

شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان آشفته‌ی حاوی ذرات با شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات

زهرة علی‌نژاد (دانشجوی کارشناسی ارشد)

امین موسائی* (استادیار)

غلامرضا زنده‌بودی (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه باسوج

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۶)
دوری ۳ - ۳۳، شماره ۲، ص. ۱۳-۳

در این پژوهش، جریان آشفته‌ی حاوی ذرات در یک مکعب با شرط مرزی دوره‌یی و اعمال شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات بررسی شده است. میدان جریان سیال با شبیه‌سازی مستقیم عددی معادلات ناویر - استوکس حل شده است و برای به‌دست‌آوردن میدان جریان آشفته‌ی اجباری از بارگذاری خطی استفاده شده است. معادله‌ی حاکم بر ذرات، معادله‌ی مکسی - رایلی است و حل عددی آن با در نظر گرفتن شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات ارائه شده است. در سمت راست معادله‌ی مکسی - رایلی نیروهای وارد بر هر ذره وجود دارد که در این پژوهش، با استفاده از حل تحلیلی جریان خزشی روی یک ذره‌ی کروی با شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط، رابطه‌ی برای محاسبه‌ی نیروی مقاومت وارد شده از طرف سیال به‌ذره به‌دست آمده و در کد DNS اعمال شده است. ابر ذرات در این جریان متشکل از 10^5 هزار ذره است که نتایج برای عدد استوکس $St = 1$ و اعداد تروسفل مختلف نمایش داده شده است. همچنین با بررسی رفتار ذرات در نزدیکی گردابه‌ها مشاهده شده است که با کاهش لغزش و در اعداد تروسفل پایین، با کاهش اثر سیال بر ذرات، ذرات با سرعت بیشتری به بیرون از گردابه‌ها پرتاب می‌شوند.

واژگان کلیدی: شبیه‌سازی مستقیم عددی، جریان حاوی ذرات، جریان آشفته‌ی همگن ایزوتروپ، شرط چسبش - لغزش مخلوط.

۱. مقدمه

جریان‌های آشفته را از یک دیدگاه می‌توان به دو دسته‌ی جریان‌های تک‌فازی و چندفازی طبقه‌بندی کرد. جریان‌های آشفته‌ی دو فازی فراوانی در طبیعت و صنعت وجود دارند که حرکت رسوب همراه با آب در رودخانه، جریان خاکسترهای خروجی از یک آتشفشان در اتمسفر، پخش شدن افشانه در هوا و ذرات سوخت جامد یا قطرات سوخت مایع در محفظه‌ی احتراق یک موتور جت یا موشک مثال‌هایی از این نوع جریان هستند. از این رو، توانایی پیش‌بینی رفتار این نوع جریان‌ها با استفاده از مدل‌های عددی یا تئوری برای گستره‌ی وسیعی از زمینه‌های مختلف علمی سودمند است.

جریان آشفته بیان حرکت غیر دائم سیال است که با دینامیک گردابه‌یی سه‌بعدی، وابسته به زمان، آشوبناک و تصادفی شناخته می‌شود. این رژیم جریان معمولاً در اعداد رینولدز بالا اتفاق می‌افتد. معادلات حاکم بر جریان آشفته، معادلات ناویر - استوکس هستند که به دلیل ماهیت غیرخطی جریان آشفته، تاکنون حل تحلیلی این

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۸/۱۷، اصلاحیه ۱۳۹۵/۴/۲۶، پذیرش ۱۳۹۵/۵/۱۱.

z.alinejad.mec@gmail.com
moosaie@yu.ac.ir
zندهbudi@yu.ac.ir

معادلات برای جریان آشفته انجام نشده است و برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده می‌شود.

سه رهیافت مهمی که امروزه برای شبیه‌سازی جریان آشفته استفاده می‌شوند عبارت‌اند از: شبیه‌سازی مستقیم عددی (DNS)^۱، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ (LES)^۲ و روش مدل‌سازی آماری توربولانس (STM^۳ یا RANS^۴). رهیافت RANS بر مبنای معادلات ناویر - استوکس متوسط‌گیری شده‌ی رینولدز است. در روش DNS جواب دقیق معادلات ناویر - استوکس و معادلات پیوستگی با استفاده از روش‌های عددی با دقت بالا در یک شبکه‌ی مناسب به‌دست می‌آید. LES یک روش حل برای جریان‌های آشفته است که در آن مقیاس‌های بزرگ حل و مقیاس‌های کوچک مدل‌سازی می‌شوند. در روش RANS همه‌ی مقیاس‌های جریان آشفته مدل می‌شوند. بنابراین DNS، LES و RANS به ترتیب بیشترین تا کمترین دقت و نیز حجم محاسبات را دارند.

روش DNS معادلات حاکم بر جریان را همان‌گونه‌یی که هستند، بدون هیچ‌گونه ساده‌سازی، حل می‌کند و جواب دقیق را می‌دهد. ولی به دلیل اینکه تمام مقیاس‌های

جریان را حل می‌کند، حجم محاسبات بسیار زیاد می‌شود. از این رو، برای انجام DNS معمولاً به ابررایانه‌ها نیاز است. بنابراین، امروزه از این روش فقط برای حل جریان‌های آشفتگی با رینولدزهای پایین و متوسط استفاده می‌شود. با وجود این محدودیت‌ها، هم‌چنان این روش دقیق‌ترین روش حل عددی جریان آشفتگی است و یک ابزار تحقیقاتی مهم در شناخت فیزیک آشفتگی و بررسی صحت تئوری‌ها و مدل‌ها به شمار می‌رود.

پایه‌های روش DNS در مرکز ملی تحقیقات اتمسفریک^۵ بنا نهاده شد. اورزاگ و پترسون در سال ۱۹۷۲ اولین شبیه‌سازی مستقیم عددی را برای یک جریان آشفتگی همسان‌گرد در یک جعبه‌ی مکعبی دوره‌ی انجام دادند.^[۱]

روگالوگام مهم بعدی را در سال ۱۹۸۱ برداشت. وی یک تبدیل از معادلات حاکم را با بسطی از الگوریتم اورزاگ و پترسون ترکیب کرد تا آشفتگی همگن اعمال شده بر کرنش متوسط را محاسبه کند. کارهای اولیه‌ی روگالو استنادی برای DNS جریان آشفتگی در نظر گرفته شد. در سال ۱۹۸۰ رایلی و متکالف یک DNS شبکه درشت برای لایه‌های بدون برش (= لغزش کامل) انجام دادند.

در سال ۱۹۸۷، موزر و معین جریان آشفتگی در یک کانال با دیوار انحنادار را به کمک DNS بررسی کردند.^[۲] در همین سال کیم و همکاران DNS یک کانال صفحه‌ی را انجام دادند.^[۳] در سال ۱۹۸۸ اسپالارت یک روش مبتکرانه برای محاسبه‌ی لایه‌ی مرزی آشفتگی با گرادینان فشارهای صفر و مطلوب ارائه داد.^[۴] ایگلز و همکاران برای اولین بار DNS جریان آشفتگی در لوله را مطالعه کردند.^[۵]

در این پژوهش، یک سوسپانسیون رقیق از ذرات کروی در نظر گرفته شده است. در نتیجه، فقط اثر سیال بر روی ذرات بررسی خواهد شد. برای حل جریان حاوی ذرات، علاوه بر معادلات ناویر-استوکس، به یک معادله‌ی بنیادی، که معادله‌ی حرکت برای یک ذره‌ی ته‌ای غوطه‌ور نامیده می‌شود، نیز نیاز است. این معادله اثر جریان را روی ذره توصیف می‌کند و در واقع قانون دوم نیوتن برای حرکت یک ذره تحت اثر نیروهای وارد بر آن است. برای هر یک از ذرات موجود در جریان باید چنین معادله‌ی نوشته و حل شود.

