارت جابه‌جایی کاربردهای وسیعی در سیستم‌های سرمایش و گرمایش، سیستم‌های تهویه‌ی صنعتی، صنایع معدنی، صنایع شیمیایی، موتورهای

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۹/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۵/۶/۲۴، پذیرش ۱۳۹۵/۷/۳.

غیرهم‌دما را با وجود یک سیال فوق بحرانی مطالعه کرد. در یک سیال فوق بحرانی مقدار لزجت بر حسب دما و فشار متغیر است. نتایج حاصل این پژوهش برای سیال در فاز گاز به ازای فرض گاز کامل و گازی که از رابطه‌ی واندروالس تبعیت می‌کند، مطالعه شده است و دقت قابل قبولی را نشان می‌دهند.<sup>[4]</sup> کیمورا و همکارانش در پژوهشی به مطالعه‌ی جریان جابه‌جایی آزاد از روی یک صفحه‌ی نازک، زاویه‌دار، و داغ در یک محدودی‌ی محصور با دیوار با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی پرداختند. نتایج کار آنها نشان می‌دهد که جریان بالارونده و پایین‌رونده ناشی از جابه‌جایی آزاد در زوایای کمتر از ۱۵ درجه رخ می‌دهد.<sup>[5]</sup> ساریس و همکارانش به مطالعه‌ی جریان جابه‌جایی آزاد با استفاده از روش عددی درون یک مخزن، که از سطح پایین داغ شده است، پرداختند. آنها اثر موقعیت صفحه‌ی داغ و اثر تغییرات عدد رایلی را مطالعه کردند و نشان دادند که تغییرات عدد رایلی در جریان جابه‌جایی بسیار تأثیرگذار است.<sup>[6]</sup>

حل معادلات حاکم بر دینامیک سیالات یکی از مهم‌ترین مسائل موجود در علوم مهندسی است. معادلات حاکم بر جریان سیال مجموعه‌ی از معادلات دیفرانسیل پاره‌یی غیرخطی و وابسته، موسوم به معادلات ناویر استوکس است که به شکل معادلات انتقال<sup>۱</sup> نیز می‌توان آنها را بیان کرد. این معادلات در یک دامنه‌ی حل با هندسه‌ی مشخص و شرایط مرزی و اولیه معلوم حل می‌شوند. به‌طورکلی معادلات انتقال جریان شامل معادلات بقای جرم و تکانه هستند. رژیم جریان آشفتنه در اغلب مسائل صنعتی لزوم استفاده از مدل‌های آشفتگی را ایجاد کرده است که منجر به استفاده از شکل متوسط‌گیری شده‌ی زمانی معادلات ناویر - استوکس<sup>۲</sup> و اضافه شدن معادلات انتقال جدید (برای کمیت‌های آشفتگی) به سیستم معادلات می‌شود. برای محاسبه‌ی توزیع دما، معادله‌ی انتقال انرژی نیز باید به این دسته معادلات اضافه شود. به‌همین ترتیب اضافه شدن هر نوع مدل دیگر برای شبیه‌سازی پدیده‌های مختلف فیزیکی مانند جریان چندفازی<sup>۳</sup>، احتراق، آکوستیک و... معمولاً با اضافه شدن معادلات بیشتری همراه خواهد بود. روشن است شبیه‌سازی جریان‌های ناپایا که ویژگی‌های مختلفی از میدان، تحت تأثیر زمان و تحولات سایر پارامترها، تغییر کرده بسیار زمان‌بر و پرهزینه است.<sup>[۷]</sup> امروزه یکی از مهمترین نیازهای صنعت کاهش زمان محاسبات است که سبب کاهش هزینه‌ها و کوتاه‌تر شدن زمان طراحی می‌شود. بنابراین، دستیابی به روش‌هایی برای کاهش حجم محاسبات، کاهش حجم مورد نیاز برای ذخیره‌سازی داده‌ها، و افزایش زمان بهره‌وری مفید از طرح، از جمله عمده‌ترین بررسی‌های صورت‌گرفته در ده‌های اخیر است. روش تجزیه‌ی متعامد بهینه یکی از روش‌های قدرتمند در زمینه‌ی کاهش زمان محاسبات است. در این روش با استفاده از راهکار بازسازی میدان، مدلی رتبه‌کاسته تولید شده، تا با بازسازی دینامیک حاکم بر مسئله با تعداد درجات آزادی کمتر، بتوان روشی سریع و با دقت مناسب را برای شبیه‌سازی میدان ارائه کرد.

اولین کاربردهای روش تجزیه‌ی متعامد بهینه توسط کارهون و لوو<sup>۴</sup> به عنوان الگویی برای تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو<sup>۵</sup> بودند مطرح شد.<sup>[۸]</sup> سیروویس با مطرح کردن روش نمایه کاربرد این روش را به عنوان ابزاری به منظور ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته برای سامانه‌های دینامیکی پیچیده که داده‌هایی از تجربه یا حل‌های عددی مستقیم دارند، نمایان کرد.<sup>[۹]</sup> استفاده از روش تجزیه‌ی متعامد بهینه - نمایه<sup>۶</sup> در تحلیل و بازسازی میدان‌های جریان‌های پایا و ناپایا تاکنون نتایج موفقیت‌آمیز بسیاری داشته است.<sup>[۱۰]</sup> استفاده از این روش به منظور مدل‌سازی جریان‌های ناپایا با رویکرد سامانه‌ی اخیراً مورد توجه بسیاری قرار گرفته اما مشکلاتی نیز در توسعه‌ی این مدل‌ها وجود داشته است. استفاده از مدل رتبه‌کاسته‌ی توسعه‌یافته در روش تجزیه‌ی متعامد بهینه برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر را می‌توان

در پژوهش فاویر<sup>۷</sup> و همکارانش مشاهده کرد. آنها با استفاده از حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی و ترکیب آن با معادلات حاکم به جواب‌های مناسبی دست یافتند. همچنین با استفاده از حل هم‌زمان مسئله‌ی بهینه‌سازی و یک مسئله‌ی کمکی<sup>۸</sup> پاسخ زمانی سامانه‌های دینامیکی حاکم را بر مسائلی که فیزیک پیچیده‌تری دارند نیز دقیق‌تر به دست آوردند.<sup>[۱۱]</sup> کاپلت از چند روش مختلف که همگی بر اساس حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی بودند به منظور بهبود پاسخ سامانه‌ی دینامیکی حاکم برای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی مورد نظر استفاده کرد.<sup>[۱۲]</sup> نوآک از یک جمله‌ی اصلاحی به منظور افزایش دقت سامانه‌ی دینامیکی و به‌عنوان جایگزینی برای جمله‌ی فشار حذف شده در معادله‌ی سامانه‌ی دینامیکی استفاده کرد.<sup>[۱۳]</sup> گالنتی نیز از روش‌های بهینه‌سازی برای بهبود دقت مدل‌های رتبه‌کاسته به منظور استفاده در مسائل کنترل جریان بهره برد.<sup>[۱۴]</sup> مؤیدی و همکارانش به توسعه‌ی یک الگوی اصلاح مدل رتبه‌کاسته پرداخته‌اند. نتایج حاصل از مدل اصلاح‌شده‌ی آنها دقت قابل قبولی را در مقایسه با نتایج حل عددی مستقیم نشان می‌دهد.<sup>[۱۵]</sup>

