

سنتر و تحلیل یک گروه جدید از مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با استفاده از نظریه تبدیلات خطی و نظریه پیچ

اسماعیل رستمی (کارشناس ارشد)

مهدی طالع ماسوله* (استادیار)

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران

مهندسی مکانیک شریف، پاییز ۱۳۹۶ (۴۱-۲۷)
دوری ۳-۳۳، شماره ۲، ص. ۴۱-۲۷

در این مقاله با استفاده از ترکیب نظریه تبدیلات خطی و نظریه پیچ به سنتر یک گروه از مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی موازی پرداخته شده است. نظریه پیچ یکی از معیارهای حرکتی است که برای تعیین درجات آزادی و سنتر شاخه‌های مکانیزم‌ها استفاده می‌شود. مکانیزم‌های سنتر شده دارای الگوهای حرکتی شامل سه درجه آزادی حرکتی دورانی و یک درجه آزادی حرکتی انتقالی (۳R۱T)، دو درجه آزادی حرکتی دورانی و دو درجه آزادی حرکتی انتقالی (۲R۲T)، و سه درجه آزادی حرکتی انتقالی و یک درجه آزادی حرکتی دورانی (۳T۱R) هستند. مکانیزم‌های سنتر شده با استفاده از نظریه پیچ تحلیل شدند. سپس الگوی حرکتی هر مکانیزم بررسی شد و ماتریس ژاکوبین مربوط به مکانیزم‌ها به دست آمد. تحلیل‌ها نشان‌دهنده این بود که مکانیزم‌ها درجات آزادی و الگوهای حرکتی مورد نظر را دارند. ماتریس‌های ژاکوبین بیان‌کننده استقلال حرکتی قابل قبول این مکانیزم‌ها بود.

واژگان کلیدی: مکانیزم موازی، نظریه تبدیلات خطی، نظریه پیچ، سنتر نوعی.

esmaeil.rostami@ut.ac.ir
m.t.masouleh@ut.ac.ir

۱. مقدمه

امروزه با رشد روزافزون صنعت و تکنولوژی، نیاز به استفاده از ادوات با کارایی بالاتر و سرعت و دقت بیشتر، بیش از پیش احساس می‌شود. از این رو، گرایش به ربات‌ها و مکانیزم‌ها بسیار است. مکانیزم‌های موازی^۱ نیز از این قاعده مستثنی نیستند و گرایش به آن‌ها به علت ویژگی‌هایی که دارند هر روز بیشتر می‌شود. یک مکانیزم موازی، مکانیزمی با چند درجه آزادی^۲ است که از یک مجری نهایی^۳ و یک پایه تشکیل شده است که از اتصال موازی حداقل دو شاخه^۴ سینماتیکی سری، ایجاد می‌شود.^[۱] این زنجیره‌های سری، شاخه نامیده می‌شوند. در مکانیزم‌های موازی معمولاً اتصالات محرک نزدیک یا روی پایه قرار می‌گیرند. ربات‌های موازی نسبت به مکانیزم‌های سری دارای چندین مزیت آشکار هستند. مکانیزم‌های موازی به دلیل دارا بودن چند حلقه‌ی بسته سینماتیکی، سختی بالاتری دارند. از این رو، صلبیت و نسبت تحمل نیرو به وزن بیشتری در مقایسه با مکانیزم‌های سری دارند.^[۲] علاوه بر این، مکانیزم‌های موازی می‌توانند سرعت و شتاب‌های بیشتری را تحمل کنند. مهم‌ترین ضعف مکانیزم‌های موازی، محدودیت در فضای کاری^۵ آن‌هاست که علت این مورد اغلب تداخلات مکانیکی است. ضمن اینکه این ربات‌ها در فضای کاری خود دارای نقاط تکین^۶ متعددی هستند و در موقعیت‌های تکین سختی خود را از دست می‌دهند.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۹/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۵/۵/۳۰، پذیرش ۱۳۹۵/۶/۱۶.

مکانیزم‌های موازی امروزه دارای کاربردهای متفاوتی هستند و روز به روز به این کاربردها افزوده می‌شود. این مکانیزم‌ها در زمینه‌هایی همچون شبیه‌سازی،^[۳] وسایل چرخش دوربین،^[۴] وسایل هپتیک،^[۵] ابزار اندازه‌گیری،^[۶] ربات‌های پزشکی^[۶] و مکانیزم‌های نانو و میکرو^[۷] استفاده می‌شوند. از این رو نیاز است که در هر زمینه، متناسب با آن کاربرد مکانیزم‌هایی سنتر و طراحی شوند.

بیشتر مطالعات و تحقیقات پیشین انجام شده، بر روی مکانیزم‌های موازی ۶ درجه آزادی فضایی و ۳ درجه آزادی صفحه‌ی بوده است. اما در سال‌های اخیر مکانیزم‌های ۶ درجه آزادی محدود^۷ که تعداد درجات آزادی آن‌ها کمتر از ۶ است نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.^[۹] توجه به این‌گونه مکانیزم‌ها به این دلیل است که اگرچه مکانیزم‌های ۶ درجه آزادی را می‌توان در اکثر کاربردها مورد استفاده قرار داد، پیچیدگی آن‌ها مانع اصلی کاربرد گسترده‌شان است.^[۱۰] علاوه بر این استفاده غیرضروری از درجات آزادی، هم باعث اتلاف انرژی می‌شود و هم نیازمند به یک سیستم کنترل پیچیده برای مجری نهایی است. بنابراین، این ربات‌ها در مقایسه با مکانیزم‌های ۶ درجه آزادی دارای مزایایی همچون ساختار مکانیکی ساده‌تر، هزینه‌ی ساخت کمتر، الگوی کنترلی ساده‌تر، و در نتیجه سرعت حرکت بیشتری است.^[۱۱] همچنین، کاهش درجات آزادی موجب افزایش گستره‌ی حرکتی سایر درجات آزادی می‌شود. به همین دلیل، اخیراً گرایش به این مکانیزم‌ها برای کاربردهای مختلف بیشتر شده است؛ بنابراین، نیاز به طراحی و سنتر این مکانیزم‌ها و تحقیق در این زمینه احساس می‌شود.

در سال‌های اخیر از روش‌های متفاوتی برای سنتز مکانیزم‌های موازی استفاده شده است. در سال ۱۹۹۴ یک نمونه‌ی اولیه‌ی مکانیزم موازی به‌عنوان ماشین ابزار ارائه شد. این مکانیزم و تعداد زیادی از مکانیزم‌های ارائه‌شده بر پایه‌ی هگراپاد^۸ هستند. از دیگر مکانیزم‌هایی که ارائه شده است هگراگلاید^۹ است.^[۱۲] در مطالعه‌ی دیگری طراحی یک مکانیزم موازی ۳ درجه آزادی با سازه و سینماتیک ساده انجام شد که دارای فضای کاری بزرگ‌تری بود و در فضای کاریش تکینگی نداشت.^[۱۳] یک مکانیزم با توانایی پیکربندی مجدد^{۱۰} ارائه شد که می‌توانست به مکانیزم‌های ۳-۶ درجه آزادی تبدیل شود.^[۱۴]

محققان همچنین موفق به طراحی یک خانواده از مکانیزم‌های موازی ۳ درجه آزادی انتقالی فول ایزوتروپیک^{۱۱} شدند که در تمام راستاها دارای خواص یکسان است.^[۱۵] گوگو^{۱۲} بیش از سایر محققان به نظریه‌ی تبدیلات خطی^{۱۳} پرداخته است و در سال ۲۰۰۴ به طراحی مکانیزم‌های ۳ درجه آزادی تمام ایزوتروپیک با استفاده از این نظریه پرداخت.^[۱۶] پس از آن، در سال ۲۰۰۵ با استفاده از نظریه‌ی پیچه^{۱۴} طراحی گروهی از مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی^{۱۵} ۳ حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی انجام شد.^[۱۷] سپس گوگو با استفاده از نظریه‌ی تبدیلات خطی به سنتز مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی شونفلازیر^{۱۶} پرداخت که دارای ۳ درجه آزادی حرکت انتقالی و ۱ درجه آزادی حرکت دورانی هستند.^[۱۸] اما اولین مکانیزم موازی با شاخه‌های یکسان در سال ۲۰۰۱ طراحی شد که دارای الگوی ۳R۱T بود.^[۹] در سال ۲۰۰۲ نیز با استفاده از روش‌هایی مبتنی بر نظریه‌ی پیچه سنتز گروهی از مکانیزم‌های موازی ۵ درجه آزادی با شاخه‌های سینماتیکی یکسان انجام شد.^[۱۹] در سال ۲۰۰۵ با معرفی مفهوم زنجیره‌های مجازی، مکانیزم‌های موازی ۵ درجه آزادی را با توجه به حرکت مجری نهایی دسته‌بندی کردند و بر اساس همین اصل، یک روش برای سنتز مکانیزم‌ها ارائه شد.^[۲۰] با این روش مجموعه‌ی از مکانیزم‌های موازی با درجات آزادی و الگوهای حرکتی مختلف سنتز و طراحی شدند.^[۲۱-۲۳]

گوگو با استفاده از نظریه‌ی تبدیلات خطی به سنتز مکانیزم‌های موازی با حرکات مستقل پرداخت.^[۲۴] در سال ۲۰۰۴، گوگو با استفاده از نظریه‌ی تبدیلات خطی به طراحی مکانیزم‌های موازی با الگوی حرکتی ۳T۱R پرداخت که این مکانیزم‌ها نیز به‌صورت تمام ایزوتروپیک بودند.^[۲۵] او در همان سال به سنتز مکانیزم‌های موازی صفحه‌ی بیشینه‌ی مقید نیز پرداخت که دارای دو حرکت انتقالی صفحه‌ی و یک دوران بودند.^[۲۶] در سال ۲۰۰۵ مکانیزم‌های موازی با الگوی حرکتی شونفلازیر که در فضای کاریشان تکینگی نداشتند با استفاده از نظریه‌ی تبدیلات خطی سنتز شدند.^[۲۷] یک گروه از مکانیزم‌های موازی با الگوی حرکتی شامل ۲ حرکت انتقالی و دو حرکت دورانی نیز سنتز شدند.^[۲۸] گوگو در سال ۲۰۰۹ نیز با استفاده از نظریه‌ی تبدیلات خطی سنتز مکانیزم‌های موازی ۵ درجه آزادی با الگوی حرکتی شامل ۳ حرکت انتقالی و دو حرکت دورانی را انجام داد.^[۲۹] در همان سال روش‌هایی برای ایجاد مکانیزم‌های جابه‌جایی با ۲ و ۳ درجه آزادی با نظریه‌ی تبدیلات خطی ارائه شد.^[۳۰] در سال ۲۰۱۰ ساختارهایی برای مکانیزم‌های موازی صفحه‌ی ارائه شد.^[۳۱] همچنین گوگو در سال ۲۰۱۲ با استفاده از همین نظریه‌ی تبدیلات خطی به طراحی مکانیزم‌هایی با الگوی حرکتی شامل ۲ حرکت جابه‌جایی و یک حرکت دورانی به‌صورت صفحه‌ی و فضای پیچیده‌ی پرداخت که توسط محرک‌های واقع بر پایه‌ی مکانیزم کنترل می‌شدند.^[۳۲] در سال ۲۰۱۴ ساختارهایی برای مکانیزم‌های بیشینه‌ی مقید^{۱۷} ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی شونفلازیر ارائه شد.^[۳۳] مکانیزم‌هایی که گوگو ارائه کرده است شامل مکانیزم‌های ساده و مکانیزم‌های پیچیده است که مکانیزم‌های پیچیده در شاخه‌های خود حلقه‌های بسته‌ی سینماتیکی دارند.^[۳۴] سنتز ساختاری