پس از اولین شبیه‌سازی‌های جریان آشفتگی، شبیه‌سازی جریان‌های آشفتگی حاوی ذرات نیز صورت گرفته است. رایلی و پترسون در سال ۱۹۷۴ اولین شبیه‌سازی رایانه‌ی برای جریان‌های حاوی ذره را با دیدگاه اوپلری برای سیال حامل و دیدگاه لاگرانژی برای ذرات انجام دادند.^[۶] پس از آن، مکسی در سال ۱۹۸۷، سرعت متوسط ته‌نشین شدن ذرات در یک جریان آشفتگی همگن با ذرات کوچک کروی را بررسی کرد و نشان داد که این سرعت به اینرسی ذرات و سرعت حدی ذرات بستگی دارد.^[۷] الگو باشی در سال ۱۹۹۱ مروری بر شبیه‌سازی‌های مستقیم عددی و مدل‌های بستگی برای جریان‌های آشفتگی حاوی ذره انجام داد و نشان داد که چگونه شبیه‌سازی‌های مستقیم عددی می‌توانند به پیشرفت و بهبود مدل‌های بستگی کمک کنند.^[۸] ژانگ و احمدی در سال ۲۰۰۰، با استفاده از DNS، حرکت و ته‌نشین شدن ذرات در جریان آشفتگی را در کانال افقی و عمودی بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که ساختارهای نزدیک دیواره نقش مهمی در ته‌نشین شدن ذرات دارند. در کانال عمودی، جهت گرانس بر سرعت ته‌نشین شدن ذرات مؤثر است و در کانال افقی، گرانس باعث افزایش سرعت ته‌نشین شدن ذرات در نزدیکی دیواره‌ی پایینی می‌شود.^[۹]

در سال ۲۰۰۳، نارایانان و همکاران، پخش شدن و ته‌نشین شدن ذرات را در یک کانال باز با استفاده از روش DNS و کوپلینگ یک‌راهه بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که ذرات در نزدیکی دیواره تجمع دارند و از سازوکارهای نزدیک دیواره اثر بیشتری می‌گیرند. همچنین ذرات سبک در نزدیکی دیواره مشابه با ساختارهای

نوری نزدیک دیواره ته‌نشین می‌شوند؛ ولی ذرات سنگین از الگوی خاصی پیروی نمی‌کنند و به صورت تصادفی ته‌نشین می‌شوند.^[۱۰]

در سال ۲۰۰۶، آرسن و همکاران به بررسی اهمیت استفاده از نیروی بالابر و ضریب تصحیح ضریب مقاومت دیواره در دینامیک ذرات در کانال جریان آشفتگی کاملاً توسعه‌یافته با استفاده از DNS پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که اثر هر دو پارامتر بررسی شده تأثیر مهمی بر توزیع ذرات و خواص آماری آن‌ها ندارد.^[۱۱]

در سال ۲۰۱۳، میلیسی و همکاران به بررسی اثرات زبری دیواره روی دینامیک ذرات در یک کانال با جریان آشفتگی حاوی ذرات با استفاده از DNS پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که زبری دیواره موجب رفتار متفاوت ذرات با حالت غیرزبری می‌شود. در این حالت ذرات به جای اینکه به دیواره نزدیک شوند و در نزدیکی آن تجمع یابند، از آن دور می‌شوند و در مرکز کانال جمع می‌شوند.^[۱۲] در سال ۲۰۱۴، گود و همکاران، سرعت ته‌نشین شدن و سرعت جذر میانگین مربعات^۶ ذرات را با استفاده از DNS و به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. آن‌ها وابستگی این سرعت‌ها را به اینرسی ذرات، جاذبه‌ی زمین و مقیاس‌های بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین گردابه‌ها بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که کاهش سرعت ته‌نشین شدن ذرات چگال ناشی از اثرات مقاومت غیرخطی روی ذرات است. همچنین افزایش جاذبه و اینرسی ذرات، سرعت جذر میانگین مربعات ذرات را کاهش می‌دهد و واکنش ذرات در حال سقوط به نوسانات عمودی بیشتر از نوسانات افقی است.^[۱۳]

این پرسش که در جریان‌های سیال کدام شرایط مرزی باید بر روی دیواره در نظر گرفته شود، از ابتدای بررسی علمی دینامیک سیالات بحث‌های زیادی را همراه داشته است. در قرن ۱۹، سه فرض کلی در مورد حالت جریان بر روی یک مرز وجود داشت:

۱. سیال بر روی سطح می‌چسبد و از آن‌جا (از روی دیواره) سرعت به‌طور پیوسته رشد می‌کند تا به مقدار جریان آزاد برسد.
۲. یک قشر سیال با ضخامت محدود بر روی مرز چسبیده است و بقیه‌ی سیال بر روی این قشر می‌لغزد. ضخامت این قشر تابعی از انحنای سطح، جنس ماده‌ی سطح، و جنس سیال است.
۳. سیال بدون واسطه، بر روی مرز جامد می‌لغزد و سرعت لغزش با تنش برشی متناسب است.

از اوایل قرن ۱۹ تا ۲۰، محققان بر آن بودند که با کمک شروط مرزی، بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی هماهنگی ایجاد کنند. اما به دلیل اشتباهاتی که در تئوری‌ها وجود داشت و نیز خطاهای اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه، موفق به تخمین درست شرایط مرزی نشدند.

با بهبود دقت ابزارهای اندازه‌گیری، نهایتاً استوکس به این نتیجه رسید که لغزش نمی‌تواند وجود داشته باشد. تروستل^۷ در سال ۱۹۸۸ مجدداً بحث درباره‌ی حالت جریان بر روی مرز را مطرح کرد. او با استفاده از یک تحلیل مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته نشان داد که سیال بر روی دیواره می‌لغزد. پارامتر تعیین‌کننده برای میزان لغزش عدد بی بعد تروستل است. اگر چه برای سیالات معمول بر روی سطوح معمول مقدار این لغزش بسیار ناچیز است، حالاتی وجود دارد که لغزش بر روی سطح اهمیت می‌یابد. یک مثال کاربردی، جریان بر روی سطوح آب‌گریز است که امروزه برای کاهش مقاومت از آن استفاده می‌شود. سیر تاریخی مطالعات بر روی شرط مرزی سیال بر روی مرز جامد به‌طور مشروح ارائه شده است.^[۱۴]

شبیه‌سازی‌های انجام‌گرفته در زمینه‌ی جریان‌های آشفتگی حاوی ذرات تاکنون عموماً به ذاتی پرداخته‌اند که دارای شرط مرزی عدم لغزش بوده‌اند. اما در همه‌ی

برای جریان سیال روی سطح کره، تنش برشی به صورت زیر در مختصات کروی بیان می‌شود:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \lambda u_{\theta}|_{r=R} \quad (5)$$

λ یک ضریب مثبت با بعد (Pa.s/m) است و تابعی از جنس سیال و کره، سرعت روی سطح کره، و دمای سیال است. در سال ۱۹۹۱، عاطفی با استفاده از اصل تشابه یک عدد بدون بعد را معیار ارزیابی لغزش معرفی کرد و آن را عدد تروستل Tr نامید^[۱۶] که برای یک کره به شعاع R غوطه‌ور در سیالی به لزجت μ می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\text{Tr} = \frac{\lambda R}{\mu} \quad (6)$$

در این جا دو حالت خاص پیش می‌آید؛ $\text{Tr} \rightarrow \infty$ بیان‌کننده‌ی شرط عدم لغزش، و $\text{Tr} \rightarrow 0$ بیان‌کننده‌ی لغزش کامل است. شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط و حالت‌های حدی آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

۱.۲. حل تحلیلی جریان حول کره با شرط چسبش - لغزش مخلوط
 حل تحلیلی جریان حول یک کره با در نظر گرفتن شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط به‌طور کامل در پیوست (رابطه‌های ۷ تا ۳۵) ارائه شده است.