در این پژوهش هدف توسعه‌ی یک الگوی رتبه‌کاسته بر اساس مفهوم سیستم دینامیکی و حاصل از تصویرسازی معادلات انتقال به فضای موده‌های تجزیه‌ی متعامد بهینه<sup>۹</sup> است. در ابتدا معادلات حاکم بر مسئله و مدل عددی تشریح شده است؛ سپس با معرفی شرایط مرزی نمایه‌های لازم برای توسعه‌ی مدل رتبه‌کاسته به دست آمده‌اند. در بخش بعد چگونگی توسعه‌ی سیستم دینامیکی تشریح شده و روش شناسایی موده‌های پرانرژی بیان شده است. در انتها و به منظور اثبات صحت و دقت مدل رتبه‌کاسته، نتایج حاصل از آن ارائه شده و مقایسه‌ی بین آنها و داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم انجام گرفته است.

## ۲. روش تجزیه‌ی متعامد بهینه

اساس توسعه‌ی روش تجزیه‌ی متعامد بهینه به تلاش‌های لاملی برای شناسایی ساختارهای همگون و پرانرژی در جریان‌های آشفتنه متکی است.<sup>[۲]</sup> او نشان داد که این ساختارها، توابعی از متغیرهای مکانی هستند که بیشینه‌ی انرژی میدان را دارند و عبارت زیر را بیشینه می‌کنند:

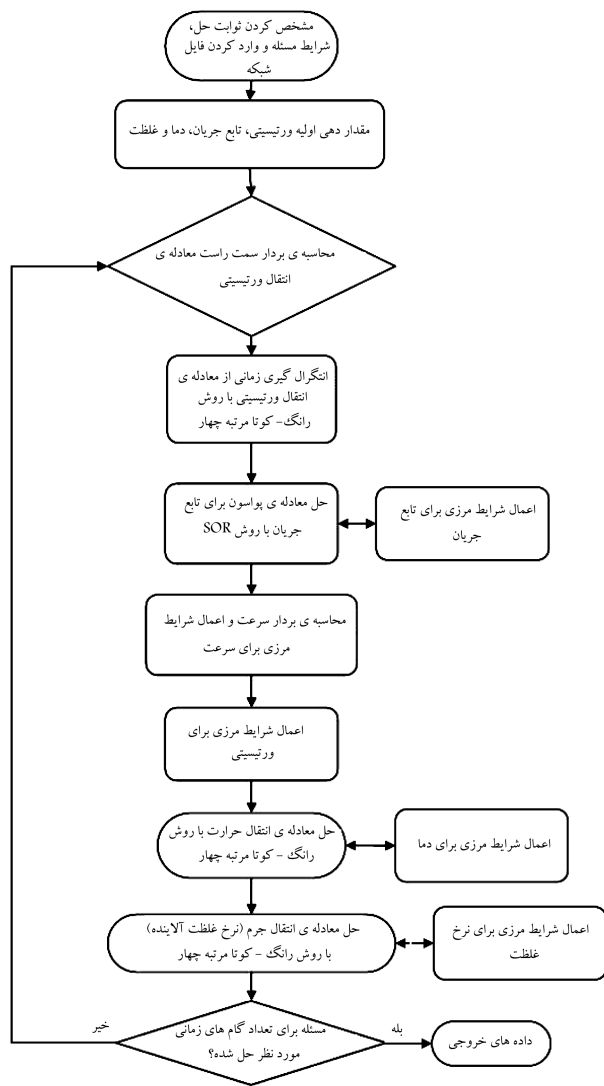
$$\max \frac{\langle (\Phi, \mathbf{u})^2 \rangle}{\langle \Phi, \Phi \rangle} \quad (1)$$

که در آن عبارت  $(*, *)$  نشان‌دهنده‌ی ضرب داخلی و  $\langle \cdot \rangle$  نشان‌دهنده‌ی متوسط‌گیری دسته‌ی<sup>۱۰</sup> است که می‌تواند با متوسط‌گیری زمانی جایگزین شود. ویژگی فرایند محاسبه‌ی ساختارهای پرانرژی حاصل از رابطه‌ی ۱ این است که اگر تابع  $\varphi(x)$  رابطه‌ی ۱ را بیشینه کند، می‌توان نتیجه گرفت با تصویرسازی میدان جریان در راستای  $\varphi(x)$  میزان انرژی جنبشی متوسط بیشتری در مقایسه با تصویرسازی در راستای هر تابع پایه‌ی دیگری به دست خواهد آمد. این ویژگی کمک می‌کند که بتوان بر اساس آن، درجات آزادی سیستم دینامیکی حاصل از معادلات حاکم بر مسئله‌ی مورد نظر را کاهش داد.

## ۳. معادلات حاکم بر جریان سیال، انتقال حرارت و نرخ

### غلظت

معادلات حاکم بر جریان سیال شامل معادلات پیوستگی و تکانه‌ی خطی با اثرات نیروهای ناشی از اختلاف دما (با فرض بوزینسک) و معادله‌ی انرژی، معادله‌ی نرخ



شکل ۱. فلوجارت کد حل عددی توسعه یافته برای شبیه سازی جریان جابه جایی طبیعی و انتقال جرم.

ضریب  $\alpha$  از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$\alpha = \frac{1}{N_{\text{Stage}} - k + 1}$$

$N_{\text{Stage}}$  عبارت است از مرتبه ی انتگرال گیری زمانی که می تواند مساوی با ۳، ۴ و... باشد و به این معنی است که روش رانگ - کوتا مرتبه سه، چهار یا... استفاده شده است. کد توسعه یافته به زبان فرترن تهیه شده و فلوجارت حل عددی در شکل ۱ آورده شده است.

