

اثر پارامترهای سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده بر محدودی وقوع ناپایداری و دوشاخگی

حمیدرضا حیدری* (استادیار)

محمدرضا اشکوه (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه ملامپ

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۶)
دوری ۲ - ۳، شماره ۲، ص. ۶۱-۵۳

افزایش میرایی سیستم‌های روتور - بیرینگ با استفاده از میراگرهای فیلم فشرده همواره یکی از مؤثرترین راه‌ها برای کنترل ارتعاشات نامطلوب این سیستم‌هاست. از جمله محدودیت‌های استفاده از میراگرهای فیلم فشرده، بروز رفتارهای به شدت غیرخطی در ماشین‌های دوار است که از این تجهیز بهره می‌برند. در این نوشتار، اثر تغییر در پارامترهای سیستم روتور صلب واقع بر میراگر فیلم فشرده همراه فنر جانب مرکز، با در نظر گرفتن وقوع خلاءسازی در فیلم روغن بررسی شده است. بررسی اثر تغییر در پارامترهای سیستم بر پاسخ با استفاده از روش فلوکوت و در دو مرحله انجام گرفته است. ارزیابی نتایج در قالب نمودار مسیر حرکت مرکز روتور و نگاشت پوانکاره نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای بی‌بعد نامیرایی و سرعت دورانی، دوشاخگی‌های مختلف از جمله دوبرابری دوره، نقطه‌ی زینی و نیز پدیده‌ی پرش بین شاخه‌های مختلف پاسخ سیستم رخ خواهد داد.

واژگان کلیدی: پایداری، دوشاخگی، میراگر فیلم فشرده، روتور صلب، خلاءسازی.

۱. مقدمه

استفاده از میراگرهای فیلم فشرده برای افزایش میرایی خارجی سیستم، امروزه به یکی از متداول‌ترین راه‌حل‌ها برای کاهش ارتعاشات نامطلوب روتور تبدیل شده است. به‌عنوان نمونه می‌توان به کاربرد این تجهیز در ماشین‌های دوار که از یاتاقان‌هایی با میرایی ذاتی پایین استفاده می‌کنند (مانند توربین‌های گازی هواپیماها)، اشاره کرد. این تجهیز در ساده‌ترین شکل خود به‌صورت یک فضای حلقوی پراز روغن است که قسمت داخلی آن قسمت بیرونی یک یاتاقان غلظشی را در بر گرفته است و قسمت بیرونی یاتاقان در آن نقش ژورنال را ایفا می‌کند که با استفاده از یک پایه‌ی قفل‌کن از دوران آن جلوگیری می‌شود و تنها می‌تواند درون فضای میراگر فیلم فشرده حول نقطه‌ی تعادل خود حرکت گردشی داشته باشد. میراگرهای فیلم فشرده به دو شکل به‌کار می‌روند که عبارت‌اند از میراگر فیلم فشرده همراه فنر جانب مرکز و بدون فنر جانب مرکز. در حالت بدون فنر جانب مرکز، در ابتدا ژورنال روی کف محفظه درون میراگر خوابیده است و پس از راه‌اندازی روتور با فراهم آمدن نیروی بالابری لازم، از موقعیت خود بلند می‌شود و درون محفظه‌ی داخلی میراگر گردش می‌کند. در حالت میراگر همراه فنر جانب مرکز، ژورنال توسط فنر جانب مرکز در مرکز محفظه‌ی درون میراگر مقید شده است. دو آرایش توضیح داده‌شده در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. کانکی و لیدر با بررسی سیستم روتور همراه میراگر فیلم فشرده اثر مثبت این تجهیز را در کاهش ارتعاشات نامطلوب سیستم، به‌خصوص در هنگام عبور از سرعت‌های