۲.۲. روش عددی حل معادله‌ی حاکم بر جریان سیال

به‌منظور حل معادلات ناویر - استوکس سه‌بعدی، تراکم‌ناپذیر و نیوتنی از یک کد دینامیک سیالات محاسباتی به زبان فورتن که توسط نویسندگان توسعه داده شده است، استفاده می‌شود. یک روش مؤثر عددی برای حل مسائل جریان تراکم‌ناپذیر وابسته به زمان روش تصویرکردن^۹ است که در سال ۱۹۶۷ کورین^[۱۷] و تمام^[۱۸] به‌طور مستقل ارائه کردند. این روش که بر مبنای تجزیه‌ی هلمهولتز طرح‌ریزی شده است، یک میدان برداری را به دو قسمت غیرچرخشی و بدون دیورژانس تجزیه می‌کند. الگوریتم این روش به دو مرحله تقسیم می‌شود؛ در ابتدا، سرعت مشروط که لزوماً شرط تراکم‌ناپذیری را ارضا نمی‌کند، در هر گام زمانی محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از فشار، میدان سرعت متوسط بر فضایی که دیورژانس آن صفر است تصویر می‌شود و تصحیحی برای سرعت و فشار ایجاد می‌شود. این روش برای حل معادلات ناویر - استوکس تراکم‌ناپذیر و غیردائم به‌صورت مختصر در ادامه آمده است:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{P} \quad (36)$$



شکل ۱. طرح‌واره‌ی شرط مرزی لغزش کامل، و عدم لغزش، و چسبش لغزش مخلوط روی سطح جامد.

کاربردها، مانند سوسپانسیون‌های مایع - مایع و مایع - گاز این فرض قابل قبول نیست. در ذرات مایع، فرض شرط عدم لغزش روی جدار قطره خیلی منطقی نیست. زیرا درون قطره‌ی مایع نیز سرعتی القا می‌شود و در نتیجه در مرز مشترک سرعتی وجود دارد که می‌توان آن را توسط شرط مرزی لغزش مدل‌سازی کرد. در کنار این کاربرد، مطالعه‌ی این مسئله به‌لحاظ بنیادی نیز اهمیت به‌سزایی دارد؛ زیرا اثر شرط مرزی جریان خزشی روی ذره بر روی دینامیک ذرات را بررسی می‌کند. نوآوری پژوهش حاضر در نظر گرفتن شرط چسبش - لغزش مخلوط روی سطح ذرات است که برای نخستین بار انجام می‌شود.

۲. فرضیات، تئوری و معادلات حاکم

در این نوشتار، جریان تراکم‌ناپذیر یک سیال نیوتنی که معادلات حاکم بر آن معادلات ناویر - استوکس است، در نظر گرفته شده است.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} \quad (2)$$

$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ میدان برداری سرعت سیال، $P(\mathbf{x}, t)$ میدان فشار، ν لزجت سینماتیکی سیال، و ρ چگالی سیال است.

معادلات ناویر - استوکس، جریان سیال حامل را توصیف می‌کنند. اما در جریان‌های آشفتگی حاوی ذرات، علاوه بر روابط ۱ و ۲ برای توصیف جریان، به معادله‌ی بنیادی برای حرکت یک ذره نیز نیاز است. این معادله اثر جریان بر ذره را که به عدد رینولدز ذرات بستگی دارد، توصیف می‌کند و به‌صورت زیر است:

$$\text{Re}_p = \frac{d \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{f@p}\|}{\nu} \quad (3)$$

d قطر ذره، \mathbf{u}_p سرعت ذره و $\mathbf{u}_{f@p}$ سرعت سیال حامل در غیاب ذره است که سرعت سیال مشاهده شده توسط ذره نامیده می‌شود. Re_p پیچیدگی جریان را مشخص می‌کند و هر چه مقدار Re_p بزرگتر باشد، جریان پیچیده‌تر خواهد بود. به‌دست آوردن یک معادله‌ی بنیادی برای حرکت یک ذره تنها غوطه‌ور در سیال حامل با Re_p خیلی کوچک، حدود یک قرن طول کشید. این معادله را معادله‌ی مکسی - رایلی می‌نامند که فرم کامل آن در سال ۱۹۸۳ استخراج شد.^[۱۵] فرم ساده‌شده‌ی معادله‌ی مکسی - رایلی که از قانون دوم نیوتن به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر است:

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{C_D \text{Re}_p}{24 \tau_p} (\mathbf{u}_{f@p} - \mathbf{u}_p) \quad (4)$$

C_D ضریب درگ، و تابع عدد رینولدز است. τ_p نیز زمان آرامش ذره^۸ است. برای اعداد رینولدز بالا، باید از تصحیحات تجربی برای معادله‌ی مکسی - رایلی استفاده شود. در پژوهش حاضر که شرط مرزی روی ذرات، شرط چسبش - لغزش مخلوط است، ضریب مقاومت علاوه بر تابع عدد رینولدز بودن، تابع یک مقدار بی‌بعد دیگر به نام عدد تروستل نیز هست. تروستل با نوشتن معادلات بقای تکانه و قوانین اول و دوم ترمودینامیک برای محدوده‌ی مرزی در شرایط آیزن‌تروپیک به این نتیجه رسید که سیال باید روی مرز بلغزد. برای شرط مرزی لغزش، او پیشنهاد داد که حاصل ضرب تنش برشی و سرعت نسبی دیوار و سیال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. تروستل این سرعت غیر صفر روی مرز را سرعت لغزش سیال روی سطح نامید.

در اینجا C ، D و P به ترتیب، جمله‌های جابه‌جایی، نفوذ، و فشار در معادله‌ی ناویر - استوکس هستند. با انتگرال‌گیری صریح اویلری نسبت به زمان از معادله‌ی ۳۶ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{U}^{n+1} = U^n + \Delta t [C^n + D^n + P^n] \quad (37)$$

که در آن \tilde{U}^{n+1} میدان سرعت لحظه‌ی درگام زمانی بعدی و U^n میدان سرعت لحظه‌ی درگام زمانی فعلی است. از آنجا که دیورژانس این میدان سرعت الزاماً صفر نیست، باید از فشار به صورت ضمنی درگام زمانی بعدی برای به دست آوردن میدان سرعت U^{n+1} استفاده شود:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t [C^n + D^n + P^{n+1}] \quad (38)$$

حال اگر دو رابطه‌ی ۳۷ و ۳۸ از یکدیگر کم شوند، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$U^{n+1} - \tilde{U}^{n+1} = \Delta t [P^{n+1} - P^n] = \Delta t \cdot dP^{n+1} \quad (39)$$

با دیورژانس گرفتن از دو طرف رابطه‌ی ۳۹ و همچنین با به کار گرفتن رابطه‌ی $\nabla \cdot U^{n+1} = 0$ به دست می‌آید:

$$-\nabla \cdot \tilde{U}^{n+1} = \Delta t \nabla \cdot dP^{n+1} \quad (40)$$

عبارت dP^{n+1} در رابطه‌ی ۴۰ وابسته به گرادیان اصلاح فشار است که از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$dP^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla dP^{n+1} \quad (41)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۴۱ در رابطه‌ی ۴۰ معادله‌ی پواسون حاصل می‌شود:

$$\nabla^2 dP^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{U}^{n+1} \quad (42)$$

با حل این معادله جمله‌ی اصلاحی فشار به دست می‌آید. بنابراین، فشار و میدان سرعت درگام زمانی جدید توسط روابط زیر اصلاح می‌شوند:

$$P^{n+1} = P^n + dP^{n+1} \quad (43)$$

$$U^{n+1} = \tilde{U}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla dP^{n+1} \quad (44)$$

الگوریتم این روش برای حل معادلات ناویر - استوکس به صورت زیر است:

۱. محاسبه‌ی میدان سرعت مشروط با استفاده از رابطه‌ی ۳۷؛

۲. حل معادله‌ی پواسون برای محاسبه‌ی تصحیح فشار ۴۰؛

۳. اصلاح میدان فشار و میدان سرعت به ترتیب با استفاده از روابط ۴۳ و ۴۴.