یک گروه از مکانیزم‌های موازی ۵ درجه آزادی دارای محرک‌های کشویی بر روی پایه، نیز در سال ۲۰۱۰ ارائه شد.^[۳۵]

نوآوری اصلی این مقاله پرداختن به سنتز مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با استفاده از ترکیب نظریه‌ی تبدیلات خطی و نظریه‌ی پیچه است. در ساختار این مکانیزم‌ها از موازی نگار^{۱۸} های متشکل از ۴ اتصال لولایی بهره گرفته شده است و ساختارهای نوینی برای مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی ارائه می‌شود. همچنین با استفاده از نظریه‌ی پیچه به تحلیل مکانیزم‌ها پرداخته می‌شود که بدون مشتق‌گیری‌های پیچیده از معادلات سینماتیکی معکوس، ماتریس ژاکوبین مکانیزم حاصل می‌شود. همچنین، به بررسی استقلال حرکتی درجات آزادی مکانیزم‌های سنتز شده پرداخته شده است؛ امری که بدون استفاده از نظریه‌ی پیچه امکان‌پذیر نیست. در ادامه و در بخش دوم به توضیح نظریه‌ی تبدیلات خطی و منطق حاکم بر آن پرداخته می‌شود. سپس در بخش سوم توضیحاتی راجع به نظریه‌ی پیچه داده می‌شود و در بخش چهارم سنتز و تحلیل مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوهای حرکتی ۳T۱R، ۳T۲R و ۳R۱T بیان خواهد شد.

۲. نظریه‌ی تبدیلات خطی

تحرک یکی از عامل‌های اساسی در مکانیزم‌هاست. تحرک مکانیزم تعداد پارامترهای مستقل اتصالات لازم برای تعیین مکان یک نقطه واقع بر هر عضو مکانیزم است. حالت فضایی^{۱۹} نیز بیان‌کننده‌ی حرکات مستقل نسبی بین عضوهای مکانیزم است.^[۲۴] تحرک لحظه‌ی و تحرک کلی را می‌توان با استفاده از معیارها و معادلات مختلفی محاسبه کرد. تحرک کلی یک مقدار یکتا برای یک مکانیزم خاص است و یک پارامتر کلی برای یک مکانیزم در هر حالت کلی به‌جز حالات تکینه است. در حالی که تحرک لحظه‌ی، یک پارامتر محلی است و مشخصه‌ی مکانیزم در یک حالت داده‌شده شامل حالات تکینه است. در نقاط تکینه تحرک لحظه‌ی و تحرک کلی با هم متفاوت‌اند.^[۲۴]

یک معیار تحرک، در واقع یک رابطه بین تحرک و پارامترهای ساختاری مکانیزم مانند تعداد اعضا و اتصالات است. در اینجا به بررسی یک معیار برای به‌دست آوردن تحرک کلی پرداخته می‌شود که آن را نظریه‌ی تبدیلات خطی می‌نامند.^[۲۴] این نظریه، تحرک و حالت فضایی مکانیزم‌های موازی ساده و پیچیده را بدون به‌دست آوردن تحرک لحظه‌ی محاسبه می‌کند.^[۲۴]

یک زنجیره‌ی سینماتیکی بسته، زنجیره‌ی است که در آن هر عضو حداقل به دو عضو دیگر متصل باشد و یک زنجیره‌ی سینماتیکی باز، زنجیره‌ی است که در آن حداقل یک عضو وجود داشته باشد که فقط دارای یک اتصال است.^[۲۶]

بر اساس نظریه‌ی تبدیلات خطی، تحرک مکانیزم با m اتصال و $q \geq 1$ حلقه‌ی بسته‌ی مستقل، با اختلاف تعداد پارامترهای حرکتی مستقل اتصالات $\sum_{i=1}^m f_i$ قبل از بسته‌شدن حلقه و تعداد پارامترهای اتصالات که استقلال خود را در مکانیزم و با ایجاد حلقه‌های بسته در مکانیزم از دست می‌دهند، r برابر است.^[۲۴]

$$M = \sum_{i=1}^m f_i - r \quad (1)$$

f بیان‌کننده‌ی تعداد درجات آزادی اتصالات در شاخه است و M بیان‌کننده‌ی تحرک مکانیزم است.

با توجه به رابطه‌ی ۱ و توضیحات بیان‌شده می‌توان به این نکته پی برد که بر اساس نظریه‌ی تبدیلات خطی، یک مکانیزم با $q \geq 1$ حلقه‌ی بسته‌ی مستقل وجود دارد

باز ساده‌ی A_1 و A_2 و حالت فضایی نسبی اتصالات ابتدایی و انتهایی حاصل می‌شود:

$$r_B = S_{A_1} + S_{A_2} - S_{n/1}^B \quad (6)$$

که در آن r_B تعداد پارامترهای اتصالات در زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه B است که استقلال خود را از دست داده‌اند.

۱.۲. تحرک و حالت فضایی مکانیزم‌های موازی با شاخه‌های ساده

در یک مکانیزم موازی ساده‌ی C که از k شاخه‌ی A_i تشکیل شده است و دارای m اتصال و $1 - k$ حلقه‌ی بسته‌ی مستقل ساختاری است، حالت فضایی مجری نهایی، از حالت فضایی نسبی بین مجری نهایی و عضو پایه به صورت رابطه‌ی Y نتیجه می‌شود:

$$S_{n/1}^C = \dim(R_{n/1}^C) = \dim(R_{A_1} \cap R_{A_2} \cap \dots \cap R_{A_k}) \quad (7)$$

که در این رابطه، R_{A_i} فضای برداری مؤثر شاخه‌ها در این مکانیزم است. در مکانیزم‌های ساده، تعداد پارامتر اتصالات که در مکانیزم استقلال خود را از دست می‌دهند از اختلاف بین مجموع بعد فضاهای مؤثر شاخه‌ها و حالت فضایی مجری نهایی، $S_{n/1}^C$ و از رابطه‌های ۸ و ۹ به دست می‌آید:

$$r_C = \sum_{i=1}^k \dim(R_{A_i}) - \dim(R_{A_1} \cap R_{A_2} \cap \dots \cap R_{A_k}) \quad (8)$$

$$S_{A_i} = \dim(R_{A_i}) \quad (9)$$

با توجه به رابطه‌های ۷ تا ۹، تعداد پارامتر اتصالات که استقلال خود را از دست می‌دهند با استفاده از رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$r_C = \sum_{i=1}^k S_{A_i} - S_{n/1}^C \quad (10)$$

در نهایت با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۰ در رابطه‌ی ۱، رابطه‌ی کلی تحرک مکانیزم‌های موازی با شاخه‌های ساده به صورت رابطه‌ی ۱۱ به دست می‌آید:

$$M_C = \sum_{i=1}^m f_i - r_C = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{i=1}^k S_{A_i} + S_{n/1}^C \quad (11)$$

۲.۲. تحرک و حالت فضایی مکانیزم‌های موازی با شاخه‌های پیچیده

اگر مکانیزم موازی پیچیده‌ی D دارای k شاخه و m اتصال باشد، باید دارای حداقل یک شاخه‌ی پیچیده با حلقه‌ی بسته باشد تا مکانیزم پیچیده محسوب شود. در اینجا شاخه‌های ساده با A_i و شاخه‌های پیچیده با E_j نشان داده می‌شوند. اگر تعداد شاخه‌های ساده‌ی مکانیزم با k_1 و تعداد شاخه‌های پیچیده‌ی مکانیزم با k_2 بیان شوند، آنگاه $k = k_1 + k_2$. در واقع مکانیزم ساده حالتی از مکانیزم پیچیده است که در آن k_2 برابر با صفر است.

حالت فضایی مجری نهایی در یک مکانیزم موازی پیچیده، از حالت فضایی نسبی بین مجری نهایی و پایه‌ی ثابت در آن مکانیزم حاصل می‌شود:

$$S_{n/1}^D = \dim(R_{n/1}^D) = \dim(R_{A_1} \cap R_{A_2} \cap \dots \cap R_{A_{k_1}} \cap R_{E_1} \cap R_{E_2} \cap \dots \cap R_{E_{k_2}}) \quad (12)$$

اگر و تنها اگر تعداد پارامترهای مستقل اتصالات قبل از بسته‌شدن حلقه از تعداد پارامترهای اتصالات که استقلال خود را بعد از بسته شدن حلقه از دست می‌دهند، بیشتر باشد. بنابراین، رابطه‌ی زیر بین درجات آزادی اتصالات و تعداد پارامترهای اتصالات که استقلال خود را در مکانیزم و با ایجاد حلقه‌های بسته در مکانیزم از دست می‌دهند برقرار است:

$$\sum_{i=1}^m f_i > r \quad (2)$$

بر اساس نظریه‌ی تبدیلات خطی، حالت فضایی نسبی بین دو عضو a و b از یک مکانیزم Q ، بیان‌کننده‌ی تعداد جابه‌جایی‌های مستقل نسبی است که مکانیزم اجازه می‌دهد بین دو عضو انجام شود. در واقع، حالت فضایی نسبی $S_{a/b}^Q$ ، به وسیله‌ی بعد فضای برداری $R_{a/b}^Q$ مربوط به سرعت نسبی بین عضوهای a و b از مکانیزم Q به دست می‌آید.