* نویسنده مسئول

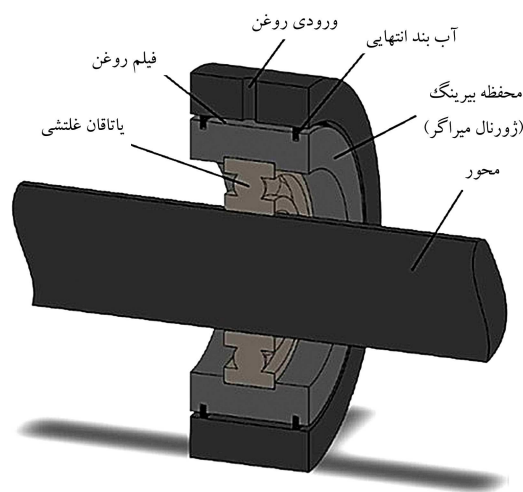
تاریخ: دریافت ۱۹/۱۱/۱۳۹۴، اصلاحیه ۱۲/۸/۱۳۹۵، پذیرش ۱۵/۹/۱۳۹۵.

hr.heidari@malayeru.ac.ir
ashkoo@rocketmail.com

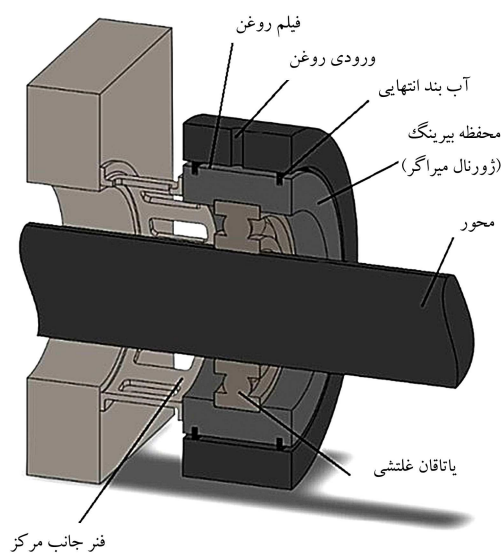
بحرانی، و نیز کاهش مشکلات ناپایداری روتور تأیید کردند.^[۱] هر چند نمی‌توان منکر نقش مثبت میراگرهای فیلم فشرده در کنترل ارتعاشات سیستم شد، رفتار ذاتی به‌شدت غیرخطی که به واسطه‌ی این تجهیز به سیستم تحمیل می‌شود سبب ایجاد محدودیت در استفاده از آن شده است. کلید اصلی این رفتار غیرخطی، کنش و واکنش بین نیروی نامیرایی روتور و نیروهای فیلم روغن میراگر، به‌خصوص در حالت وجود خلاءسازی در سیستم است. وقوع خلاءسازی در فیلم روغن میراگر از یک طرف سبب کم‌شدن حجم مؤثر روان‌کننده (روغن) و در نتیجه کاهش میرایی و افزایش دامنه‌ی نوسانات سیستم می‌شود و از طرف دیگر سبب ایجاد نیروهای کراس - کوبل^۱ در سیستم می‌شود که این نیروها از عوامل اصلی ناپایدار کردن سیستم‌های روتور - بیرینگ هستند.

تهیه‌ی یک مدل ریاضی صحیح از فیلم روغن درون میراگر فیلم فشرده در حالت وقوع خلاءسازی، در مدل‌سازی سیستم‌های روتور - بیرینگ بسیار مهم است که از گذشته مورد توجه پژوهشگران این زمینه بوده است. تلاش برای یافتن مؤلفه‌های خطی سختی و میرایی برای میراگرهای فیلم فشرده به‌صورت مجزا منجر به ارائه‌ی این راه حل شد که مؤلفه‌های سختی و میرایی میراگر فیلم فشرده را با استفاده از مؤلفه‌های سختی و میرایی به‌دست آمده برای یاتاقان‌های ژورنال و با صفر قرار دادن عبارت سرعت زاویه‌ی به‌دست آورند. هولمز، با اشاره به این موضوع که با صفر قرار دادن عبارت سرعت زاویه‌ی در مؤلفه‌های سختی و میرایی یاتاقان‌های ژورنال، عبارت سختی صفر خواهد شد و اشاره به اینکه میراگرهای فیلم فشرده حتی در حالت نبود فنر جانب مرکز نیز توانایی تحمل بارهای دینامیکی را دارند، این روش را مردود