#### ۴. مدل رتبه کاسته توسعه یافته با روش تجزیه ی متعامد

##### پهینه

به منظور توسعه ی مدل رتبه کاسته، کمیت های حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل جمع یک بخش متوسط گیری شده ی  $^{12}$  زمانی و یک بخش اغتشاشی  $^{13}$

غلظت آلاینده است. به منظور حذف اثر جمله ی فشار، معادلات پیوستگی و تکانه به معادلات انتقال ورتیسیتی و تابع جریان تبدیل می شود که در فرم بی بعد به صورت زیر خواهند بود: [۶]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\omega, & \mathbf{u} &= \nabla \psi, \\ \frac{D\omega}{Dt} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{Ra}{Re \cdot Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{DT}{Dt} &= \frac{1}{Re \cdot Pr} \nabla^2 T, \\ \frac{DC}{Dt} &= \frac{1}{Re \cdot Sc} \nabla^2 C + S, \end{aligned} \quad (2)$$

که  $\frac{D}{Dt}$  اپراتور مشتق مادی و  $S$  چشمه است. [۶]

#### ۱.۳. روش حل عددی

معادلات انتقال که شامل انتقال ورتیسیتی، انتقال حرارت، و نرخ غلظت (انتقال جرم) هستند در دو بخش زمانی و مکانی گسسته سازی می شوند؛ سپس با یک پیمایش زمانی معادلات حاکم (به جز معادله ی تابع جریان) حل می شوند. برای معادله ی تابع جریان از روش های متداول حل معادلات بیضوی، که یک فرم تعادلی از معادلات دیفرانسیلی با مشتقات پاره یی هستند، استفاده شده است. یکی از معروف ترین این روش ها، الگوی SOR  $^{11}$  به صورت صریح یا ضمنی است.

#### ۱.۳.۱. گسسته سازی مکانی

برای گسسته سازی مکانی معادله ی انتقال ورتیسیتی، معادله ی انرژی و معادله ی نرخ غلظت، جمله های موجود غیر از جمله ی زمانی با استفاده از روش گسسته سازی مرتبه دوم مدل می شوند. برای نقاط موجود در داخل میدان از روش تفاضل مرکزی به صورت زیر استفاده شده است:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3)$$

و برای نقاط واقع در مرزهای میدان، فرمول بندی تفاضل پیشرو و پسرو مرتبه دوم به صورت زیر به کار گرفته می شود: [۱۶]

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{-3F_{i,j} + 4F_{i+1,j} - F_{i+2,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{3F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (4)$$

#### ۲.۳.۱. گسسته سازی زمانی

برای گسسته سازی زمانی معادلات انتقال از روش صریح رانگ - کوتا مرتبه ی چهارم استفاده شده است. این روش برای انتگرال گیری زمانی معادلات حاکم بر مسائل ناپایا روشی مناسب و دقیق است. معادله ی حاکم به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{dQ}{dt} = R(Q), \quad (5)$$

جمله ی سمت راست در معادله ی ۵ مربوط به عبارات مشتق مکانی است که با استفاده از روش تشریح شده در بخش قبل محاسبه می شوند. جمله ی زمانی با استفاده از الگوریتم زیر جداسازی می شود و مقدار متغیر مجهول در گام زمانی بعدی از روش ارائه شده به دست می آید:

$$\begin{aligned} Q^0 &= Q^n, \\ Q^k &= Q^{k-1} + \alpha \Delta t (R(Q^{k-1})), \quad \text{for } k = 1, \dots, N_{\text{stage}} \\ Q^{n+1} &= Q^{N_{\text{stage}}} \end{aligned} \quad (6)$$

نوشته می شوند:

ضرایب معادله ی ۱۱ عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{kij}^u &= (\Phi^i \cdot \nabla \Phi^j, \Phi^k), \\ \mathbf{B}_{ki}^u &= (\nabla^T \Phi^j, \Phi^k) - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Phi^i, \Phi^k) - (\Phi^i \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \Phi^k) - (\nabla p, \Phi^k), \\ \bar{\mathbf{B}}_{ki}^u &= \left( \frac{\varsigma \cdot \text{Ra}}{\text{Re}^T \cdot \text{Pr}} \nabla \Phi_T^i, \Phi^k \right), \\ \mathbf{C}_k^u &= (\nabla^T \bar{\mathbf{u}}, \Phi^k) - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}, \Phi^k), \end{aligned}$$

معادله ی ۱۱ برای محاسبه ی تغییرات زمانی ضرایب مودال میدان سرعت حل می شود و نتایج حاصل به عنوان ضرایب مورد نیاز در رابطه ی ۷، برای بازسازی مؤلفه های میدان سرعت به کار خواهند رفت.

### ۲.۴. مدل رتبه کاسته ی معادله ی نرخ غلظت

در صورتی که نتایج حاصل از رابطه ی ۷ در معادله ی انتقال غلظت (رابطه ی ۱) جایگذاری شود، نتیجه ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\partial(\bar{C} + C')}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla)(\bar{C} + C') = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \nabla^T (\bar{C} + C') \quad (12)$$

با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط گیری شده صفر باشد، رابطه ی جدیدی به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla)(\bar{C} + C') = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \nabla^T (\bar{C} + C') \quad (13)$$

با تصویرسازی معادله ی رابطه ی ۱۳ در فضای مودهای نرخ غلظت، یک دسته معادله ی دیفرانسیلی مرتبه ی اول بر حسب زمان برای ضرایب مودال نرخ غلظت به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{dc}{dt} + \mathbf{A}_{kij}^c \mathbf{a}^i c^j + \bar{\mathbf{B}}_{ki}^c \mathbf{a}^i + \mathbf{B}_{ki}^c c^i + \mathbf{C}_k^c = 0 \quad (14)$$

که ضرایب معادله ی ۱۴ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{kij}^c &= (\Phi^i \cdot \nabla \Phi_c^j, \Phi_c^k), \\ \bar{\mathbf{B}}_{ki}^c &= \left( \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \nabla^T \Phi_c^i, \Phi_c^k \right) + (\Phi_c^i \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi_c^i, \Phi_c^k), \\ \mathbf{B}_{ki}^c &= (\Phi^i \cdot \nabla \bar{c}, \Phi_c^k), \\ \mathbf{C}_k^c &= \left( \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} \nabla^T \bar{c} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{c}, \Phi_c^k \right). \end{aligned} \quad (15)$$

معادله ی ۱۴ برای محاسبه ی تغییرات زمانی ضرایب مودال نرخ غلظت، حل می شود و نتایج حاصل به عنوان ضرایب مورد نیاز در رابطه ی ۷، برای بازسازی مقدار غلظت به کار می روند. در این پژوهش از روش رانگ - کوتای مرتبه ی چهار به منظور انتگرال گیری زمانی معادله ی سیستم دینامیکی استفاده شده است که روش دقیقی برای حل مسائل وابسته به زمان است.

### ۳.۴. محاسبه ی تغییرات درجه حرارت بر حسب ضرایب مودال نرخ غلظت

به منظور مدل سازی تغییرات درجه حرارت در میدان با استفاده از معادلات مربوط به بخش اغتشاشی دما و نرخ غلظت (معادله ی ۸) از جایگزینی ضرایب مودال نرخ

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \\ T &= \bar{T} + T' \\ C &= \bar{C} + C' \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه ی (۷)، بخش اغتشاشی را می توان بر اساس تقریب گالرکین به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^i(t) \Phi^i(\vec{x}) \\ C' &= \sum_{i=1}^N c^i(t) \Phi_c^i(\vec{x}) \\ T' &= \sum_{i=1}^N d^i(t) \Phi_T^i(\vec{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

در رابطه ی بخش اغتشاشی بردار سرعت پارامترهای موجود به صورت زیر تعریف می شوند: [۱۵]

$$\mathbf{a}^i(t) = \begin{bmatrix} a^i(t) & 0 \\ 0 & b^i(t) \end{bmatrix} \quad \Phi^i(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \phi_u^i(\vec{x}) \\ \phi_v^i(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

در روابط فوق  $a^i(t)$  ضریب مودال و  $\phi_u^i(\vec{x})$  مود متناسب با معادله ی تکانه در جهت  $x$  و  $b^i(t)$  و  $\phi_v^i(\vec{x})$  به ترتیب ضریب مودال و شکل مود متناسب با معادله ی تکانه در جهت  $y$  است.