در یک زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده، تحرک برابر با مجموع درجات آزادی اتصالات است و تحرک مکانیزم به وسیله‌ی بعد فضای مفصلی آن به دست می‌آید. همچنین، حالت فضایی زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده به وسیله‌ی بعد فضای مؤثر آن حاصل می‌شود که فضای مؤثر همان فضای کاری 2° مکانیزم است. از این رو، می‌توان نتیجه گرفت حالت فضایی زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده، مساوی یا کوچک‌تر از تحرک آن است.

اگر یک زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده از اتصال سری دو زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده‌ی کوچک‌تر ایجاد شود، فضای مؤثر زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده‌ی حاصل برابر با اجتماع فضاهای مؤثر زنجیره‌های سینماتیکی باز ساده‌ی اولیه است و حالت فضایی زنجیره‌ی حاصل که در واقع بعد فضای مؤثر آن است به صورت رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید:

$$S_{(A \equiv A_1 - A_2)} = \dim(R_{A_1} + R_{A_2}) = \dim(R_{A_1}) + \dim(R_{A_2}) - \dim(R_{A_1} \cap R_{A_2}) \quad (3)$$

که در آن A زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده‌ی است که از دو زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده A_1 و A_2 تشکیل شده است و R_{A_1} و R_{A_2} به ترتیب فضای مؤثر شاخه‌های A_1 و A_2 هستند.

در زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه که از اتصال عضوهای ابتدایی و انتهایی دو زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده ایجاد شده است، حالت فضایی نسبی $S_{n/1}^B$ بین دو عضو ابتدایی و انتهایی در زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه از بعد فضاهای مؤثر زنجیره‌های باز ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن مطابق رابطه‌ی ۴ حاصل می‌شود:

$$S_{n/1}^B = \dim(R_{A_1} \cap R_{A_2}) \quad (4)$$

که در آن B زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه‌ی تشکیل شده از دو زنجیره‌ی سینماتیکی باز ساده A_1 و A_2 است. در واقع، حالت فضایی نسبی بین دو عضو ابتدایی و انتهایی زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه، از اختلاف بین مجموع حالت‌های فضایی زنجیره‌های A_1 و A_2 و حالت فضایی زنجیره‌ی سینماتیکی باز تشکیل شده از A_1 و A_2 همانند رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$S_{n/1}^B = S_{A_1} + S_{A_2} - S_{(A \equiv A_1 - A_2)} \quad (5)$$

در این حالت، تعداد پارامترهایی از اتصالات که در زنجیره‌ی سینماتیکی تک حلقه، استقلال خود را از دست می‌دهند از اختلاف حالت فضایی زنجیره‌های سینماتیکی

تعداد پارامترهایی از اتصالات که در این مکانیزم‌ها استقلال خود را از دست می‌دهند از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$r_D = \sum_{i=1}^{k_1} \dim(R_{A_i}) + \sum_{j=1}^{k_r} \dim(R_{E_j}) - \dim(R_{A_1} \cap R_{A_r} \cap \dots \cap R_{A_k} \cap R_{E_1} \cap R_{E_r} \cap \dots \cap R_{E_k}) - r_l \quad (13)$$

که در آن r_l بیان‌کننده‌ی تعداد پارامترهایی است که به واسطه‌ی بسته شدن حلقه‌های موجود در شاخه‌ها استقلال خود را از دست می‌دهند. تعداد این پارامترها نیز به راحتی با استفاده از همین نظریه برای حلقه‌های بسته به دست می‌آید. رابطه‌ی ۱۳ را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۴ بازنویسی کرد:

$$r_D = \sum_{i=1}^{k_1} S_{A_i} + \sum_{j=1}^{k_r} S_{E_j} - S_{n/1}^D + r_l \quad (14)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۴ در رابطه‌ی ۱، معیار تحرک برای مکانیزم‌های موازی با شاخه‌های پیچیده به صورت رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$M_D = \sum_{i=1}^m f_i - r_D = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{i=1}^{k_1} S_{A_i} - \sum_{j=1}^{k_r} S_{E_j} + S_{n/1}^D - r_l \quad (15)$$

۳. نظریه‌ی پیچه

نظریه‌ی پیچه یک ابزار قدرتمند ریاضیاتی برای تحلیل مکانیزم‌های فضایی است. یک پیچه از دو بردار سه‌بعدی تشکیل شده است.^[۱] پیچه را می‌توان برای بیان موقعیت و چرخش یک بردار فضایی، سرعت خطی، و سرعت دورانی یک جسم صلب یا نیرو و گشتاور به‌کار برد. از این رو، نظریه‌ی پیچه به‌طور گسترده در تحلیل مکانیزم‌ها کاربرد دارد.

با استفاده از این نظریه با به دست آوردن سیستم پیچش و سیستم چرخش مربوط به اتصالات یک شاخه، می‌توان سیستم‌های پیچش و چرخش کل شاخه را به دست آورد. سیستم پیچش هر اتصال با توجه به نوع اتصال و درجه‌ی آزادی آن حاصل می‌شود. سیستم چرخش نیز با توجه به سیستم پیچش و درجات آزادی که توسط اتصالات ایجاد نمی‌شود، محاسبه‌پذیر است و در واقع سیستم‌های پیچش و چرخش به نوعی مکمل هم‌اند.

سیستم پیچش مربوط به اتصالات لولایی، R ، پیچه‌ی از گام صفر است که در راستای محور اتصال است و سیستم پیچش اتصالات کشویی، P ، پیچه‌ی از گام بی‌نهایت است که در راستای اتصال است. برای اتصالات پیچیده مانند موازی‌نگاری که از ۴ اتصال لولایی تشکیل شده است، سیستم پیچش از رابطه‌ی ۱۶ نتیجه می‌شود:^[۲۷]

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ v \times s \end{pmatrix} \quad (16)$$

که در آن، v برداری در جهت اضلاع موازی‌نگار و s راستای محور اتصالات است. پس از یافتن سیستم پیچش شاخه‌ها، S سیستم چرخش آن، S^T به دست می‌آید. سپس، با استفاده از منطق حاکم بر نظریه‌ی پیچه و به دست آوردن مرتبه‌ی سیستم‌های پیچش و چرخش مکانیزم -- که همان‌طور که اشاره شد از سیستم‌های

پیچش و چرخش شاخه‌های مکانیزم حاصل می‌شود -- می‌توان تعداد درجات آزادی اضافی هر شاخه و در نهایت تعداد درجات آزادی کل مکانیزم را محاسبه کرد؛ این مهم با به‌کارگیری روابط ۱۷ تا ۱۹ به دست می‌آید:

$$C = \epsilon - c \quad (17)$$

$$R^i = f^i - \epsilon + c^i = 0 \quad (18)$$

$$M = C + \sum_{i=1}^m R^i \quad (19)$$

که در آن C مرتبه‌ی سیستم پیچش، c مرتبه‌ی سیستم چرخش، R^i درجه آزادی اضافی شاخه‌ی i ام، f درجات آزادی اتصالات، m تعداد شاخه‌ها و M بیان‌کننده‌ی تعداد درجات آزادی است.

رابطه‌ی سینماتیکی ورودی خروجی به صورت رابطه‌ی ۲۰ است:^[۱۱]

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j^i \theta_j^i \quad (20)$$

که در آن θ سرعت شاخه‌ها و ξ پیچش شاخه‌هاست. برای حذف سرعت مفاصل غیرفعال باید آن‌ها را در بردار پیچه‌ی ضرب کرد که بر اتصالات متقابل بوده ولی بر اتصالات فعال متقابل^[۲۱] نباشد. پیچه‌هایی متقابل هستند که ضرب متقابل آن‌ها برابر با صفر باشد.^[۱۱] از این رو می‌توان رابطه‌ی ۲۱ را نوشت:

$$\zeta^i \circ \xi = \zeta^i \circ \xi_{act}^i \theta_{act}^i \quad (21)$$

زیرنویس act بیان‌کننده‌ی مفصل فعال است و ۰ نشان‌دهنده‌ی ضرب متقابل است. در نتیجه، با توجه به نتایج حاصل معادلات ورودی و خروجی به صورت رابطه‌ی ۲۲ خواهد بود:

$$A \dot{\rho} = B \xi \quad (22)$$

که در آن $\dot{\rho}$ بیان‌کننده‌ی فضای سرعت مکانیزم است و A و B به ترتیب نشان‌دهنده‌ی ماتریس‌های ژاکوبین مستقیم و معکوس مکانیزم موازی هستند.^[۳۸]

۴. سنتر مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی

سنتر مکانیزم‌های موازی، شرایط استفاده‌ی آن‌ها در کاربردهای گوناگون را فراهم می‌کند. ابتدایی‌ترین جزء و بخش اولیه‌ی هر طراحی، اتصالات سینماتیکی هستند که رابط بین اعضای استفاده‌شده در مکانیزم‌اند. در واقع اتصالات سینماتیکی، عضوها را به هم متصل و شاخه‌ها را ایجاد می‌کنند و از اتصال موازی شاخه‌ها مکانیزم‌های موازی به‌وجود می‌آید. از این رو، وجود تنوع در اتصالات سینماتیکی با قابلیت‌های متنوع، باعث ارائه‌ی بهتر طرح‌های مکانیزم می‌شود. در حال حاضر اتصالات متنوعی وجود دارند و از آن‌ها در طراحی مکانیزم‌ها به‌طور گسترده‌ی استفاده شده است.^[۳۹] بیشتر اتصالات سینماتیکی را می‌توان از ترکیب اتصالات کشویی و لولایی ایجاد کرد. بنابراین، در اینجا برای طراحی و سنتر مکانیزم‌ها، تنها از اتصالات یک درجه آزادی کشویی و لولایی استفاده می‌شود. موازی‌نگاری که در طراحی مکانیزم‌های این مقاله از آن‌ها استفاده می‌شود، یک حلقه‌ی بسته‌ی متشکل از ۴ اتصال لولایی است که در صفحه‌ی خود حرکات انتقالی را ایجاد می‌کند.