پاسخ سیستم رخ می‌دهد.^[۸] ژاؤ و همکاران با بهره‌گیری از روش فلوکوت، پایداری و دوشاخگی پاسخ روتور صلب را بررسی کردند. نتایج به‌دست آمده بار دیگر اثر مخرب بالا بودن میزان نامیزانی روتور را تأیید کرد و نشان داد که به‌ازای مقادیر بالای نامیزانی، پایداری پاسخ سیستم از بین می‌رود و پاسخ‌های زیرهارمونیک و شبه‌نوسانی از آن منشعب می‌شود.^[۹] عنایت حسین و همکاران، پاسخ غیرخطی روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده را در حالت بدون فنر جانب مرکز و بدون بررسی اثر نیروی تحریک یا تاقان‌های غلتشی بررسی کردند. مجموعه‌ی معادلات غیرخودگردان سیستم، به‌وسیله‌ی افزودن معادلات یک نوسانگر غیرخطی، به خودگردان تبدیل شد و با استفاده از روش پیوستگی و بهره‌گیری از نرم‌افزار AUTO، پایداری و دوشاخگی پاسخ سیستم با در نظر گرفتن تغییرات پارامترهای نامیزانی (U)، وزن (W)، بیرینگ (B)، بررسی شد.^[۱۰] در پژوهشی دیگر، عنایت حسین و همکاران سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده را با در نظر گرفتن فنر جانب مرکز و در نتیجه افزودن پارامتر فنر (S) به پارامترهای قبلی، بررسی کردند.^[۱۱] کین و همکاران، پایداری و دوشاخگی پاسخ سیستم روتور تغییرشکل‌پذیر قرارگرفته بر روی پایه‌ی تغییرشکل‌پذیر را با استفاده از روش فلوکوت بررسی کردند. نتایج این شبیه‌سازی در دو دسته نمودار نشان داده شده است. دسته‌ی اول مربوط به اثر سرعت دوران بر پاسخ روتور است که نشان می‌دهد با افزایش سرعت، پاسخ سیستم از پاسخ شبه‌نوسانی به نوسانی تغییر می‌کند. در این میان، بین پاسخ‌های نوسانی مختلف پرش به‌وجود می‌آید و در نهایت پاسخ سیستم مجدداً به‌حالت شبه‌نوسانی بازمی‌گردد. دوشاخگی‌های رخ داده شامل نقطه‌ی زینی و هویف ثانویه‌اند. سری دوم نمودارها مربوط به بررسی اثر سختی تکیه‌گاه بر پاسخ بیرینگ است که نشان می‌دهد سختی تکیه‌گاه اثر شدیدی بر نیروی روغن درون میراگر فیلم فشرده دارد به‌طوری‌که افزایش سختی تکیه‌گاه می‌تواند سبب بروزگردش روغن در میراگر فیلم فشرده شود.