انتگرال‌گیری نسبت به زمان با استفاده از طرح رانگ - کوتای مرتبه‌ی سه در این پژوهش استفاده شده است. حل معادله‌ی پواسون در حل‌گر جریان تراکم‌ناپذیر، یعنی مرحله‌ی دوم این الگوریتم، از نظر محاسباتی پرهزینه‌ترین مرحله است. این حل‌گر برای گسسته‌سازی از روش تفاضل محدود^{۱۰} مرتبه‌ی دوم مرکزی روی یک شبکه جابه‌جا شده استفاده می‌کند. در پژوهش حاضر، برای ایجاد جریان آشفته‌ی همسان‌گرد اجباری، از روش بارگذاری پیشنهادی لاندگرن، که یک الگوی خطی است، استفاده می‌شود.^[۲۰، ۱۹] در این روش، با اضافه کردن یک عبارت نیرو به سمت راست معادله‌ی ناویر - استوکس و انرژی دادن به سیستم از مستهلک شدن جریان آشفته

جلوگیری می‌شود. در واقع، این نیرو مقدار نیرویی را که توسط گردابه‌های کوچک مستهلک می‌شود، جبران می‌کند. این عبارت اضافه شده از حاصل ضرب یک ثابت b در بردار سرعت U به دست می‌آید. به این ترتیب معادله‌ی ناویر - استوکس در جریان همگن همسان‌گرد که دچار استهلاک نمی‌شود، به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta U + bU \quad (45)$$

۳.۲. گردابه‌ها

ایده‌ی وجود گردابه به اندازه‌ی موضوع هیدرودینامیک قدیمی است؛ اما تاکنون تعریف دقیقی برای گردابه‌ها بیان نشده است. با این حال، با استفاده از مفهوم گردابه می‌توان بسیاری از پدیده‌های فیزیکی که در جریان آشفته رخ می‌دهد، توصیف کرد. مطالعه‌ی دینامیک گردابه‌ها، صرفاً برای درک پدیده‌های جریان آشفته مانند انتقال جرم و حرارت، واکنش‌های شیمیایی و احتراق، مقاومت و... نیست بلکه یک مدل خوب و قابل‌دستیابی برای جریان آشفته است.^[۲۱] روش‌های مختلفی برای توصیف و به‌تصویرکشیدن گردابه‌ها و جریان آشفته وجود دارد. طبق تعریف لمب در سال ۱۹۴۵، یک گردابه را می‌توان به صورت یک لوله که سطح این لوله را خطوط گردابه می‌سازند، توصیف کرد.^[۲۲] لاگت در سال ۱۹۷۹، گردابه را انبوهی از ذرات ماده، که حول یک مرکز مشترک می‌چرخند، توصیف کرد.^[۲۳]

بر اساس تعریف چانگ و همکاران، گردابه ناحیه‌ی است که در آن مقادیر ویژه‌ی تانسور گرادیان سرعت مختلط هستند^[۲۴] در حالی که هانت و همکاران گردابه را ناحیه‌ی معرفی می‌کنند که هم در آن نامتغیرهای دوم تانسور گرادیان سرعت مثبت باشند و هم فشار کم باشد.^[۲۵] بر اساس این تعاریف، روش‌های متنوعی برای نمایش جریان آشفته‌ی تراکم‌ناپذیر و گردابه‌ها ارائه شد. در این جا معیار Q بر مبنای تعریف هانت ارائه می‌شود. در این روش ابتدا نامتغیر دوم تابع گرادیان سرعت بر اساس نرخ چرخش و کرنش با استفاده از رابطه‌ی ۴۶ تعریف می‌شود.

$$Q = \frac{1}{4} (\omega^2 - 2S^2) \quad (46)$$

که S تانسور نرخ کرنش و ω بردار سرعت زاویه‌ی است. همان‌طور که در رابطه‌ی ۴۶ نشان داده شده است، با انجام محاسبات ریاضی، می‌توان نشان داد که نامتغیر دوم گرادیان سرعت برابر با نصف لاپلاسیان فشار است.

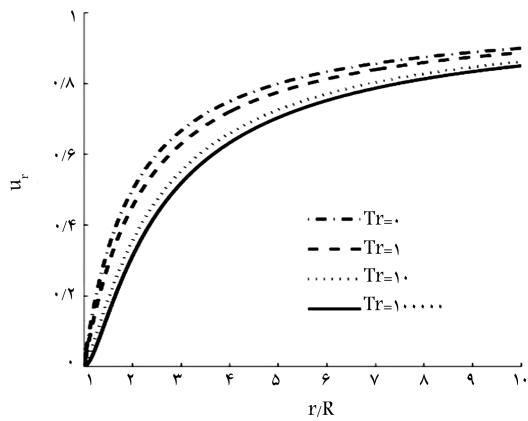
$$Q = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho} \omega_i \omega_i - 2S_{ij} S_{ij} \right) = \frac{-1}{4} \left(S_{ij} + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \omega_k \right) \left(S_{ij} + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \omega_k \right) = \frac{-1}{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{-1}{4} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{-1}{4} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) = \frac{1}{4} \Delta P \quad (47)$$

که ε نماد جایگشت، ρ چگالی سیال، و P فشار است.

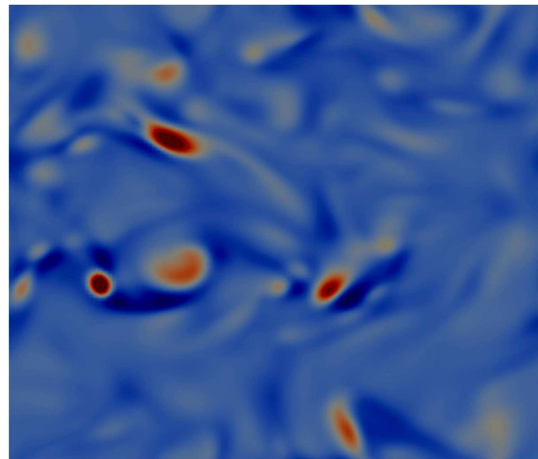
درون گردابه‌ها مقدار لاپلاسیان فشار همواره مثبت خواهد بود. بنابراین، کمینه‌ی فشار زمانی اتفاق می‌افتد که نامتغیر دوم تانسور گرادیان سرعت، مثبت باشد.^[۲۶] در شکل ۲ جریان آشفته‌ی سیال و گردابه‌های درون آن با معیار Q نمایش داده شده‌اند. در نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها بیشتر حضور دارند.

۴.۲. نتایج

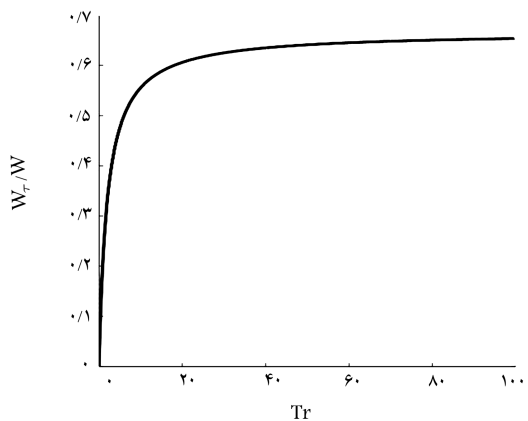
در این بخش، نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان خزشی حول کره با شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات ارائه می‌شود.