همان‌طور که مشخص است در اینجا با اینکه برخی از شاخه‌ها دارای درجات آزادی مازادی هستند که مکانیزم نیازی به آن‌ها ندارد، این درجات آزادی توسط شاخه‌های دیگر محدود شده‌اند؛ بنابراین، می‌توان رابطه‌ی ۲۴ را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} S_{A_1} &= 4 \\ S_{A_\tau} = S_{A_r} = S_{E_1} &= 5 \end{aligned} \quad (24)$$

با توجه به نظریه‌ی حالت فضایی و رابطه‌ی ۱۲، رابطه‌ی ۲۵ حاصل می‌شود:

$$S_{D/1}^D = \dim(R_{A_1} \cap R_{A_\tau} \cap R_{A_r} \cap R_{E_1}) = 4 \quad (25)$$

درواقع، درجات آزادی تولیدشده توسط مکانیزم به صورت $(v_x, v_y, v_z, \omega_y)$ است که همان الگوی حرکتی $3T1R$ مورد نظر را ایجاد می‌کند. در این مکانیزم در شاخه‌ی E_1 یک حلقه‌ی بسته وجود دارد که این حلقه به تعداد ۳ درجه آزادی از اتصالات می‌کاهد. از طرفی این مکانیزم دارای ۲۲ اتصال است که با توجه به رابطه‌ی ۱۵ و اینکه تمام اتصالات دارای یک درجه آزادی هستند، رابطه‌ی ۲۶ نتیجه می‌شود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{22} f_i - \sum_{i=1}^3 S_{A_i} - S_{E_1} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (26)$$

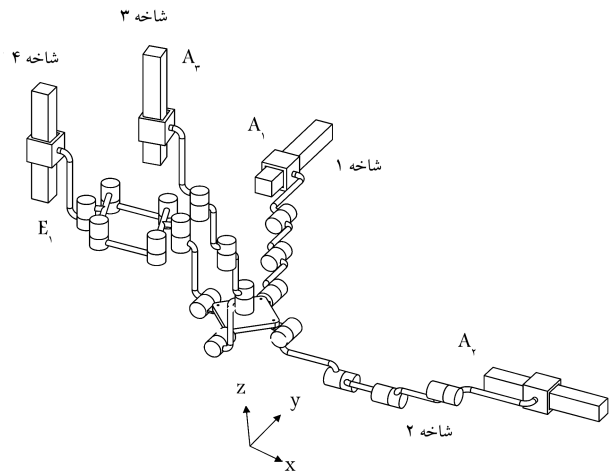
همان‌طور که مشاهده شد این مکانیزم نیز دارای ۴ درجه آزادی است که اشتراک سرعت‌های نسبی ایجادشده توسط شاخه‌های آن است. پس، این مکانیزم دارای سه درجه آزادی حرکت انتقالی و یک درجه آزادی حرکت دورانی است.

تحلیل مکانیزم: بر اساس نظریه‌ی پیچه، ابتدا سیستم‌های پیش اتصالات هر شاخه به دست می‌آید که در روابط ۲۷-۳۰ آورده شده‌اند:

$$S_1 = \begin{cases} \$1_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} \\ \$1_m = \begin{pmatrix} j \\ j \times r_{1m} \end{pmatrix} \end{cases} \quad m = 2, 3, 4 \quad (27)$$

$$S_\tau = \begin{cases} \$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ \$\tau_m = \begin{pmatrix} i \\ i \times r_{\tau m} \end{pmatrix} \\ \$\tau_5 = \begin{pmatrix} j \\ j \times r_{\tau 5} \end{pmatrix} \end{cases} \quad m = 2, 3, 4 \quad (28)$$

$$S_r = \begin{cases} \$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$r_m = \begin{pmatrix} k \\ k \times r_{r m} \end{pmatrix} \\ \$r_5 = \begin{pmatrix} j \\ j \times r_{r 5} \end{pmatrix} \end{cases} \quad m = 2, 3, 4 \quad (29)$$



شکل ۱. مکانیزم موازی ۲PRRRR-۱PRRR-۱PRPaRR

از نتایج نظریه‌ی تبدیلات خطی می‌توان نتیجه گرفت که اگر یکی از شاخه‌های مکانیزم نتواند نوعی از حرکت را ایجاد کند، آنگاه مکانیزم مورد نظر به هیچ‌وجه نمی‌تواند آن حرکت را انجام دهد. بنابراین، مجری نهایی می‌تواند حرکتی را داشته باشد و سرعت‌هایی را ایجاد نماید که در کل شاخه‌ها مشترک باشند. حال اگر تمام شاخه‌ها به جز یکی از آن‌ها نتوانند حرکتی را ایجاد کنند، آنگاه شاخه‌ی مذکور به عنوان محدودکننده عمل می‌کند.

همان‌طور که مشخص است، مکانیزم‌های با ۴ درجه آزادی می‌توانند دارای ۳ نوع الگوی حرکتی باشند. این الگوها به صورت ۳ حرکت انتقالی به همراه یک حرکت دورانی ($3T1R$)، دو حرکت انتقالی به همراه دو حرکت دورانی ($2T2R$)، و ۳ حرکت دورانی به همراه یک حرکت انتقالی ($3R1T$) هستند. در اینجا به سنتز هر ۳ نوع مکانیزم موازی ۴ درجه آزادی پرداخته می‌شود و روند سنتز و تحلیل آن‌ها شرح داده می‌شود.

۱.۴.۱. مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی $3T1R$

با توجه به این نکته که برای ایجاد یک الگوی حرکتی باید تمام شاخه‌ها دارای آن الگوی حرکتی و درجات آزادی مربوط باشند، در اینجا برای سنتز این مکانیزم‌ها، با در نظر گرفتن این نکته، چیدمان اتصالات و شاخه‌ها به نحوی صورت گرفته است که درجات آزادی مورد نظر در هیچ شاخه‌ی مقید نباشند.

۱.۴.۱.۴. مکانیزم موازی ۲PRRRR-۱PRRR-۱PRPaRR

این مکانیزم از دو شاخه‌ی PRRRR و یک شاخه‌ی PRRR و یک شاخه‌ی PRPaRR تشکیل شده است (شکل ۱). با توجه به اینکه در یکی از شاخه‌های این مکانیزم از یک موازی‌نگار استفاده شده است و دارای یک حلقه‌ی بسته در یکی از شاخه‌هایش است، این مکانیزم از دسته‌ی مکانیزم‌های موازی پیچیده است و فضای سرعت شاخه‌های مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۲۳ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y) \\ R_{A_\tau} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y) \\ R_{A_r} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y, \omega_z) \end{aligned} \quad (23)$$

تعداد درجات آزادی مکانیزم برابر با ۴ است که انتظار آن می‌رفت. با توجه به سیستم چرخش مکانیزم، این مکانیزم دو حرکت دورانی حول ۲ محور x و z را ایجاد نمی‌کند و دارای الگوی حرکتی مطلوب ۳T۱R مورد نظر است. حال برای به‌دست آوردن ماتریس ژاکوبین مکانیزم، اتصال اول در هر شاخه‌ی محرک در نظر گرفته می‌شود و پیچ‌های متقابل به تمام اتصالات یک شاخه به‌جز اتصال محرک (چرخش تحریک) به‌دست می‌آید. برای شاخه‌ی اول، این پیچ به‌صورت رابطه‌ی ۳۸ است:

$$\zeta^1 = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

حال با توجه به پیچ‌های اتصال محرک و ضرب متقابل این دو پیچ، نتیجه به‌صورت رابطه‌ی ۳۹ است:

$$\zeta^1 \circ \xi_{act}^1 = 1 \quad (39)$$

بنابراین، رابطه‌ی ۴۰ نتیجه می‌شود:

$$\zeta^1 \circ \xi = \zeta^1 \circ \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_y \quad (40)$$

پس برای این شاخه می‌توان رابطه‌ی ۴۱ را نوشت:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} \quad (41)$$

اکنون برای شاخه‌ی A_2 محاسبات به‌صورت رابطه‌ی ۴۲ انجام می‌شود:

$$\zeta^2 = \begin{pmatrix} i \\ i \times S_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

و با توجه به اینکه ماتریس دوران حول محور y به‌صورت رابطه‌ی ۴۳ است:

$$Q_y = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (43)$$

می‌توان رابطه‌ی ۴۴ را نوشت:

$$\begin{aligned} \vec{S}_2 &= Q_y \vec{S}_1^p = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{x2} \\ S_{z2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{x2} \cos \phi + S_{z2} \sin \phi \\ -S_{x2} \sin \phi + S_{z2} \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$S_2 = \begin{cases} \$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$\tau_m = \begin{pmatrix} k \\ k \times r_{\tau m} \end{pmatrix} \\ \$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \times k \end{pmatrix} \\ \$\tau_5 = \begin{pmatrix} j \\ j \times r_{\tau 5} \end{pmatrix} \end{cases} \quad m = 2, 4 \quad (30)$$

که در آن‌ها r بیان‌کننده‌ی بردار بین مرجع ثابت و مرجع متحرک بر روی مجری نهایی است و در تمام موارد اندیس اول بیان‌کننده‌ی شماره‌ی شاخه و اندیس دوم بیان‌کننده‌ی شماره‌ی اتصال در شاخه است. سپس سیستم‌های چرخش متقابل به هر یک از سیستم‌های پیچش بالا به‌دست می‌آیند که به‌صورت روابط ۳۱-۳۴ هستند:

$$S_2^r = \begin{cases} \$\tau_1^r = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$\tau_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (31)$$

$$S_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$S_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$S_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (34)$$

با توجه به سیستم‌های چرخش و پیچش مکانیزم، مرتبه‌ی سیستم‌های چرخش شاخه‌ی اول برابر با ۲ و باقی شاخه‌ها برابر با یک است؛ بنابراین رابطه‌ی ۳۵ نتیجه می‌شود:

$$R^i = f^i - e + c^i = 0 \quad (35)$$

سیستم چرخش کلی مکانیزم که از اجتماع سیستم‌های چرخش شاخه‌ها به‌دست می‌آید به‌صورت رابطه‌ی ۳۶ است:

$$S^r = \begin{cases} \$\tau^r = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$\tau^r = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (36)$$

بنابراین، مرتبه‌ی سیستم چرخش کل مکانیزم برابر با ۲ و مرتبه‌ی سیستم پیچش کل مکانیزم برابر با ۴ است و با توجه به رابطه‌ی ۱۹، رابطه‌ی ۳۷ نتیجه می‌شود:

$$M = C + \sum_{i=1}^f R^i = 4 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} \quad (55)$$

روابط ورودی و خروجی برای تمام شاخه‌ها به دست آمد که می‌توان از این طریق ماتریس ژاکوبین مکانیزم را ایجاد کرد که به صورت روابط ۵۶ و ۵۷ است:

$$A\dot{\rho} = B\xi \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{x\tau} \sin \phi - S_{z\tau} \cos \phi & 1 & 0 & 0 \\ S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (57)$$

و در نهایت ماتریس‌های ژاکوبین مکانیزم به صورت روابط ۵۸ و ۵۹ خواهند بود:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (58)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{x\tau} \sin \phi - S_{z\tau} \cos \phi & 1 & 0 & 0 \\ S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

شرط استقلال حرکتی مکانیزم را می‌توان با صفر شدن ضرب داخلی بین ستون‌های ماتریس ژاکوبین معکوس تأیید کرد. این معادلات نشان می‌دهند که استقلال حرکتی مکانیزم، قابل قبول است و دارای معادلات سینماتیکی نسبتاً ساده‌ی است. از این رو کنترل مکانیزم هم دارای سادگی قابل قبولی خواهد بود. برای مکانیزم‌های دیگر، محاسبات به‌طور مختصرتری بیان می‌شوند و بیشتر نتایج نهایی ارائه خواهد شد.