^[۱۲] ژو و همکاران پاسخ دینامیکی غیرخطی یک روتور همراه بال بیرینگ^۲ و میراگر فیلم فشرده همراه حلقه‌ی شناور را به‌صورت توری و آزمایشگاهی بررسی کردند. در این مدل، اثرات متقابل بین روتور، بال بیرینگ، و میراگر فیلم فشرده همراه حلقه‌ی شناور و نیز نیروهای تماسی غیرخطی هر تری بین ساچمه‌ها و بدنه‌ی بیرینگ بررسی شده است. نتایج تحلیل عددی نشان می‌دهد که کارایی میراگر فیلم فشرده همراه حلقه‌ی شناور در جلوگیری از وقوع ناپایداری و پاسخ‌های ناهمگام، در شرایط مشابه، بهتر از میراگرهای فیلم فشرده‌ی معمولی است که این موضوع با استفاده از نتایج آزمایشگاهی نیز تأیید شده است. همچنین اثر سختی تکیه‌گاه، جرم حلقه‌ی شناور، و سختی بال بیرینگ در جلوگیری از وقوع پاسخ ناهمگام بررسی شده است. نتایج این تحلیل نشان می‌دهد که محدوده‌ی سرعت وقوع پاسخ ناهمگام برای روتور با افزایش سختی تکیه‌گاه افزایش می‌یابد. زمانی‌که جرم حلقه‌ی شناور کمتر از جرم متمرکز واقع در محل ژورنال باشد، محدوده‌ی سرعت پاسخ ناهمگام با افزایش جرم حلقه‌ی شناور کاهش می‌یابد و در حالتی‌که جرم حلقه‌ی شناور بیش از جرم متمرکز در محل ژورنال باشد، نظم خاصی در نتایج مشاهده نمی‌شود.^[۱۳] کائو و همکاران، رفتار غیرخطی حالت گذرای روتور تغییر شکل‌پذیر به‌همراه سه صفحه‌ی واقع بر مجموعه‌ی جفت‌شده‌ی ژورنال بیرینگ و میراگر فیلم فشرده‌ی غیرخطی را بررسی کردند. نیروهای غیرخطی ناشی از میراگر فیلم فشرده و ژورنال بیرینگ با استفاده از معادله‌ی رینولدز محاسبه شد. نتایج این تحلیل ضمن اینکه نقش مثبت جفت‌شدگی میراگر فیلم فشرده و ژورنال بیرینگ در افزایش پایداری دینامیکی سیستم در محدوده‌ی وسیعی از سرعت دورانی آن و نیز کاهش نیروی وارد بر بیرینگ‌ها بر اثر وجود نیروی مخرب نامیزانی روتور را تأیید می‌کند، نشان‌دهنده‌ی رفتارهای غیرخطی متفاوتی از جمله پاسخ‌های زیرهارمونیک و بالای هارمونیک در پاسخ سیستم می‌باشد.^[۱۴] فنگ و همکاران پاسخ اجباری