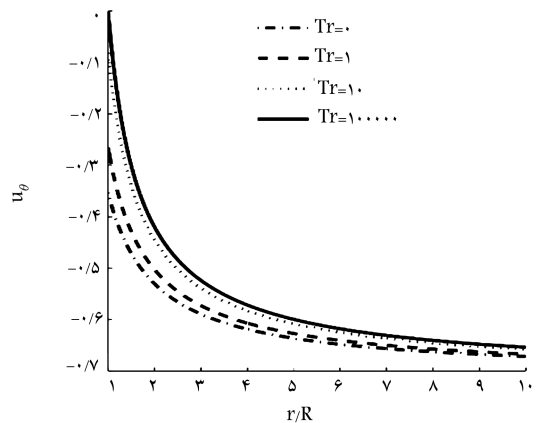
شکل ۴. سرعت شعاعی حول کره در زاویه $\pi/4$.



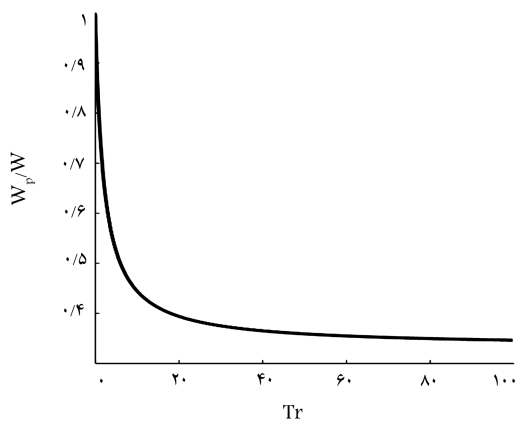
شکل ۲. نمایش گردابه‌های جریان آشفته با استفاده از معیار Q .



شکل ۵. نمودار تغییرات نسبت نیروی مقاومت اصطکاکی به مقاومت کل بر حسب عدد تروستل.



شکل ۳. سرعت مماسی حول کره در زاویه $\pi/4$.



شکل ۶. نمودار تغییرات نسبت نیروی مقاومت فشاری به مقاومت کل بر حسب عدد تروستل.

حسب مقیاس میکروبی تیلور $Re_\lambda = 32$ است. [۲۷] در ابتدا ذرات به طور یکنواخت در یک مکعب که اندازه‌ی آن یک درصد مکعب حاوی جریان است، با سرعت اولیه‌ی صفر در مرکز مکعب حاوی جریان قرار دارند. با گذشت زمان، جریان آشفتگی ذرات را در مکعب دوره‌ی پخش می‌کند و ابری از ذرات را به وجود می‌آورد. در شکل‌های ۷ تا ۱۰ می‌توان ابرذرات را در جریان آشفتگی در عدد استوکس $St = 1$ و برای اعداد تروستل مختلف در زمان $t = 25$ مشاهده کرد. عدد استوکس نسبت

۱.۴.۲. نتایج حاصل از حل تحلیلی جریان خزشی حول کره با شرط مرزی

چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات

در شکل ۳ سرعت مماسی حول کره در زاویه $\pi/4$ نشان داده شده است؛ همان‌طور که انتظار می‌رود سرعت مماسی روی سطح کره با افزایش عدد تروستل به صفر میل می‌کند. در شکل ۴ سرعت شعاعی حول کره در زاویه $\pi/4$ نمایش داده شده است. در این نمودار می‌توان ارضاشدن شرط عدم نفوذ روی سطح کره را مشاهده کرد. سهم نیروهای مقاومت اصطکاکی و فشاری نیز بر حسب تغییرات عدد تروستل در شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود. در حالت عدم لغزش، نیروی مقاومت فشاری $1/3$ کل مقاومت را تشکیل می‌دهد. اما با کاهش عدد تروستل، سهم این نیرو به تدریج بیشتر می‌شود و در حالت لغزش کامل، تمام نیروی مقاومت از نوع فشاری خواهد بود. هم‌چنین در بررسی نیروی مقاومت اصطکاکی، در حالت عدم لغزش، $2/3$ کل نیروی مقاومت را به خود اختصاص می‌دهد. با کاهش عدد تروستل، سهم نیروی مقاومت اصطکاکی به تدریج کم می‌شود تا در حالت لغزش کامل به صفر می‌رسد.

۲.۴.۲. نتایج حاصل از شبیه‌سازی مستقیم عددی

در DNS ارائه‌شده، ابتدا یک جریان بدون ذره حل می‌شود تا زمانی‌که جریان کاملاً توسعه یافته به دست آید. پس از آن، ذرات به شبیه‌سازی اضافه می‌شوند. همه‌ی شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، با یک میدان اولیه‌ی آشفتگی شروع شده‌اند و عدد رینولدز بر

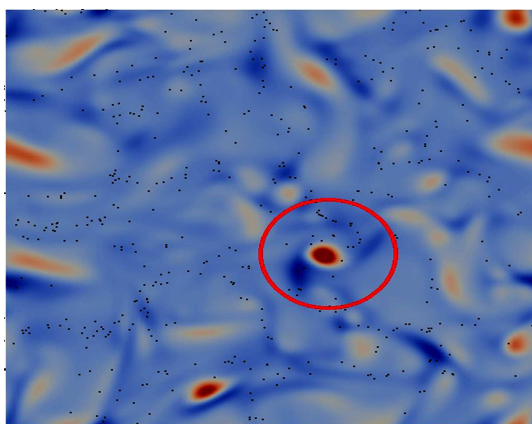
زمان آرامش ذرات به زمان آرامش سیال است و با رابطه‌ی ۴۸ تعریف می‌شود.

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{1}{18} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} \right) \left(\frac{d_p}{\eta_k} \right)^2 \quad (48)$$

ρ_p چگالی ذرات، ρ_f چگالی سیال، d_p قطر ذرات، و η_k مقیاس طولی کولموگروف است. زمان آرامش سیال τ_f با داشتن سرعت و طول مشخصه به دست می‌آید و همان مقیاس زمانی کولموگروف است.^[۲۸]

$$\tau_f = \frac{L_0}{u_0} \quad (49)$$

که L_0 طول بزرگ‌ترین مقیاس جریان آشفتگی و u_0 سرعت آن است.^[۲۹] ذرات به دلیل نیروی گریز از مرکز و مقاومت استوکس در نواحی با چرخش (ورتیسیته) کم و نرخ کرنش بالا تجمع می‌یابند. به دلیل تنوع در مقیاس‌های جریان آشفتگی، یکی از روش‌های مهم مطالعه‌ی این جریان، روش‌های آماری است. برای نمایش دادن گردابه‌ها نیز از این روش استفاده می‌شود. در بخش ۳.۲. روش به تصویر کشیدن گردابه‌ها که معیار Q نام‌گذاری شده بود، توضیح داده شد. این روش به‌طور کامل نمی‌تواند شرط کمینه‌بودن فشار در گردابه‌ها را تضمین کند، با این حال برای نمایش گردابه‌ها روش مناسبی به نظر می‌رسد. در اینجا نیز با استفاده از این روش، وجود گردابه‌ها و فرار ذرات پراکنده در سیال از آنها به دلیل نیروی گریز از مرکز در شکل‌های ۱۱ تا ۱۶ نمایش داده شده است. از آنجا که در تمام شبیه‌سازی‌های انجام شده، شرایط اولیه یکسان بوده است و در این پژوهش با در نظر گرفتن کوپلینگ یک‌راهه از اثر ذرات بر جریان سیال چشم‌پوشی شده است، معیار Q در تمام لحظات برای تمام شبیه‌سازی‌ها یکسان خواهد بود. در این بخش، به دلیل رفتار آشفتگی ذرات و تلاش برای نمایش فرار ذرات از گردابه‌ها از تصاویر لحظه‌ی در زمان‌های یکسان استفاده نشده است. همچنین از ۱۰۰ هزار ذره استفاده شده است تا حرکت ذرات به خوبی مشاهده شود. همان‌طور که در شکل‌های ۱۱ تا ۱۶ مشاهده می‌شود ذرات در ابتدا در نزدیکی گردابه قرار دارند و پس از آن از گردابه دور می‌شوند و در نواحی که شدت گرداب بیشتر است، کمتر حضور خواهد داشت. لحظه‌های انتخاب شده در شکل‌ها صرفاً به منظور نمایش و درک درست از رفتار ذرات در نزدیکی گردابه‌ها در صفحه‌ی $y-z$ هستند.