### ۱.۴. مدل رتبه کاسته ی معادلات ناویر - استوکس همراه با اثرات

#### تغییرات درجه حرارت

اگر مودهای جریان معادله ی پیوستگی را ارضا کنند، معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم ناپذیر به قانون بقای تکانه ی خطی کاهش می یابد که در فرم برداری و بی بعد به صورت زیر است:

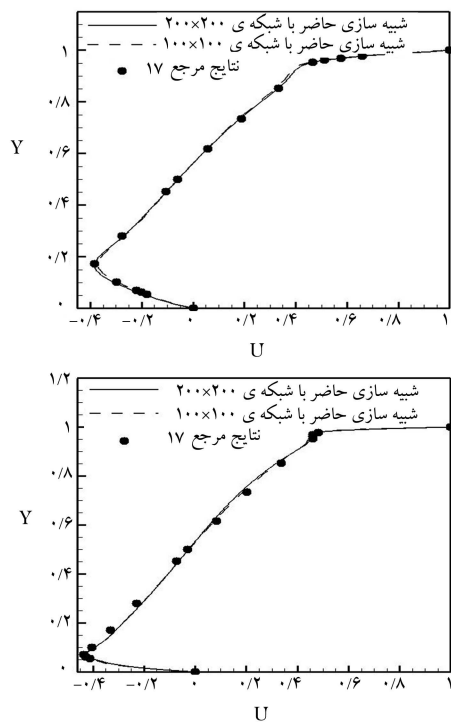
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^T \mathbf{u} + \frac{\varsigma \cdot \text{Ra}}{\text{Re}^T \cdot \text{Pr}} T, \quad (9)$$

به طوری که پارامتر  $\varsigma$  برای معادله ی تکانه در راستای  $x$ ، صفر و برای معادله در راستای  $y$  برابر ۱ خواهد بود. در صورتی که بردار سرعت از رابطه ی ۷ در معادله ی ۹ جایگزین شود و با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط گیری شده صفر باشد، رابطه ی زیر به دست خواهد آمد:

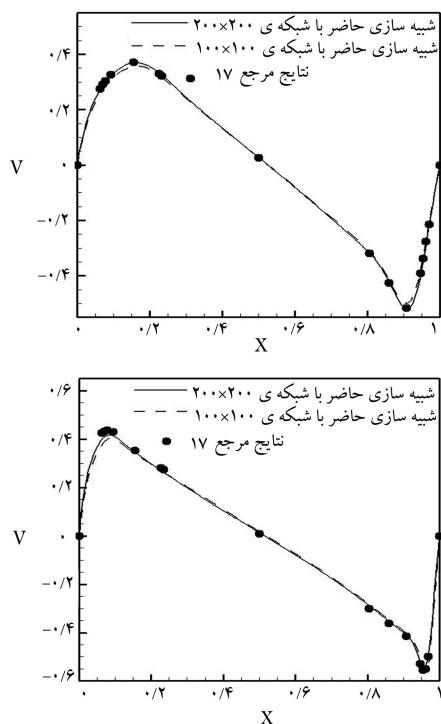
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla)(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^T (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \\ &+ \frac{\varsigma \cdot \text{Ra}}{\text{Re}^T \cdot \text{Pr}} T \end{aligned} \quad (10)$$

اگر معادلات حاصل در راستای مودهای میدان سرعت تصویر شوند، یک دسته معادله ی دیفرانسیلی مرتبه ی اول بر حسب زمان برای ضرایب مودال به دست می آید که سیستم دینامیکی نامیده می شود و معادله ی آن به صورت زیر است:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{A}_{kij}^u \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + \mathbf{B}_{kij}^u \mathbf{a}^i + \bar{\mathbf{B}}_{kij}^u d^i + \mathbf{C}_k^u = 0 \quad (11)$$



شکل ۲. توزیع مؤلفه‌ی افقی سرعت در خط مرکزی افقی چاله در عدد رینولدز ۱۰۰۰ (بالا) و عدد رینولدز ۵۰۰۰ (پایین). خط پیوسته (شبکه‌ی ۲۰۰ × ۲۰۰)، خط چین (شبکه‌ی ۱۰۰ × ۱۰۰) حاصل از پژوهش حاضر و نقاط نتایج حاصل از آزمایش‌های قیا [۱۷].



شکل ۳. توزیع مؤلفه‌ی عمودی سرعت در خط مرکزی عمودی چاله در عدد رینولدز ۱۰۰۰ (بالا) و عدد رینولدز ۵۰۰۰ (پایین). خط پیوسته (شبکه‌ی ۲۰۰ × ۲۰۰)، خط چین (شبکه‌ی ۱۰۰ × ۱۰۰) حاصل از پژوهش حاضر و نقاط نتایج حاصل از آزمایش‌های قیا [۱۷].

غلظت به جای ضرایب مودال درجه حرارت استفاده شده است. در این فرایند پس از این جایگزینی، مودهای میدان دما دوباره محاسبه می‌شود و در نهایت با محاسبه‌ی ضرایب مودال نرخ غلظت (حاصل از رابطه‌ی ۱۴) تغییرات بخش اغتشاشی درجه حرارت با استفاده از معادله‌ی ۸ به دست می‌آید.

#### ۴.۴. الگوی کاهش مرتبه

روشن است در یک فرآیند حل مودال با افزایش تعداد مودها، مدل حاصل از دقت بالاتری در مقایسه با حل عددی برخوردار خواهد بود. اگر مودهای سیستم بر اساس اختلاف سطح انرژی چیده شوند (شکل ۸)، این نکته به وضوح مشاهده خواهد شد که می‌توان با تعداد کمتری از مودها سهم بیشتری از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد. یعنی، با روش تشریح شده می‌توان به یک الگوی رتبه‌کاسته دست یافت. به این منظور و برای محاسبه‌ی تعداد مودهایی که درصد بالاتری از انرژی را دارند، معیاری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{total}} \lambda_i}, \quad (16)$$

در این رابطه  $\lambda$  مقادیر ویژه‌ی حاصل از تجزیه‌ی ماتریس داده‌ها می‌باشد. معیار موردنظر در این پژوهش مقدار ۹۹٪ برای  $\kappa$  است. در این صورت  $N_r$  تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته را نتیجه می‌دهد.