۲.۱.۴. مکانیزم موازی ۳PRPaRR-۱PRRR

از دیگر مکانیزم‌های سنتز شده برای الگوی حرکتی ۳T۱R، مکانیزم موازی ۳PRPaRR-۱PRRR است (شکل ۲). در این مکانیزم شاخه‌ی ساده محدودکننده است و در واقع موجب می‌شود که مکانیزم الگوی حرکتی مطلوبی داشته باشد. با

به این ترتیب براساس روند گذشته برای شاخه‌ی A_2 نتایج به صورت روابط ۴۵-۴۷ حاصل می‌شود:

$$\zeta^r \circ \xi_{act}^r = 1 \quad (45)$$

$$\zeta^r \circ \xi = v_x + (S_{x\tau} \sin \phi - S_{z\tau} \cos \phi) \omega_y \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} S_{x\tau} \sin \phi - S_{z\tau} \cos \phi & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} \quad (47)$$

به طریق مشابه برای شاخه‌ی A_3 روابط ۴۸-۵۰ به دست می‌آید:

$$\zeta^r = \begin{pmatrix} k \\ k \times S_r \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\zeta^r \circ \xi_{act}^r = 1 \quad (49)$$

$$\zeta^r \circ \xi = \zeta^r \circ \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_z + (S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi) \omega_y \quad (50)$$

در نهایت برای این شاخه روابط ورودی - خروجی به صورت رابطه‌ی ۵۱ است:

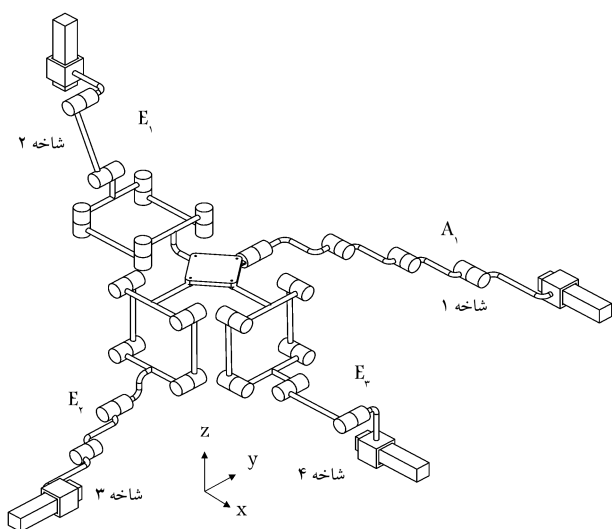
$$\begin{bmatrix} S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} \quad (51)$$

همین‌طور برای شاخه‌ی پیچیده‌ی E_1 نتایج به صورت روابط ۵۲-۵۵ خواهد بود:

$$\zeta^f = \begin{pmatrix} k \\ k \times S_f \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\zeta^f \circ \xi_{act}^f = 1 \quad (53)$$

$$\zeta^f \circ \xi = \zeta^f \circ \begin{bmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_z + (S_{x\tau} \cos \phi + S_{z\tau} \sin \phi) \omega_y \quad (54)$$



شکل ۳. مکانیزم موازی ۳PRRPa-۱PRRRR

همان‌طور که از رابطه‌ی ۶۵ مشخص است، مرتبه‌ی سیستم چرخش مکانیزم برابر با ۲ و در نتیجه مرتبه‌ی سیستم پیچش کل مکانیزم برابر با ۴ است. با توجه به رابطه‌ی ۱۹ تعداد درجات آزادی مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۶۶ محاسبه می‌شود:

$$M = C + \sum_{i=1}^r R^i = 4 \quad (66)$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، تعداد درجات آزادی مکانیزم برابر با ۴ است؛ با توجه به سیستم چرخش مکانیزم، مکانیزم دو درجه آزادی دورانی حول محورهای y و z نیست و دارای الگوی حرکتی ۳T۱R است.

برای به دست آوردن ماتریس ژاکوبین مکانیزم، پیچهای متقابل به پیچهای تمام اتصالات به جز اتصال محرک که در اینجا اتصال اول هر شاخه است به دست می‌آید که در نهایت ماتریس‌های روابط ۶۷ و ۶۸ حاصل می‌شوند:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (67)$$

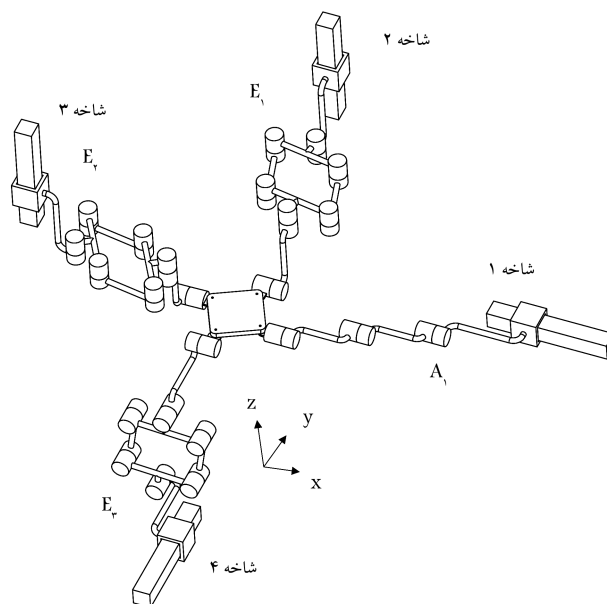
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{y2} \cos \phi + S_{z2} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ -S_{y3} \cos \phi + S_{z3} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ S_{y4} \sin \phi + S_{z4} \cos \phi & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

با توجه توضیحات داده شده برای وجود استقلال حرکتی بین درجات آزادی، این مکانیزم نیز دارای استقلال حرکتی مناسبی است و روابط سینماتیکی و کنترل نسبتاً ساده‌ی دارد.

۳.۱.۴. مکانیزم موازی ۳PRRPa-۱PRRRR

مکانیزم موازی ۳PRRPa-۱PRRRR نیز دارای الگوی حرکتی شامل ۳ حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی است (شکل ۳). فضای برداری سرعت شاخه‌های مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۶۹ است:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y) \end{aligned} \quad (69)$$



شکل ۲. مکانیزم موازی ۳PRPaRR-۱PRRR

توجه به ساختار مکانیزم فضای سرعت شاخه‌ها مانند رابطه‌ی ۶۰ است:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y) \end{aligned} \quad (60)$$

بنابراین می‌توان روابط ۶۱ تا ۶۳ را نتیجه گرفت:

$$S_{A_1} = 4 \quad (61)$$

$$S_{E_1} = S_{E_2} = S_{E_3} = 5 \quad (62)$$

$$S_{D/1}^D = 4 \quad (63)$$

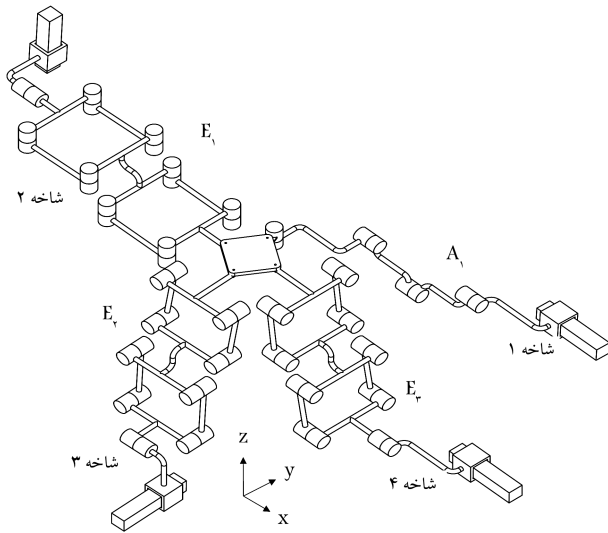
درجات آزادی مکانیزم با توجه به رابطه‌ی ۱۵ به صورت رابطه‌ی ۶۴ حاصل می‌شود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{28} f_i - \sum_{i=1}^3 S_{E_i} - S_{A_1} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (64)$$

با توجه به فضای برداری سرعت‌های شاخه‌ها، کاملاً مشخص است که الگوی حرکتی مکانیزم به صورت ۳T۱R مورد نظر است.

تحلیل مکانیزم: با استفاده از نظریه‌ی پیچ، همانند روند طی شده برای مکانیزم قبل، سیستم‌های پیچش و چرخش مکانیزم به دست می‌آیند. سیستم چرخش کل مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۶۵ است:

$$S^r = \begin{cases} \tau^r = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \tau^r = \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (65)$$



شکل ۴. مکانیزم موازی ۳PRPaPa-۱PRRRR.