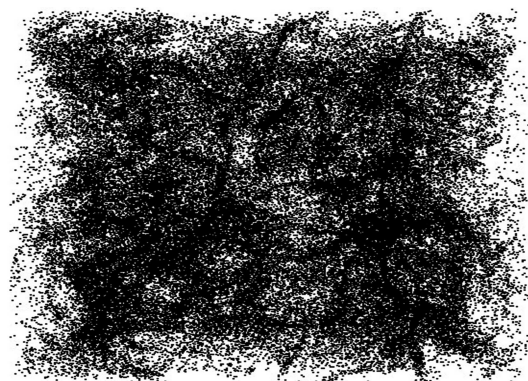
شکل ۱۱. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال هستند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی ۳۳/۲۵ در نزدیکی گردابه قرار گرفته‌اند ($Tr = 0, St = 0.7$).



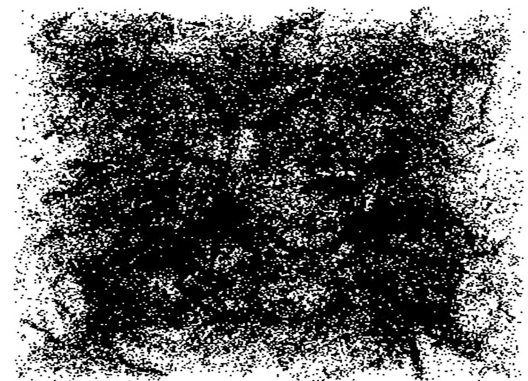
شکل ۷. ابر ذرات در $Tr = 0$ و در زمان $t = 25$.



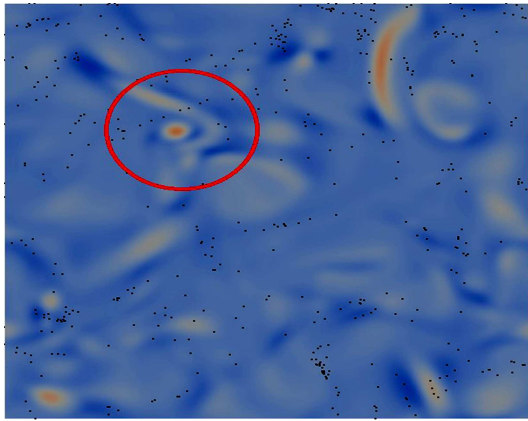
شکل ۸. ابر ذرات در $Tr = 1$ و در زمان $t = 25$.



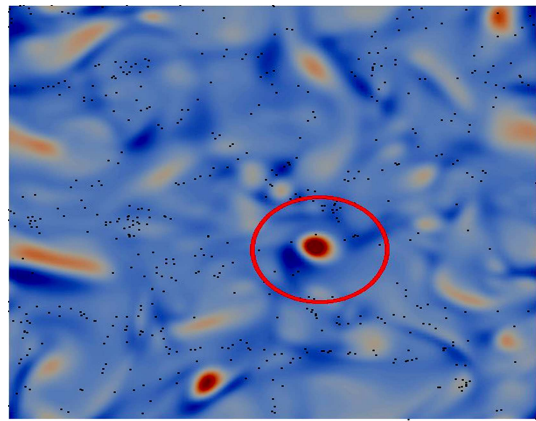
شکل ۹. ابر ذرات در $Tr = 10$ و در زمان $t = 25$.



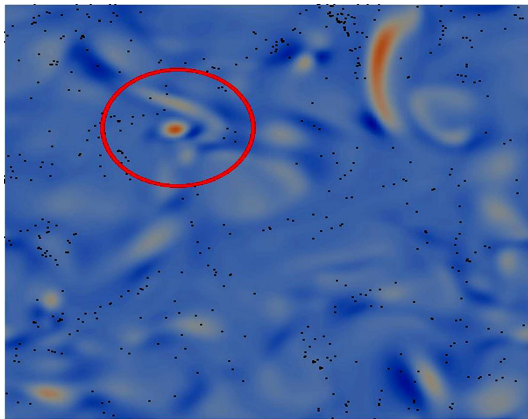
شکل ۱۰. ابر ذرات در $Tr = 10000$ و در زمان $t = 25$.



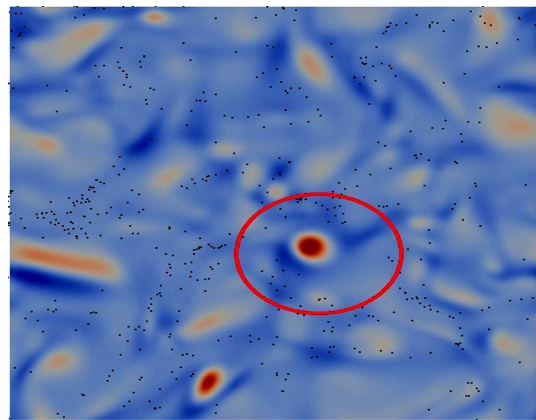
شکل ۱۵. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال اند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی $41/5$ در حال دور شدن از گردابه هستند ($Tr = 100000, St = 0.7$).



شکل ۱۲. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال هستند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی $5/33$ در حال دور شدن از گردابه هستند ($Tr = 0, St = 0.7$).



شکل ۱۶. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال اند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی $41/65$ از گردابه کاملاً دور شده‌اند و در نواحی که چرخش کمتر است (نواحی آبی رنگ) حضور بیشتری دارند ($Tr = 100000, St = 0.7$).

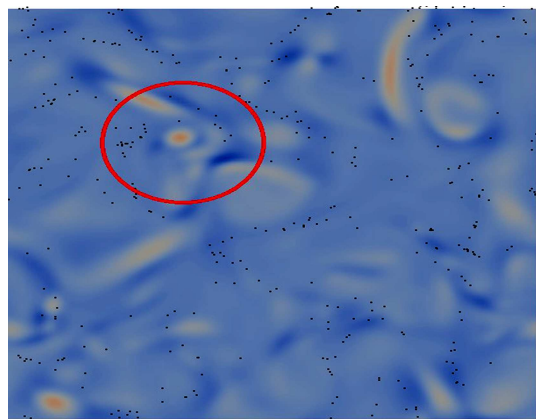


شکل ۱۳. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال اند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی $33/65$ از گردابه کاملاً دور شده‌اند و در نواحی که چرخش کمتر است (نواحی آبی رنگ) حضور بیشتری دارند ($Tr = 0, St = 0.7$).

با مشاهده‌ی شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که ذراتی که بر آنها شرط لغزش کامل برقرار است، با سرعت بیشتری به بیرون از گردابه پرت می‌شوند. دلیل این اتفاق را به سادگی می‌توان این‌گونه بیان کرد: با کاهش لغزش، اثر جریان بر ذرات و در نتیجه نیروی مقاومت ذرات کاهش می‌یابد. به این ترتیب، ذرات آزادانه‌تر حرکت خواهند کرد و نیروی گریز از مرکز گردابه بر آنها اثر بیشتری می‌گذارد و در نهایت ذرات با سرعت بیشتری به بیرون از گردابه فرار خواهند کرد.