#### ۵. نتایج و بحث

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از پژوهش پرداخته می‌شود. برای صحت‌سنجی الگوی شبیه‌سازی عددی مستقیم، جریان درون چاله، که یک مسئله‌ی کلاسیک مکانیک سیالات است، شبیه‌سازی و بررسی شده است.

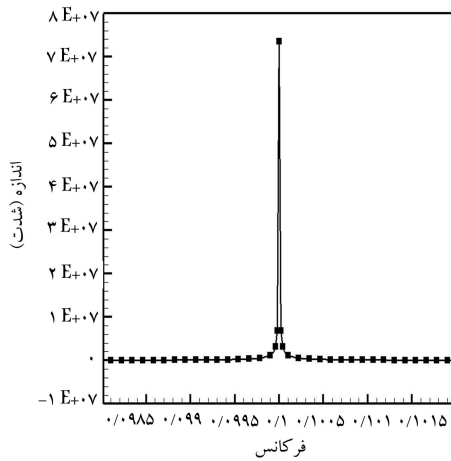
#### ۱.۵. جریان درون چاله با دیواره‌ی متحرک

برای صحت‌سنجی مدل عددی، جریان درون چاله شبیه‌سازی و بررسی شده است. در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از کد عددی و آزمایش‌های قیا [۱۷] برای مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در خط مرکزی افقی و عمودی چاله در اعداد رینولدز ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ صورت گرفته است. همان‌طور که مشخص است نتایج حاصل از کد توسعه‌یافته دقت قابل قبولی در مقایسه با نتایج حاصل از آزمایش‌های قیا دارند. نتایج برای دو کیفیت متفاوت شبکه‌ی محاسباتی انجام گرفته که نتایج حاصل از شبکه‌ی فشرده‌تر از دقت بالاتری در مقایسه با داده‌های مرجع ۱۷ برخوردار است.

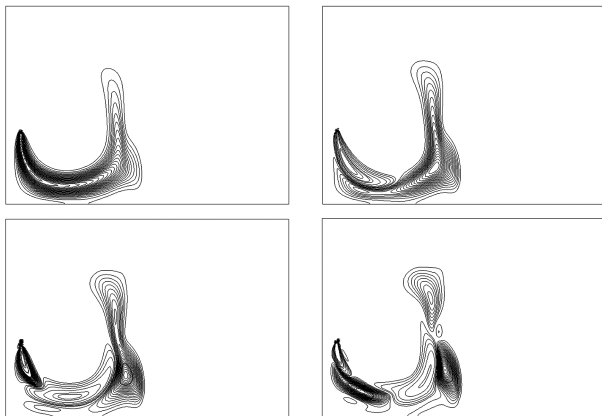
#### ۲.۵. جریان جابه‌جایی آزاد ناشی از یک صفحه‌ی افقی داغ‌شده

##### همراه با انتقال آلاینده

مسئله‌ی موردنظر در این پژوهش انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد از روی یک صفحه‌ی افقی داغ‌شده مطابق شکل ۴ است که توسط محققان متعددی بررسی شده است [۳-۱]. همان‌طور که در شکل مشخص است در مرزهای بالا، سمت چپ و راست ناحیه‌ی حل شرط مرزی عدم لغزش برای سرعت و مقدار درجه حرارت صفر در نظر گرفته شده است.

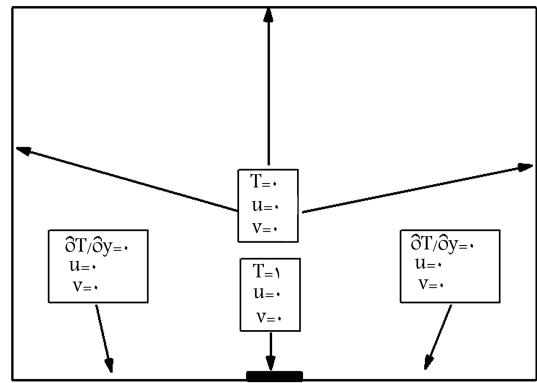


شکل ۶. طیف انرژی جنبشی میدان جریان (سرعت).

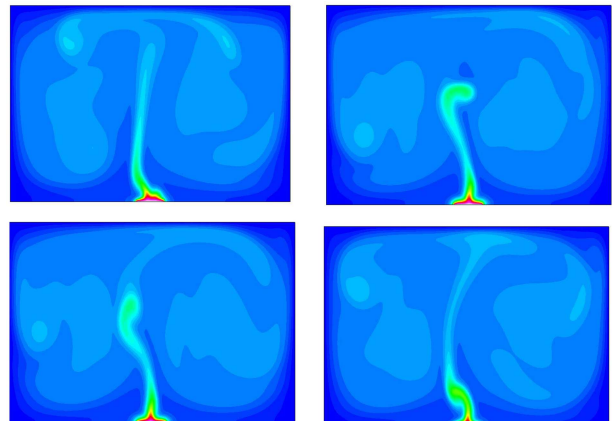


شکل ۷. خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرزی تر نرخ غلظت، به ترتیب، بالا سمت چپ مود اول، بالا سمت راست مود دوم، پایین سمت چپ مود سوم، و پایین سمت راست مود چهارم.

نمایه‌های لازم برای بازسازی مدل رتبه‌کاسته از حل عددی میدان جریان به دست می‌آیند. در این پژوهش  $10^\circ$  نمایه از متغیرهای اصلی میدان جریان و نرخ غلظت برای بازه زمانی  $2/5$  ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۷ خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرزی تر نرخ غلظت نشان داده شده و چهار مود پرنرزی تر مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در شکل ۸ نمایش داده شده است. شکل ۹ طیف انرژی نسبی مودهای میدان سرعت و نرخ غلظت را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، با افزایش تعداد مودها مقدار انرژی نسبی حاصل افزوده می‌شود ولی این فرایند یک نرخ همگرا شونده دارد و پس از افزایش بیشتر مودها مقدار افزایش انرژی کند می‌شود و به یک عدد نسبتاً ثابت میل می‌کند. نکته‌ی مهم این است که چند مود اول مقدار انرژی بیشتری دارند و از لحاظ اثرگذاری غالب‌تر به نظر می‌رسند. در این مسئله همان‌طور که در این شکل آشکار است  $10^\circ$  مود اول در حدود  $8^\circ$  درصد انرژی را در بر دارند و اثر بیشتری در دینامیک میدان می‌گذارند. حال، با توجه به روش ارائه شده در بخش ۴.۴، تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته محاسبه می‌شود. برای این مسئله،  $20^\circ$  مود به‌منظور شبیه‌سازی میدان جریان استفاده شده است. پس از بازسازی مدل رتبه‌کاسته به صورت یک سامانه‌ی دینامیکی (معادلات ۱۱ و ۱۴) و با استفاده از یک شرط اولیه، که برابر با مقدار ضرایب مودال در اولین گام زمانی است، پیشروی زمانی با استفاده از مدل انجام



شکل ۴. هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی به‌کاررفته.