با توجه به اشتراک‌های فضای برداری سرعت شاخه‌ها، مشخص است که مکانیزم الگوی حرکتی مناسب ۳T۱R را ایجاد می‌کند و درجات آزادی مکانیزم با استفاده از نظریه تبدیلات خطی، که در رابطه ۱۵ بیان شد، به صورت رابطه ۷۶ حاصل می‌شود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{25} f_i - \sum_{i=1}^3 S_{E_i} - S_{A_1} + S_{\Delta/1}^D - r_l = 4 \quad (76)$$

تحلیل مکانیزم: با به دست آوردن سیستم‌های پیچش و چرخش هر شاخه از مکانیزم، سیستم چرخش کل مکانیزم به صورت رابطه ۷۷ حاصل می‌شود:

$$S^T = \begin{cases} \$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (77)$$

همان‌طور که مشخص است، مرتبه‌ی سیستم چرخش مکانیزم برابر با ۲ است و مرتبه‌ی سیستم پیچش آن برابر با ۴ است. سیستم چرخش مکانیزم گویای این است که این مکانیزم دارای الگوی مورد نظر حرکتی ۳T۱R است. از رابطه ۱۹، رابطه‌ی ۷۸ به دست می‌آید:

$$M = C + \sum_{i=1}^4 R^i = 4 \quad (78)$$

همان‌طور که در رابطه ۷۸ به دست آمد، تعداد درجات آزادی مکانیزم برابر با ۴ است که سنتز براساس آن صورت گرفته است. همچنین، نظریه پیچش ماتریس‌های ژاکوبین روابط ۷۹ و ۸۰ را به دست می‌دهد:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (79)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{y2} \cos \phi + S_{z2} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ -S_{y3} \sin \phi - S_{z3} \sin \phi & 0 & 1 & 0 \\ S_{y4} \cos \phi + S_{z4} \sin \phi & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

بنابراین، تعداد درجات آزادی مکانیزم براساس نظریه تبدیلات خطی، رابطه ۱۵، به صورت رابطه ۷۰ به دست می‌آید:

$$M_D = \sum_{i=1}^{26} f_i - \sum_{i=1}^3 S_{E_i} - S_{A_1} + S_{\Delta/1}^D - r_l = 4 \quad (70)$$

با توجه به فضای برداری سرعت شاخه‌ها، مشخص است که مکانیزم دارای ۳ حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی است و الگوی حرکتی مناسب و قابل انتظار را ایجاد می‌کند.

تحلیل مکانیزم: با استفاده از نظریه پیچش، سیستم‌های پیچش و چرخش شاخه‌های مکانیزم به دست می‌آیند و در نهایت سیستم چرخش کل مکانیزم به صورت رابطه ۷۱ حاصل می‌شود:

$$S^T = \begin{cases} \$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ \$r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \end{cases} \quad (71)$$

همان‌طور که مشخص است، مرتبه‌ی سیستم چرخش مکانیزم برابر با ۲ است؛ بنابراین، مرتبه‌ی سیستم پیچش مکانیزم برابر با ۴ است. از سیستم چرخش، مشخص است که مکانیزم توانایی ایجاد دو حرکت دورانی حول محورهای x و z را ندارد و در نتیجه الگوی حرکت مکانیزم به صورت ۳T۱R است که پیش از این نیز انتظار می‌رفت. درجات آزادی مکانیزم نیز با استفاده از رابطه ۱۹، به صورت رابطه ۷۲ خواهد بود:

$$M = C + \sum_{i=1}^4 R^i = 4 \quad (72)$$

همچنین، با فرض اینکه اتصال اول، اتصال محرک است و با به دست آوردن پیچش متقابل به تمام اتصالات به جز اتصال محرک، ماتریس ژاکوبین مکانیزم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (73)$$

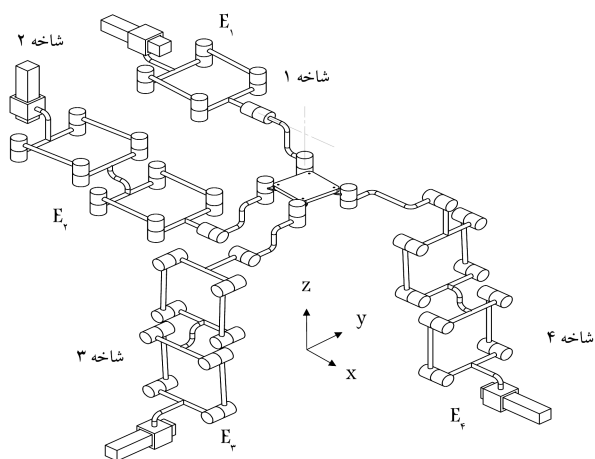
$$B = \begin{bmatrix} S_{x1} \sin \phi - S_{z1} \cos \phi & 1 & 0 & 0 \\ S_{x2} \cos \phi + S_{z2} \sin \phi & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S_{x4} \cos \phi - S_{z4} \sin \phi & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

همان‌طور که مشخص است، این مکانیزم نیز دارای رابطه‌ی نسبتاً ساده‌ی سینماتیکی است و استقلال حرکتی قابل قبولی دارد.

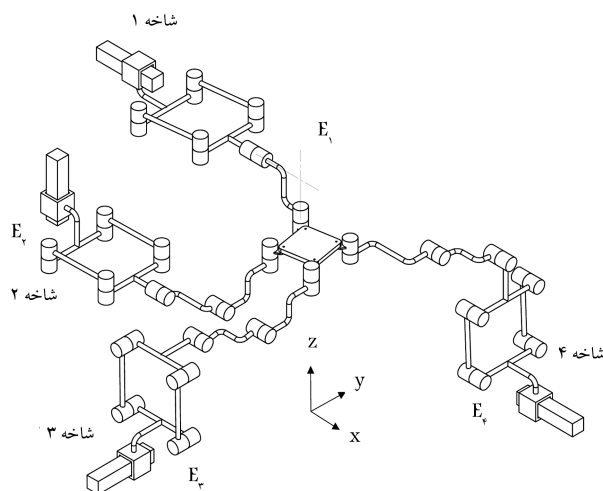
۴.۱.۴. مکانیزم موازی ۳PRPaPa-۱PRRRR

مکانیزم موازی ۳PRPaPa-۱PRRRR نیز از دیگر مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳T۱R است (شکل ۴). این مکانیزم در ساختار شاخه‌های خود دارای ۶ حلقه‌ی بسته است. فضای برداری سرعت شاخه‌های آن به صورت رابطه ۷۵ است:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x) \end{aligned} \quad (75)$$



شکل ۶. مکانیزم موازی ۳PPaPaRR-۱PPaRR.



شکل ۵. مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PPaRR.

تحلیل مکانیزم: سیستم چرخش کل مکانیزم بر اساس نظریه‌ی پیچ به صورت رابطه‌ی ۸۳ به دست می‌آید:

$$S^r = \begin{cases} \$r_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \$r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (83)$$

مرتبه‌ی سیستم چرخش مکانیزم برابر با ۲ است و نشان می‌دهد که مکانیزم توانایی ایجاد یک حرکت دورانی حول محور y و یک حرکت انتقالی در راستای محور z را ندارد؛ بنابراین، الگوی حرکتی به صورت ۲T۲R است که از رابطه‌ی ۸۴ حاصل می‌شود؛ تعداد درجات آزادی با توجه به رابطه‌ی ۱۹ برابر با ۴ است:

$$M = C + \sum_{i=1}^r R^i = 4 \quad (84)$$

اگر در این مکانیزم نیز اتصال اول هر شاخه‌ی محرک در نظر گرفته شود، ماتریس‌های ژاکوبین به صورت روابط ۸۵ و ۸۶ حاصل می‌شود:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (85)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

که در آن a, b, c, d, e عباراتی بر اساس توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

۲.۲.۴. مکانیزم موازی ۳PPaPaRR-۱PPaRR

مکانیزم موازی ۳PPaPaRR-۱PPaRR دارای ۴ شاخه‌ی پیچیده و ۷ موازی‌نگار در ساختار خود است (شکل ۶). این مکانیزم به نحوی سنتز شده است که توانایی ایجاد الگوی حرکتی ۲T۲R مورد نظر را داشته باشد. فضای سرعت شاخه‌های

این مکانیزم دارای معادلات سینماتیکی به نسبت ساده‌ی است اما نباید از پیچیدگی ساختار سینماتیکی آن غافل شد.

۲.۴. مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۲T۲R

یک دسته‌ی دیگر از مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی سنتز شده، مکانیزم‌های دارای الگوی حرکتی ۲T۲R هستند که دو حرکت انتقالی و دو حرکت دورانی دارند. بنابراین، تمام شاخه‌های این مکانیزم‌ها باید به طوری سنتز شوند که حداقل این حرکات را داشته باشند و اگر بیش از این حرکات را ایجاد کنند، باید یک شاخه‌ی محدودکننده وجود داشته باشد. در اینجا سنتر و تحلیل چند نمونه از این مکانیزم‌ها بیان می‌شود.

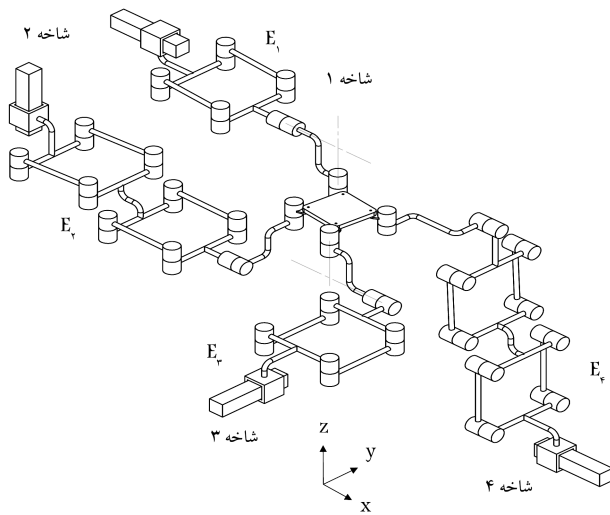
۱.۲.۴. مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PPaRR

مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PPaRR به نحوی سنتز شده است که بتواند الگوی حرکتی ۲T۲R را ایجاد کند (شکل ۵). فضای برداری سرعت شاخه‌های این مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۸۱ است:

$$\begin{aligned} R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_4} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \end{aligned} \quad (81)$$

همان‌طور که مشخص است، شاخه‌ی E_1 به صورت محدودکننده عمل می‌کند؛ بنابراین، این مکانیزم دارای الگوی حرکتی مورد نظر است. با توجه به تعداد اتصالات و تعداد پارامترهایی که استقلال خود را در مکانیزم و به واسطه‌ی حلقه‌های بسته از دست می‌دهند، تعداد درجات آزادی از رابطه‌ی ۱۵ به صورت رابطه‌ی ۸۲ محاسبه می‌شود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{r_1} f_i - \sum_{i=1}^r S_{E_i} + S_{D/1} - r_l = 4 \quad (82)$$



شکل ۷. مکانیزم موازی ۲PPaPaRR-۲PPaRR.