۳. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، جریان آشفته‌ی حاوی ذرات با شرط مرزی چسبش - لغزش مخلوط روی ذرات بررسی شد. جریان آشفته‌ی همگن همسان‌گرد با شبیه‌سازی مستقیم عددی معادلات ناویر - استوکس حل شد و برای به دست آوردن میدان اجباری جریان آشفته از بارگذاری خطی پیشنهادی توسط لاندگرن استفاده شد. از حل تحلیلی



شکل ۱۴. کانتور رنگی با استفاده از معیار Q محاسبه شده است. نواحی قرمز رنگ گردابه‌ها را نشان می‌دهند. نقاط ریز سیاه رنگ ذرات پخش شده در سیال اند. در ناحیه‌ی مشخص شده در شکل، ذرات در لحظه‌ی $41/35$ در نزدیکی گردابه قرار گرفته‌اند ($Tr = 100000, St = 0.7$).

می‌شود که افزایش لغزش موجب کاهش غلظت ترجیحی ذرات می‌شود. با استفاده از معیار Q گردابه‌های جریان آشفتگی مشاهده نمود. با بررسی رفتار ذرات در نزدیکی گردابه‌ها به خوبی می‌توان مشاهده کرد ذرات در نواحی که گردابه‌ها وجود دارند، حضور کمتری دارند. همچنین می‌توان مشاهده کرد که با کاهش لغزش و در اعداد تروستل پایین، به دلیل کمتر بودن نیروی مقاومت ناشی از سیال و مستقل‌تر بودن ذرات از جریان سیال، ذرات با قدرت بیشتری به بیرون از گردابه‌ها پرتاب می‌شوند.

جریان خزشی حول کره با شرط لغزش یک فرمول تحلیلی برای نیروی مقاومت یک ذره ی کروی به دست آمد و سپس این فرمول در معادله‌ی مکسی - رایلی قرار داده شد. سرعت‌های لاگرانژی مورد نیاز در معادله‌ی مکسی - رایلی از درون‌یابی میدان سرعت اویلاری به دست آمده از DNS جریان آشفتگی محاسبه شده است. به این ترتیب، معادله‌ی مکسی - رایلی نیز به صورت عددی حل شد. در قسمت نتایج نیز ابر ذرات در اعداد تروستل مختلف و در $St = 1$ نمایش داده شد. به طور کیفی مشاهده

پانوشتها

1. direct numerical simulation
2. large-eddy simulation
3. stochastic turbulence model
4. Reynolds-averaged Navier-Stokes
5. national center for atmospheric research
6. root mean squares
7. Trostel
8. particle relaxation time
9. projection method
10. finite difference

منابع (References)

1. Orszag, S.A. and Patterson, G.S. "Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, **28**(2), pp. 76-79 (1972).
2. Moser, R.D. and Moin, P. "The effects of curvature in wall-bounded turbulent flows", *J. Fluid Mech.*, **175**, pp. 479-510 (1987).
3. Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D. "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, **177**, pp. 133-166 (1987).
4. Spalart, P.R. "Direct simulation of turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$ ", *J. Fluid Mech.*, **187**, pp. 61-98 (1988).
5. Eggels, J.G.M., Unger, F., Weiss, M.H., Westerweel, J., Adrian, R.J., Friedrich, R. and Nieuwstadt, F.T.M. "Fully developed turbulent pipe flow: A comparison between direct numerical simulation and experiment", *J. Fluid Mech.*, **268**, pp. 311-341 (1994).
6. Riley, J.J. and Patterson, G.S. "Diffusion experiment with numerically integrated isotropic turbulence", *Phys. Fluids*, **17**(2), pp. 292-297 (1974).
7. Maxey, M.R. "The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields", *J. Fluid Mech.*, **174**, pp. 441-465 (1987).
8. Elghobashi, S. "Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models", *Appl. Sci. Res.*, **48**(3), pp. 301-314 (1991).
9. Zhang, H. and Ahmadi, G. "Aerosol particle transport and deposition in vertical and horizontal turbulent duct flows", *J. Fluid Mech.*, **406**, pp. 55-80 (2000).
10. Narayanan, C., Lakehal, D., Botto, L. and Soldati, A. "Mechanisms of particle deposition in a fully developed turbulent open channel flow", *Phys. Fluids*, **15**(3), pp. 763-775 (2003).
11. Arcen, B., Tani'ere, A. and Oesterle, B. "On the influence of near-wall forces in particle-laden channel flows", *Intl. J. Multiphase Flow*, **32**(12), pp. 1326-1339 (2006).
12. Milici, B., Marchis, M.D., Sardina, G. and Napoli, E. "Effects of roughness on particle dynamics in turbulent channel flows: A DNS analysis", *J. Fluid Mech.*, **739**, pp. 465-478 (2013).
13. Good, G.H., Ireland, P.J., Bewley, G.P., Bodenschatz, E., Collins, L.R. and Warhaft, Z. "Settling regimes of inertial particles in isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.*, **759**, R3 (2014).
14. Atefi, G. "Analytische lösung der oseenschen differentialgleichung des quer angeströmten drehenden Zylinders bei Schlupf", PhD Thesis, Technische Universität Berlin (1990).
15. Maxey, M.R. and Riley, J.J. "Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow", *Phys. Fluids*, **26**(4), pp. 883-889 (1983).
16. Atefi, G. "Quer angeströmter drehender Zylinder bei kleinen Reynoldszahlen und bei Schlupf", *Arch. Appl. Mech.*, **61**(6), pp. 488-502 (1991).
17. Chorin, A.J. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", *Math. Comp.*, **22**(104), pp. 745-762 (1968).
18. Temam, R. "Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **33**(5), pp. 377-385 (1969).
19. Lundgren, T.S. "Linearly forced isotropic turbulence, center for turbulence research, annual research briefs", NASA-Ames Research Center and Stanford University, pp. 461-473 (2003).
20. Rosales, C. and Meneveau, C. "Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: Pphysical space implementations and convergence properties", *Phys. Fluids*, **17**(9), pp. 095106 (2005).
21. Hussain, F. and Melander, M.V. "Understanding turbulence via vortex dynamics", In *The Lumley Symposium: Studies in Turbulence*, New York, Springer, pp. 157-178 (1991).

22. Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th Edition, New York, Dover Publications (1945).
23. Lugt, H.J. "The dilemma of defining a vortex", In *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics*, New York, Springer, pp. 309-321 (1979).
24. Chong, M.S., Perry, A.E. and Cantwell, B.J. "A general classification of three-dimensional flow field", *Phys. Fluids*, **2**(5), pp. 765-777 (1990).
25. Hunt, J.C.R., Wray, A.A. and Moin, P. "Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows", *Center for Turbulence Research Report*, CTR-S88, pp. 193-208 (1988).
26. Dubief, Y. and Delcayre, F. "On coherent-vortex identification in turbulence", *J. of Turbul.*, **1**(1), pp. 11-32 (2000).
27. Pope, S.B., *Turbulent Flows*, Cambridge, Cambridge University Press (2000).
28. Tennekes, H. and Lumley, J., *A First Course in Turbulence*, Cambridge, MIT Press (1972).
29. Kolmogorov, A.N. "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**(4), pp. 301-305 (1941).

حاصل می‌شود:

$$\omega_\phi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad (12)$$

معادله ۱۲ را می‌توان به صورت معادله‌ی بای‌هارمونیک یعنی $\Delta \Delta \psi = 0$ نیز نوشت.