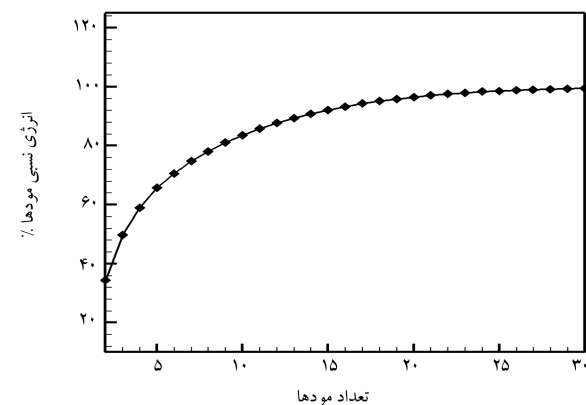
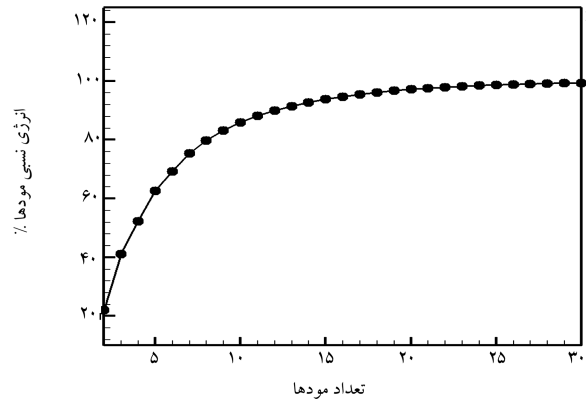
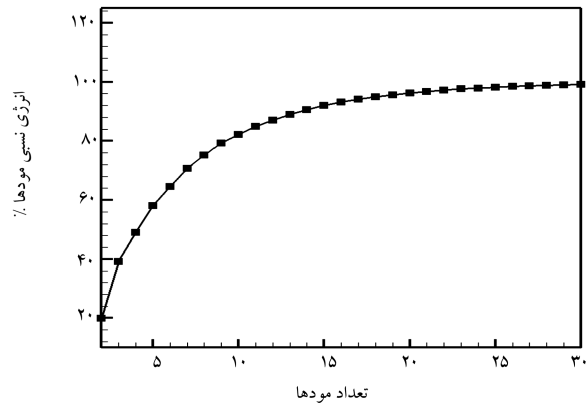
شکل ۵. خطوط هم‌تراز درجه حرارت در زمان‌های صفر (بالا سمت چپ)،  $1/25$  (بالا سمت راست)،  $1/875$  (پایین سمت چپ) و  $2/5$  (پایین سمت راست) ثانیه.

جدول ۱. شرایط مسئله‌ی جریان جابه‌جایی آزاد همراه با انتقال آلاینده‌ها.

پارامتر	عدد رینولدز	عدد رایلی	عدد پراختل	عدد اشمیت
مقدار	$1000$	$4.75 \times 10^6$	$0.72$	$0.178$

در مرز پایین و در ناحیه‌ی مربوط به صفحه‌ی افقی داغ‌شده درجه حرارت مقداری غیرصفر دارد اما سرعت همچنان برابر صفر فرض می‌شود. برای نواحی اطراف صفحه‌ی داغ‌شده شرط مرزی دیواره‌ی بی‌دررو و شرط مرزی عدم لغزش برای سرعت در نظر گرفته شده است.

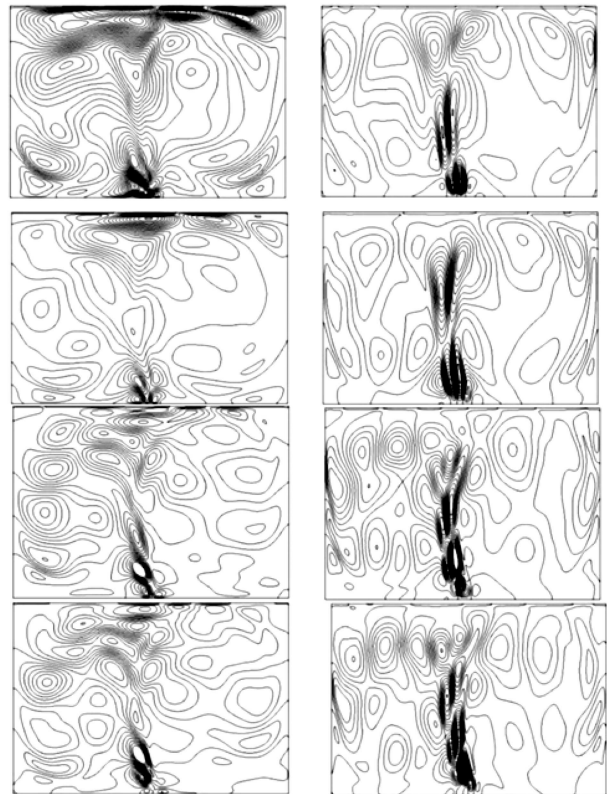
مدل عددی برای جریان جابه‌جایی آزاد (مطابق شکل ۴) و طبق شرایط مندرج در جدول ۱ اجرا شده است. سیال عامل هوا در نظر گرفته شده است. با توجه به فیزیک حاکم بر مسئله، جریان دارای یک رفتار وابسته به زمان است؛ بنابراین، تا زمانی که رفتار مسئله به حالت نوسانی با دامنه یکسان درآید، فرایند حل ادامه خواهد یافت. سپس از نتیجه‌ی حاصل به‌عنوان یک مقدار اولیه برای شبیه‌سازی عددی انتقال آلاینده در شرایط حاصل استفاده می‌شود. معیار موردنظر برای مطالعه‌ی رفتار سیستم، انرژی جنبشی کل است که بر اساس تعریف معادل با مجذور سرعت می‌باشد. توزیع دما در حجم کنترل مفروض برای چهار گام زمانی مختلف و در حالتی که رفتار مسئله به حالت نوسانی درآمده در شکل ۵ نمایش داده شده است. شکل ۶ تبدیل فوری تغییرات انرژی جنبشی سیستم بر حسب زمان را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است سیستم دارای یک بسامد غالب است که نشان‌دهنده‌ی رفتار نوسانی تناوبی می‌باشد. حال در شرایط تشریح‌شده،



شکل ۹. توزیع انرژی نسبی مودهای میدان مؤلفه‌ی افقی سرعت (راست)، مؤلفه‌ی عمودی سرعت (وسط) و نرخ غلظت (چپ).