همان‌طور که فضای سرعت شاخه‌ها نشان می‌دهد، این مکانیزم توانایی ایجاد الگوی حرکتی مناسب ۲T۲R را داراست و تعداد درجات آزادی مکانیزم از طریق رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود که در رابطه‌ی ۹۴ بیان شده است:

$$M_D = \sum_{i=1}^{26} f_i - \sum_{i=1}^4 S_{E_i} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (94)$$

تحلیل مکانیزم: با توجه به مسائل گفته‌شده از نظریه‌ی پیچ، سیستم‌های پیش و چرخش مکانیزم به دست می‌آید و سیستم چرخش کل مکانیزم مانند رابطه‌ی ۹۵ خواهد بود:

$$S^r = \begin{cases} \mathcal{S}_1^r = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{S}_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (95)$$

از سیستم چرخش مکانیزم نتیجه می‌شود که مکانیزم توانایی ایجاد یک حرکت دورانی و یک حرکت انتقالی را ندارد؛ بنابراین، الگوی حرکتی آن ۲T۲R است. مرتبه‌ی سیستم چرخش برابر با ۲ است و در نهایت تعداد درجات آزادی مکانیزم از رابطه‌ی ۱۹ برابر با ۴ به دست می‌آید. ماتریس‌های ژاکوبین مکانیزم در رابطه‌های ۹۶ و ۹۷ نشان داده شده است:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (96)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

که در آن a, b, c, d, e عباراتی بر اساس توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

۴.۲.۴. مکانیزم موازی ۲PPaRR-۲PPaRR

مکانیزم موازی ۲PPaPaRR-۲PPaRR از دیگر مکانیزم‌های سنتز شده در این بخش است (شکل ۸). فضای سرعت شاخه‌های این مکانیزم در رابطه‌ی ۹۸ و

مکانیزم به صورت عبارت‌های رابطه‌ی ۸۷ است:

$$\begin{aligned} R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_4} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \end{aligned} \quad (87)$$

همان‌طور که از فضای برداری سرعت شاخه‌ها، رابطه‌ی ۸۷ مشخص است، مکانیزم می‌تواند الگوی حرکتی مورد نظر ۲T۲R را ایجاد کند. با توجه به پارامترهای مطرح شده در نظریه‌ی تبدیلات خطی و رابطه‌ی ۱۵، درجات آزادی مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۸۸ خواهد بود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{21} f_i - \sum_{i=1}^4 S_{E_i} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (88)$$

تحلیل مکانیزم: سیستم چرخش کل مکانیزم، بر اساس نظریه‌ی پیچ مانند رابطه‌ی ۸۹ خواهد بود:

$$S^r = \begin{cases} \mathcal{S}_1^r = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{S}_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (89)$$

همان‌طور که مشخص است، سیستم چرخش مکانیزم دارای مرتبه‌ی ۲ است و نشان می‌دهد که مکانیزم نمی‌تواند یک حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی را ایجاد کند و دارای الگوی حرکتی مناسب است. درجات آزادی این مکانیزم از رابطه‌ی ۱۹ نیز با رابطه‌ی ۹۰ برابر با ۴ به دست می‌آید:

$$M = C + \sum_{i=1}^4 R^i = 4 \quad (90)$$

ماتریس‌های ژاکوبین مکانیزم در رابطه‌های ۹۱ و ۹۲ به دست آمده‌اند:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (91)$$

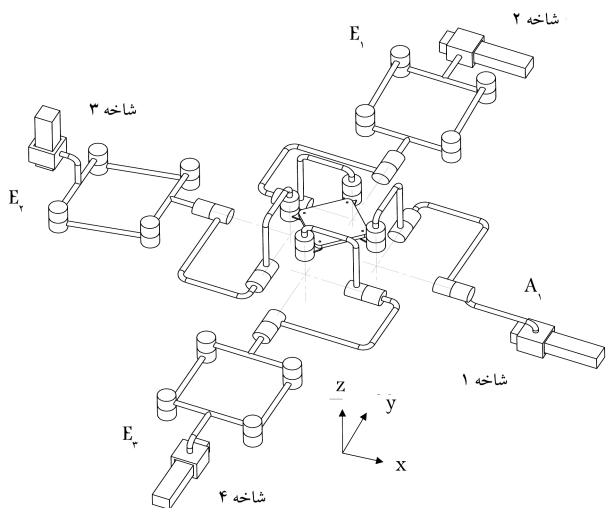
$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (92)$$

که در آن a, b, c, d, e عباراتی بر اساس توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

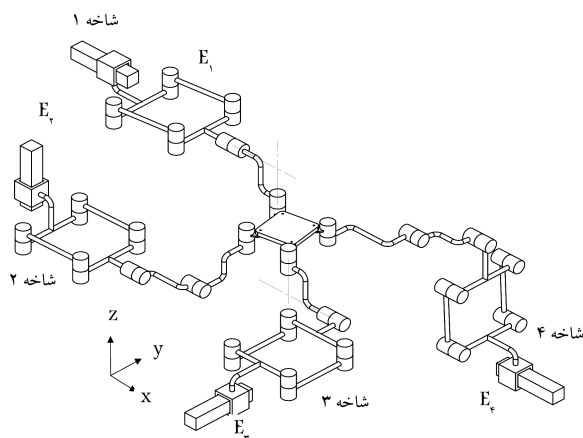
۳.۲.۴. مکانیزم موازی ۲PPaPaRR-۲PPaRR

مکانیزم موازی ۲PPaPaRR-۲PPaRR دارای ۶ موازی‌نگار در ساختار خود است (شکل ۷). فضای سرعت شاخه‌های مکانیزم در رابطه‌ی ۹۳ آمده است:

$$\begin{aligned} R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_4} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \end{aligned} \quad (93)$$



شکل ۹. مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PRRR.



شکل ۸. مکانیزم موازی ۲PPaRRR-۲PPaRR.

همچنین تعداد درجات آزادی آن در رابطه‌ی ۹۹ بیان شده است:

$$\begin{aligned} R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_z) \\ R_{E_4} &= (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_z) \end{aligned} \quad (98)$$

$$M_D = \sum_{i=1}^3 f_i - \sum_{i=1}^4 S_{E_i} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (99)$$

همان‌گونه که از روابط مشخص است، مکانیزم الگوی حرکتی ۲T۲R مورد نظر را داراست. در این مکانیزم با وجود اینکه دو شاخه درجات آزادی مازاد دارند، دو شاخه‌ی دیگر محدودکننده‌اند.

تحلیل مکانیزم: سیستم چرخش کل مکانیزم به صورت رابطه‌ی ۱۰۰ به دست می‌آید:

$$S^r = \begin{cases} \$r_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \$r_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (100)$$

همان‌طور که از سیستم چرخش مکانیزم نتیجه می‌شود، مکانیزم توانایی ایجاد یک حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی ندارد و تعداد درجات آزادی براساس رابطه‌ی ۱۹ برابر با ۴ است. ماتریس ژاکوبین مکانیزم نیز از نظریه‌ی پیچ حاصل می‌شود که در روابط ۱۰۱ و ۱۰۲ آمده است:

$$A = I_{3 \times 4} \quad (101)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & e & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

که در آن a, b, c, d, e عباراتی براساس توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

۳.۴. مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳R۱T در این بخش به مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳R۱T پرداخته می‌شود که ۳ درجه آزادی دورانی و یک درجه آزادی حرکت انتقالی دارند. در ادامه روند سنتر و تحلیل دو نمونه از این مکانیزم‌ها بررسی می‌شود.

۱.۳.۴ مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PRRR

ساختار سینماتیکی مکانیزم موازی ۳PPaRRR-۱PRRR به گونه‌ی سنتر شده است که درکل مکانیزم بتواند الگوی حرکتی ۳R۱T را ایجاد کند (شکل ۹). فضای برداری سرعت شاخه‌های مکانیزم در رابطه‌ی ۱۰۳ آمده است:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_2} &= (v_x, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_3} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \end{aligned} \quad (103)$$

همان‌طور که مشخص است، اشتراک فضاهای برداری سرعت شاخه‌ها، الگوی حرکت مناسب ۲T۲R را تشکیل می‌دهد. با توجه به معیار تبدیلات خطی و رابطه‌ی ۱۵، تعداد درجات آزادی این مکانیزم برابر با ۴ است که در رابطه‌ی ۱۰۴ بیان شده است:

$$M_D = \sum_{i=1}^{28} f_i - \sum_{i=1}^3 S_{E_i} - S_{A_1} + S_{D/1}^D - r_l = 4 \quad (104)$$

تحلیل مکانیزم: همان‌طور که پیشتر نیز توضیح داده شد، ابتدا سیستم‌های پیچش و چرخش شاخه‌های مکانیزم به دست می‌آید و در نهایت سیستم چرخش کل مکانیزم به صورت رابطه ۱۰۵ حاصل می‌شود:

$$S^r = \begin{cases} \$r_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \$r_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \end{cases} \quad (105)$$

باتوجه به رابطه‌ی ۱۰۹، تعداد درجات آزادی مکانیزم از رابطه‌ی ۱۰۹ حاصل می‌شود:

$$M_D = \sum_{i=1}^{28} f_i - \sum_{i=1}^4 S_{E_i} + S_{\delta/1}^D - r_l = 4 \quad (109)$$

تحلیل مکانیزم: همانند قبل، سیستم پیچش و چرخش شاخه‌های مکانیزم بررسی می‌شود و سیستم چرخش کل مکانیزم به دست می‌آید که در رابطه‌ی ۱۱۰ بیان شده است:

$$S^T = \begin{cases} \mathcal{S}_{\tau}^T = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{S}_{\tau}^T = \begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (110)$$

واضح است که براساس این سیستم چرخش، مکانیزم توانایی ایجاد دو حرکت انتقالی را ندارد و از این رو، الگوی حرکتی آن مورد قبول است. تعداد درجات آزادی مکانیزم نیز براساس رابطه‌ی ۱۹ برابر با ۴ است. ماتریس‌های ژاکوبین مکانیزم به صورت روابط ۱۱۱ و ۱۱۲ به دست می‌آید:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (111)$$

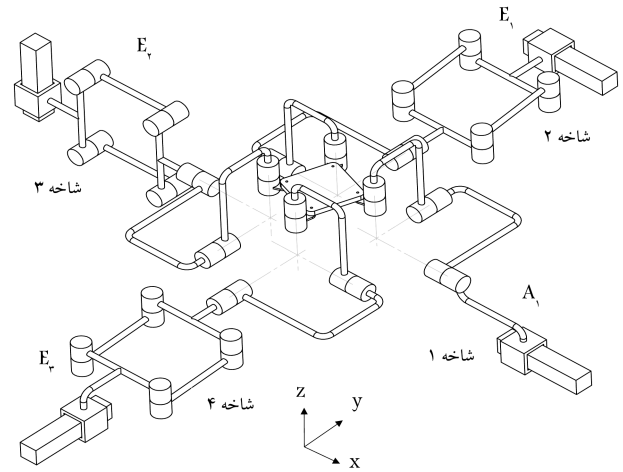
$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & c & d & 1 \\ e & f & 0 & 1 \\ g & 0 & h & 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