برای حل معادله‌ی مرتبه چهارم ۱۲ به چهار شرط مرزی نیاز است که به صورت زیر تعریف می‌شوند. در اینجا سه شرط مرزی تعریف شده است و شرط چهارم که شرط مرزی لغزش روی کره را بیان می‌کند، در ادامه معرفی می‌شود:

$$\psi(r=R, \theta) = 0 \quad (13)$$

$$u_r(r=R, \theta) = 0 \quad (14)$$

$$\psi(r \rightarrow \infty, \theta) = \frac{1}{4} U_\infty r^2 \sin^2 \theta \quad (15)$$

تنش برشی نیز در مختصات کره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (16)$$

از آنجایی که تنش برشی روی سطح کره محاسبه می‌شود، بر روی سطح کره داریم:

$$u_r|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right|_{r=R} = 0 \quad (17)$$

پس با توجه به این روابط، معادله‌ی تنش برشی ۱۶ به صورت زیر در می‌آید:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(-\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (18)$$

برای بی‌بعد کردن رابطه‌ی تنش برشی از دو تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{u}_\theta = \frac{u_\theta}{U_\infty} \quad (19)$$

از برابر قرار دادن معادلات ۱۸ و ۵ و جای‌گذاری تعاریف ۱۹ در این معادلات، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = \frac{\lambda R}{\mu} \tilde{u}_\theta + \tilde{u}_\theta = \left(\frac{\lambda R}{\mu} + 1 \right) \tilde{u}_\theta \quad (20)$$

پیوست

برای یک ذره‌ی کره‌ای که در جریان آشفته قرار دارد و جریان با سرعت U_∞ از روی آن عبور می‌کند، می‌توان شکل و مختصات کره‌ی را مانند شکل ۱۷ در نظر گرفت. برای جریان سه‌بعدی، پایا، متقارن محوری و حول یک ذره‌ی کوچک (با عدد رینولدز پایین)، می‌توان رابطه‌های ۱ و ۲ حاکم بر جریان را به رابطه‌ی زیر برای جریان خزشی کاهش داد:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \mathbf{U} \quad (7)$$

با کرل گرفتن از رابطه‌ی ۷ به رابطه‌ی زیر برای میدان برداری چرخش ω می‌رسیم:

$$\Delta \omega = 0 \quad (8)$$

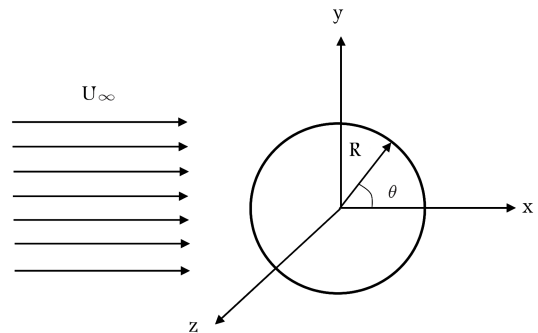
با توجه به کرولی بودن ذرات و وجود جریان متقارن محوری، از سیستم مختصات کره‌ای متقارن محوری استفاده کرده‌ایم که در آن روابط زیر صادق هستند:

$$\omega_r = \omega_\theta = 0, \quad \omega_\phi \neq 0 \quad (9)$$

مؤلفه‌های سرعت را در دستگاه مختصات کره‌ای می‌توان با استفاده از یک تابع جریان $\psi(r, \theta)$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (10)$$

با جای‌گذاری چرخش در مختصات کره‌ای، رابطه‌ی ۱۱، در رابطه‌ی ۸، رابطه‌ی ۱۲



شکل ۱۷. نمایش هندسه‌ی مسئله و مختصات هندسی متقارن محوری.

با جای‌گذاری روابط ۲۶ و ۲۷ در رابطه‌ی ۲۸ و حل معادله‌ی دیفرانسیل، رابطه‌ی فشار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = -\frac{3R\mu U_\infty \cos \theta}{2r^2} \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} + P_\infty \quad (29)$$

نسبت فشار در حالت عدم لغزش به حالت لغزش کامل، برابر ۱/۵ است.

$$\frac{P(\text{Tr} \rightarrow \infty) - P_\infty}{P(\text{Tr} \rightarrow 0) - P_\infty} = \frac{3}{2} = 1.5 \quad (30)$$

نیروی مقاومت کلی روی سطح کره از دو بخش نیروی فشاری و برشی تشکیل شده است که با انتگرال‌گیری روی سطح کره داریم:

$$W = 6\pi\mu R U_\infty \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} \quad (31)$$

به همین ترتیب می‌توان نیروی مقاومت ناشی از فشار و تنش برشی را به دست آورد. نسبت میان نیروی مقاومت کلی و نیروهای مقاومت ناشی از تنش فشاری و تنش برشی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{W_p}{W} = \frac{1}{3} \frac{\text{Tr} + 6}{\text{Tr} + 2}, \quad \frac{W_\tau}{W} = \frac{2}{3} \frac{\text{Tr}}{\text{Tr} + 2} \quad (32)$$

هنگامی که $\text{Tr} \rightarrow \infty$ ، رابطه‌ی ۳۲ با نتایج حل استوکس حول کره با شرط مرزی عدم لغزش روی سطح کره یکسان می‌شوند. ضریب مقاومت نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$C_D = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \pi R^2} = \frac{24}{\text{Re}_p} \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} \quad (33)$$

که ضریب مقاومت در دو حالت عدم لغزش و لغزش کامل نیز به صورت زیر بیان می‌شود. در این جا نیز، ضریب مقاومت در حالت عدم لغزش، با ضریب مقاومت به دست آمده از حل استوکس برابر است:

$$\text{Tr} \rightarrow \infty \quad C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} \quad (34)$$

$$\text{Tr} \rightarrow 0 \quad C_D = \frac{16}{\text{Re}_p} \quad (35)$$

در حالی که بدون انجام بی‌بعدسازی، از برابری روابط ۱۸ و ۵، معادله‌ی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$R \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Big|_{r=R} = (\text{Tr} + 1) u_\theta \Big|_{r=R} \quad (21)$$

چنانچه از u_θ مشتق گرفته و در رابطه‌ی ۲۱ جای‌گذاری شود، می‌توان به شرط مرزی لغزش روی مرکز کره رسید:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \Big|_{r=R} = \frac{\text{Tr} + 2}{R} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (22)$$

با روش جداسازی متغیرها یک رابطه به شکل زیر برای تابع ψ تعریف می‌شود:

$$\psi(r, \theta) = f(r)g(\theta) \quad (23)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۲۳ در رابطه‌ی ۱۲ می‌توان ψ را به صورت زیر داشت:

$$\psi = \left(Ar^4 + Br^2 + Cr + \frac{D}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (24)$$

با اعمال شرایط مرزی روی رابطه‌ی ۲۴، ثابت A, B, C و D تعیین و تابع جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\psi = \left(\frac{1}{2} U_\infty r^2 - \frac{3}{4} \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} R U_\infty r + \frac{\text{Tr}}{\text{Tr} + 3} \frac{R^2 U_\infty}{4r} \right) \sin^2 \theta \quad (25)$$

با داشتن تابع جریان ψ می‌توان مؤلفه‌های سرعت را نیز از رابطه‌ی ۱۰ محاسبه کرد:

$$u_r = \left(\frac{1}{2} U_\infty - \frac{3}{4} \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} \frac{R}{r} U_\infty + \frac{\text{Tr}}{\text{Tr} + 3} \frac{R^2 U_\infty}{4r^2} \right) 2 \cos \theta \quad (26)$$

$$u_\theta = - \left(U_\infty + \frac{3}{4} \frac{\text{Tr} + 2}{\text{Tr} + 3} \frac{R}{r} U_\infty - \frac{\text{Tr}}{\text{Tr} + 3} \frac{R^2 U_\infty}{4r^2} \right) \sin \theta \quad (27)$$

همچنین می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۷ در دستگاه مختصات کروی، فشار را نیز محاسبه کرد:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \quad (28)$$