## ۶. نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر فعالیت‌های زیادی به منظور پیشرفت الگوهای سریع در محاسبات مهندسی صورت گرفته است. یکی از متداول‌ترین روش‌ها، مدل‌های رتبه‌کاسته است. با توجه به اینکه روش تجزیه‌ی متعامد بهینه - نمایه توانایی ایجاد مدل‌های کاهش مرتبه‌یافته‌ی مبتنی بر معادلات بقا را به وجود می‌آورد، در سال‌های اخیر جذابیت‌های بسیاری در حوزه‌ی پژوهش‌های مکانیک سیالات داشته است. در این پژوهش از مدل رتبه‌کاسته بر پایه‌ی روش تجزیه‌ی متعامد بهینه به منظور شبیه‌سازی جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر همراه با تغییرات دما و انتقال جرم استفاده شده است. به منظور محاسبه‌ی مودهای میدان جریان و نرخ غلظت از روش تجزیه‌ی متعامد بهینه - نمایه

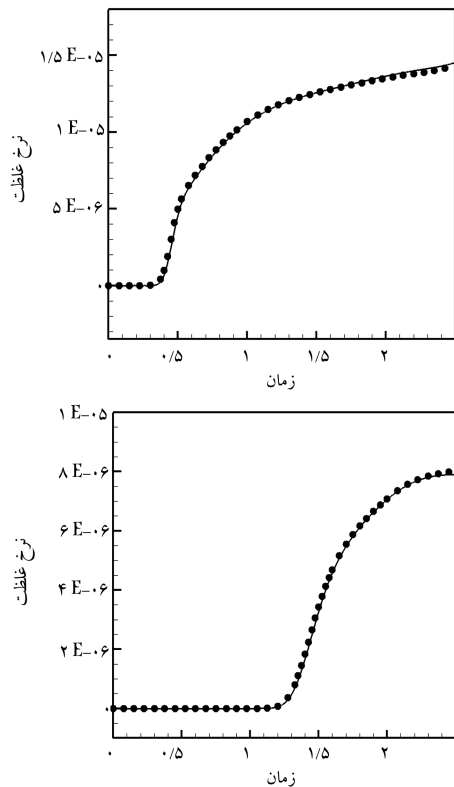


شکل ۸. خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرزی‌تر مؤلفه‌ی افقی سرعت (چپ) و مؤلفه‌ی عمودی سرعت (راست).

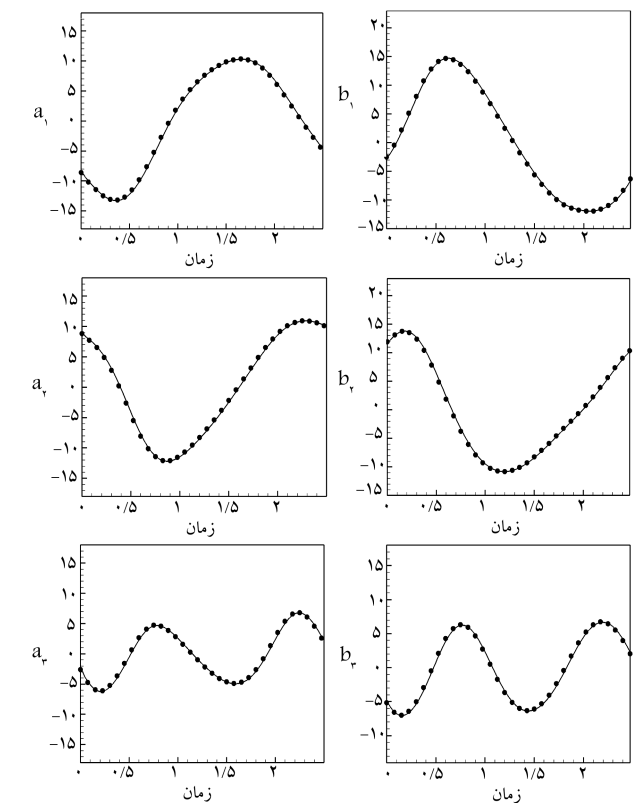
جدول ۲. شرایط نقاط موردنظر جهت داده برداری نرخ غلظت.

شماره‌ی نقطه	$x$	$y$
۱	۰٫۱۹۶	۰٫۲۰۵
۲	۰٫۷۵	۰٫۲۰۵

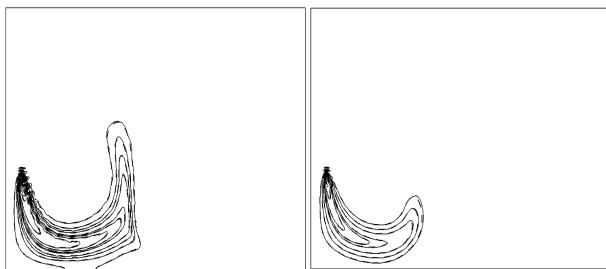
می‌گیرد. در این پژوهش گام زمانی برای مدل رتبه‌کاسته  $0.01$  در نظر گرفته شده و با استفاده از روش رانگ - کوتای مرتبه چهار انتگرال‌گیری زمانی انجام شده است. در شکل ۱۰ تغییرات زمانی سه ضریب مودال اول (پرنرزی‌تر) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در بازه‌ی زمانی معادل با یک چرخه‌ی نوسان کامل (با توجه به تغییرات زمانی انرژی جنبشی کل میدان) نمایش داده شده است. شکل ۱۱ نیز تغییرات زمانی شش ضریب مودال اول نرخ غلظت برای شرایط مشابه با شکل ۱۰ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این دو شکل مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته‌ی توسعه‌یافته از دقت بسیار بالایی در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم حتی در ضرایب با عدد موج بالا برخوردار است. شکل ۱۲ تغییرات زمانی نرخ غلظت در دو نقطه‌ی ۱ و ۲ مطابق جدول ۲ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود مدل رتبه‌کاسته دارای دقت بسیار مناسبی برای پیش‌بینی تغییرات زمانی نرخ غلظت در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم است. در شکل ۱۳ مقایسه‌ی بین خطوط هم‌تراز نرخ غلظت حاصل از مدل رتبه‌کاسته و حل عددی مستقیم در دو گام زمانی صورت گرفته است. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است، مدل رتبه‌کاسته دارای دقت قابل قبول، در پیش‌بینی تغییرات نرخ غلظت در تمام میدان مورد مطالعه است.



شکل ۱۲. تغییرات زمانی نرخ انتقال غلظت در نقطه‌ی ۱ (بالا) و نقطه‌ی ۲ (پایین)، خطوط نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و نقاط داده‌های حل عددی.