که در آن حروف انگلیسی عباراتی برحسب توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با شرح و توضیح نظریه‌ی تبدیلات خطی، به سنتز مکانیزم‌های ۴ درجه آزادی پرداخته شد. این مکانیزم‌ها دارای الگوهای حرکتی $3R1T$ و $2T2R$ و $3T1R$ بودند و از هرکدام نمونه‌هایی با این روش سنتز شدند که دارای شاخه‌های پیچیده و ساده بودند. نشان داده شد که نظریه‌ی تبدیلات خطی با اینکه دارای محاسبات ساده است، یک ابزار کارآمد در سنتز و معیار حرکتی مناسب برای مکانیزم‌های موازی و دارای حلقه‌ی بسته است. پس از آن با استفاده از نظریه‌ی پیچیده به بررسی درجات آزادی و الگوی حرکتی مکانیزم پرداخته شد و ماتریس ژاکوبین مکانیزم‌ها به دست آمد. ماتریس‌های ژاکوبین حاصل شده به نحوی هستند که ضرب داخلی ستون‌ها در آن‌ها صفر می‌شود و بیان‌کننده‌ی آن است که مکانیزم‌ها دارای استقلال حرکتی مناسبی‌اند و معادلات سینماتیکی آن‌ها نسبتاً ساده است.

پیشنهاد می‌شود که در کارهای آتی، از همین روش برای سنتز مکانیزم‌های موازی با درجات آزادی ۳ و ۵ استفاده شود. همین‌طور راهکارهایی برای استقلال بیشتر حرکتی و سادگی ساختار مکانیزم‌ها ارائه شود.



شکل ۱۰. مکانیزم موازی $3PPaRRR-1PRRR$.

سیستم چرخش مکانیزم نشان می‌دهد که مکانیزم دو درجه آزادی انتقالی را ایجاد نمی‌کند؛ بنابراین، الگوی حرکتی آن مطلوب است. تعداد درجات آزادی مکانیزم نیز براساس معیار پیچیده و رابطه‌ی ۱۹ برابر با ۴ به دست می‌آید و ماتریس‌های ژاکوبین آن به صورت روابط ۱۰۶ و ۱۰۷ است:

$$A = I_{4 \times 4} \quad (106)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & c & d & 1 \\ e & f & 0 & 1 \\ g & 0 & h & 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

که در آن حروف انگلیسی عباراتی برحسب توابع مثلثاتی زوایای چرخش هستند که به دلیل طولانی بودن عبارت‌ها آورده نشده‌اند.

۲.۳.۴. مکانیزم موازی $3PPaRRR-1PRRR$

این مکانیزم موازی نیز مانند مکانیزم قبل دارای ۳ شاخه‌ی پیچیده است (شکل ۱۰). این مکانیزم هم به نحوی طراحی شده است که دارای ۳ درجه آزادی حرکت دورانی و یک درجه آزادی حرکت انتقالی باشد. فضای سرعت شاخه‌ها در رابطه‌ی ۱۰۸ ارائه شده است:

$$\begin{aligned} R_{A_1} &= (v_x, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_1} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_\tau} &= (v_x, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ R_{E_\tau} &= (v_x, v_y, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \end{aligned} \quad (108)$$

پانویس‌ها

1. parallel mechanisms
2. degree of freedom (DOF)

3. end effector
4. limb
5. working space
6. singular
7. limited DOF mechanisms

8. Hexapad
9. Hexaglide
10. reconfigurable
11. fully Isotropic
12. Gogu
13. theory of linear transformation
14. screw theory
15. motion pattern
16. Schoenflies
17. over constrained
18. parallelogram
19. spatiality
20. operational space
21. reciprocal

منابع (References)

1. Kong, X. and Gosselin, C., *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*, Springer (2007).
2. Siciliano, B. and Khatib, O., *Springer Handbook of Robotics*, Springer (2008).
3. Stewart, D. "A platform with six degrees of freedom", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, **180**(1), pp. 371-386 (1965).
4. Gosselin, C.M. and Hamel, J.-F. "The agile eye: A high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device", in *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, pp. 781-786 (1994).
5. Birglen, L., Gosselin, C., Pouliot, N., Monsarrat, B. and Laliberté, T. "SHaDe, a new 3-dof haptic device", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **18**(2), pp. 166-175 (2002).
6. Vorndran, S. "Low-inertia parallel-kinematics systems for submicron alignment and handling", *The Parallel Mechanisms Information Center*, Polytec PI, Inc, **16** (2002).
<http://www.parallelemic.org>
7. Li, Y. and Xu, Q. "Design and analysis of a new 3-DOF compliant parallel positioning platform for nanomanipulation", in *Proceeding of, 5th IEEE Conference on Nanotechnology*, Nagoya, Japan, pp. 861-864 (2005).
8. Jensen, K.A., Lusk, C.P. and Howell, L.L. "An XYZ micromanipulator with three translational degrees of freedom", *Robotica*, **24**(03), pp. 305-314 (2006).
9. Zlatanov, D. and Gosselin, C.M. "A family of new parallel architectures with four degrees of freedom", *Computational Kinematics*, pp. 57-66 (2001).
10. Gosselin, C.M., Masouleh, M.T., Duchaine, V., Richard, P., Foucault, S. and Kong, X. "Parallel mechanisms of the multipteron family: Kinematic architectures and benchmarking", in *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, pp. 555-560 (2007).
11. Joshi, S.A. and Tsai, L.-W. "Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators", in *Proceeding of American Society of Mechanical Engineers*, pp. 341-348.
12. Honegger, M., Codourey, A. and Burdet, E. "Adaptive control of the hexaglide, a 6 dof parallel manipulator", in *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, pp. 543-548 (1997).
13. Cai, G., Wang, Q., Hu, M., Kang, M. and Kim, N. "A study on the kinematics and dynamics of a 3-DOF parallel machine tool", *Journal of Materials Processing Technology*, **111**(1), pp. 269-272 (2001).
14. Xi, F., Xu, Y. and Xiong, G. "Design and analysis of a re-configurable parallel robot", *Mechanism and Machine Theory*, **41**(2), pp. 191-211 (2006).
15. Carricato, M. and Parenti-Castelli, V. "Singularity-free fully-isotropic translational parallel mechanisms", *The International Journal of Robotics Research*, **21**(2), pp. 161-174 (2002).
16. Gogu, G. "Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **23**(6), pp. 1021-1039 (2004).
17. Carricato, M. "Fully isotropic four-degrees-of-freedom parallel mechanisms for Schoenflies motion", *The International Journal of Robotics Research*, **24**(5), pp. 397-414 (2005).
18. Gogu, G. "Structural synthesis of fully-isotropic parallel robots with Schnflies motions via theory of linear transformations and evolutionary morphology", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **26**(2), pp. 242-269 (2007).
19. Huang, Z. and Li, Q. "General methodology for type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel manipulators and several novel manipulators", *The International Journal of Robotics Research*, **21**(2), pp. 131-145 (2002).
20. Kong, X. and Gosselin, C.M. "Type synthesis of 5-DOF parallel manipulators based on screw theory", *Journal of Robotic Systems*, **22**(10), pp. 535-547 (2005).
21. Kong, X. and Gosselin, C.M. "Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain", *Journal of Mechanical Design*, **127**(6), pp. 1113-1121 (2005).
22. Kong, X. and Gosselin, C.M. "Type synthesis of 3-DOF spherical parallel manipulators based on screw theory", *Journal of Mechanical Design*, **126**(1), pp. 101-108 (2004).
23. Kong, X. and Gosselin, C.M. "Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory", *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, **20**(2), pp. 181-190 (2004).
24. Gogu, G., *Structural Synthesis of Parallel Robotic Manipulators with Decoupled Motions*, Report ROBEA MAX-CNRS, Springer (2002).
25. Gogu, G., *Fully-Isotropic T3R1-Type Parallel Manipulators*, in: *On Advances in Robot Kinematics*, Eds., Springer (2004).
26. Gogu, G. "Fully-isotropic over-constrained planar parallel manipulators", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 3519-3524 (2004).
27. Gogu, G. "Singularity-free fully-isotropic parallel manipulators with Schonflies motions", *12th International Conference on Advanced Robotics*, pp. 194-201 (2005).

28. Gogu, G. "Fully-isotropic parallel robots with four degrees of freedom T2R2-type", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 960-965 (2005).
29. Gogu, G. "Structural synthesis of maximally regular T3R2-type parallel robots via theory of linear transformations and evolutionary morphology", *Robotica*, **27**(01), pp. 79-101 (2009).
30. Gogu, G., *Structural Synthesis of Parallel Robots Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom*, Springer (2009).
31. Gogu, G., *Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 3: Topologies with Planar Motion of the Moving Platform*, Springer (2010).
32. Gogu, G. "T2R1-type parallel manipulators with bifurcated planar-spatial motion", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **33**, pp. 1-11 (2012).
33. Gogu, G., *Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 5: Basic Overconstrained Topologies with Schönflies Motions*, Springer (2014).
34. Gogu, G. "Mobility and spatiality of parallel robots revisited via theory of linear transformations", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **24**(4), pp. 690-711 (2005).
35. Motevalli, B., Zohoor, H. and Sohrabpour, S. "Structural synthesis of 5 DoFs 3T2R parallel manipulators with prismatic actuators on the base", *Robotics and Autonomous Systems*, **58**(3), pp. 307-321 (2010).
36. Ionescu, T. "Terminology for mechanisms and machine science", *Mech. Mach. Theory*, **38**(7-10), pp. 819-825 (2003).
37. Yu, J., Dai, J.S., Zhao, T., Bi, S. and Zong, G. "Mobility analysis of complex joints by means of screw theory", *Robotica*, **27**(06), pp. 915-927 (2009).
38. Gosselin, C. and Angeles, J. "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **6**(3), pp. 281-290 (Jun 1990).
39. Gao, F., Li, W., Zhao, X., Jin, Z. and Zhao, H. "New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs", *Mechanism and Machine Theory*, **37**(11), pp. 1395-1411 (2002).