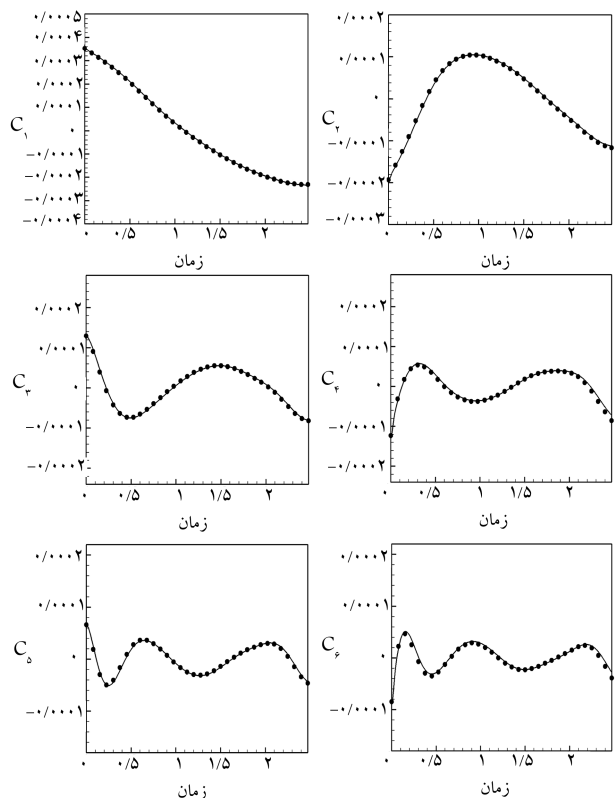


شکل ۱۰. تغییرات زمانی ضرایب مودال مؤلفه‌ی افقی (چپ) و عمودی (راست) سرعت، خطوط نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و نقاط داده‌های حل عددی.



شکل ۱۳. مقایسه‌ی خطوط هم‌تراز غلظت در زمان‌های ۱ ثانیه (راست) و ۱٫۸۷۵ ثانیه (چپ)، خطوط پیوسته نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و خطوط گسسته داده‌های حل عددی.

استفاده شده است و با تصویرسازی معادلات بقا در فضای برداری موده‌های میدان، یک سیستم دینامیکی به صورت یک مسئله‌ی مقدار اولیه ایجاد می‌شود. به علاوه با استفاده از یک روند کاهش مرتبه، تعداد موده‌های موردنیاز برای بازسازی معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته محاسبه شده است. به منظور کاهش پیچیدگی‌های حل در مدل رتبه‌کاسته از یک روش پیشنهادی برای جایگزینی ضرایب مودال میدان دما بر حسب ضرایب مودال نرخ غلظت استفاده شده است. در نتیجه موده‌های میدان دما با این تعریف دوباره محاسبه شده و این موضوع کمک می‌کند تا تعداد معادلات مدل رتبه‌کاسته برای شبیه‌سازی میدان جریان کاهش یابد. از مدل حاصل به منظور انتگرال‌گیری در یک بازه‌ی زمانی کوتاه برای مسئله‌ی مذکور بهره گرفته شده است که نتایج دقیق‌تر و زمان کمتری را در مقایسه با شبیه‌سازی عددی در پی دارد.



شکل ۱۱. تغییرات زمانی ضرایب مودال نرخ غلظت، خطوط نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته و نقاط داده‌های حل عددی.



$T$ : درجه حرارت.

### علائم یونانی

$\omega$ : ورتیسیتی؛

$\psi$ : تابع جریان؛

$\varphi$ : توابع ویژه ماتریس نمایه‌ها؛

$\Phi$ : مودهای میدان سرعت؛

$\Phi_T$ : مودهای درجه حرارت؛

$\Phi_c$ : مودهای نرخ غلظت.

### فهرست علائم

Re: عدد رینولدز؛

Pr: عدد پراتل؛

Ra: عدد رایلی؛

Sc: عدد اشمیت؛

$\vec{u}$ : بردار سرعت؛

C: نرخ غلظت؛

### پانوشت‌ها

1. transport equations
2. reynolds averaged navier-stokes (RANS)
3. multi phase
4. Karhunen - Loeve
5. pattern
6. snapshot
7. Favier
8. adjoint
9. proper orthogonal decomposition
10. ensemble
11. successive over relaxation
12. mean
13. fluctuation

5. Kimura, F., Yoshioka, T., Kitamura, K., Yamaguchi, M. and Asami, T. "Fluid Flow and heat transfer of natural convection at slightly inclined, upward-facing, heated plate", *Heat Transfer, Asian Research*, **35**(5), pp. 362-375 (2002).
6. Sarris, I.E., Lekakis, I. and Vlachos, N.S. "Natural convection in rectangular tanks heated locally from below", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **47**, pp. 3549-3563 (2004).
7. Moayyedi, M.K. "Numerical simulation of fluid flow and contaminant transport in the field under effects of natural convection", *Proc. of the 6th Conference on CFD Applications in Chemical and Petroleum Industries*, Isfahan, Iran (2015).
8. Moayyedi, M.K., Najafbeygi, M. and Hojaji, M. "Development of reduced order model for flow field estimation using proper orthogonal decomposition", *Proc. of the 15th Fluid Dynamics Conference*, Hormozgan, Iran (2013).
9. Everson, R. and Sirovich, L. "The Karhunen-Loeve for gappy data", *J. Optical Society of America*, **12**, pp. 1657-1664 (1995).
10. Bui-Thanh, T., Damodaran, M. and Wilcox, K. "Aerodynamic data reconstruction and inverse design, using proper orthogonal decomposition", *AIAA Journal*, **42**(8), pp. 1505-1516 (2004).
11. Favier, J., Cordier, L., Kourta, A. and Iollo, A. "Calibrated POD reduced-order models of massively separated flows in the perspective of their control", *ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting*, Miami, Florida, USA (2006)
12. Couplet, M., Basdevant, C. and Saguat, P. "Calibrated reduced-order POD-galerkin system for fluid flow modeling", *J. Computational Physics*, **207**, pp. 192-220 (2005).
13. Noack, B.R., Papas, P. and Monkewitz, P.A. "The need for a pressure-Term representation in empirical galerkin

### منابع (References)

1. Shi, X., Khodadadi, J.M. and Hai, X. "Laminar natural convection in a square cavity due to an oscillating thin fin: Transient behavior", *Proc. of the 9th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference*, San-Francisco, California (2006).
2. Hasnaoui, M., Bilgen, E. and Vasseur, P. "Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **6**(2), pp. 255-264 (1992).
3. Oosthuizen, P.H. and Paul, J.T. "Natural convection in a rectangular enclosure with three heated sections on the lower surface", *Proc. of the 38th AIAA Thermophysics Conference*, Toronto, Canada (2005).
4. Teymourtash, A., Ebrahimi, M. and Rafei, M. "Natural convection on a vertical non-isothermal plate in a supercritical fluid", *Proc. of the 16th Iranian Society of Mechanical Engineers (ISME) Conference*, Kerman, Iran (2008).

- models of incompressible shear flows”, *J. Fluid Mech.*, **523**, pp. 339-365 (2005).
14. Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C.H. and Iollo, A. “Accurate model reduction for transient and forced wakes”, *European J. Mech.- B/Fluids*, **26**, pp. 354-366 (2007).
15. Moayyedi, M.K., Taeibi-Rahni, M. and Sabetghadam, F. “Calibrated low-dimensional POD dynamical model for simulation of the unsteady incompressible flows”, *Aerodynamics and Fluid Mechanics Journal*, **8**(1), pp. 29-39 (2012).
16. Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., *Computational Fluid Dynamics Vol.-I, II and III*, Engineering Education System Publications, Wichita, Kansas, USA (2000).
17. Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. “High-Re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method”, *J. Comp. Physics*, **48**, pp. 387-411 (1982).