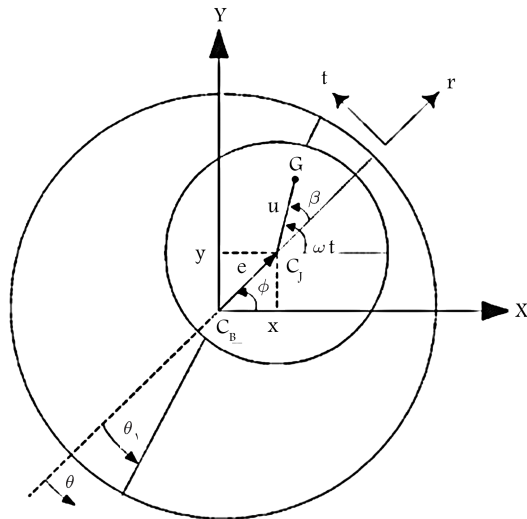
الف) بدون فنر جانب مرکز؛



ب) همراه فنر جانب مرکز.

شکل ۱. آرایش نصب میراگر فیلم فشرده.

دانست.^[۳] عده‌ی دیگری از پژوهشگران نیز از طریق روش‌های مختلف، درصدد یافتن عبارات جداگانه سختی و میرایی برای میراگرهای فیلم فشرده برآمدند.^[۵،۴] باروس و همکاران، سعی کردند مؤلفه‌های سختی و میرایی برای میراگرهای فیلم فشرده در حالت وجود خلا‌سازی را با استفاده از روش حداقل مربعات و معادله‌ی رینولدز به‌صورت همزمان استخراج کنند. مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده، با نتایج به‌دست آمده از مدل غیرخطی استخراج‌شده از معادله‌ی رینولدز نشان داد که این نتایج تنها در سرعت‌های دورانی پایین و میزان کم نامیزانی روتور قابل قبول خواهند بود.^[۵] چو و هولمز با بررسی توری و آزمایشگاهی یک پمپ گریز از مرکز کوچک، نقش مثبت این میراگرها را در به تأخیر انداختن وقوع اولین ناپایداری در سیستم و پایداری کردن سیستم پس از عبور از اولین سرعت حدی ناپایداری نشان دادند.^[۶] تیور و کومار با ساده‌سازی یک سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده با حذف وقوع خلا‌سازی و با فرض مسیر حرکت دایره‌ی برای ژورنال نشان دادند که در این حالت سیستم رفتار غیرخطی بزرگی از خود نشان نمی‌دهد.^[۷] موهان و هان نشان دادند که به‌ازای مقادیر بالای نیروی نامیزانی روتور، پدیده‌ی پرش در



شکل ۲. نمایش دستگاه‌های مختصات (ثابت و چرخان) به‌کار گرفته شده در تحلیل.

ضخامت فیلم روغن در جهت سرعت زاویه‌ی روتور (شکل ۲)، L طول میراگر، c لقی شعاعی میراگر، z مختصه‌ی مربوط به راستای محوری درون میراگر و نهایتاً μ لزجت دینامیکی روان‌کننده است.

مؤلفه‌های نیروی فیلم روغن در مختصات قطبی را می‌توان با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی توزیع فشار در میراگر (رابطه‌ی ۱) در تمام سطح میراگر محاسبه و به‌شکل تابعی از ε ، $\dot{\phi}$ و $\dot{\phi}$ بیان کرد.^[۱۷]

$$F_r = -\frac{\mu RL^2}{c^2} [I_1 \dot{\varepsilon} + I_2 \varepsilon \dot{\phi}] \quad (2)$$

$$F_t = -\frac{\mu RL^2}{c^2} [I_2 \dot{\varepsilon} + I_3 \varepsilon \dot{\phi}] \quad (3)$$

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \pi} \frac{\cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta \quad (4)$$

$$I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta \quad (5)$$

$$I_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \pi} \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta \quad (6)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{\varepsilon}}{\varepsilon \dot{\phi}} \right) \quad (7)$$

θ_1 نشان‌دهنده‌ی موقعیت زاویه‌ی شروع ناحیه‌ی فشار مثبت است که از θ اندازه‌گیری می‌شود.

انتگرال‌های I_1 ، I_2 و I_3 را می‌توان به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد:^[۱۷]

$$I_1 = \left(-\frac{\varepsilon \sin \theta_1 (3 + (2 - 5\varepsilon^2) \cos^2 \theta_1)}{(1 - \varepsilon^2)^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1)^2} + \frac{\alpha (1 + 2\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right) \quad (8)$$

$$I_2 = \frac{(2\varepsilon \cos^2 \theta_1)}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1)^2} \quad (9)$$

$$I_3 = \left(-\frac{\varepsilon \sin \theta_1 (1 - 2 \cos^2 \theta_1 + \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1)}{(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta_1)^2} + \frac{\alpha}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right) \quad (10)$$

سیستم روتور تغییرشکل‌پذیر همراه با چند صفحه - که از یک سر با استفاده از میراگر فیلم فشرده مهار شده است - را با در نظر گرفتن نیروی نامیرانی، و نیز وجود و عدم وجود اثرات ایزرسی سیال و نیروهای چندجهته و سختی فنر جانب مرکز، و نیز اثر ژيروسکوپی مربوط به صفحه‌های روتور بررسی کرده‌اند. نتایج وقوع پدیده‌ی پرش در پاسخ سیستم به‌ازای مقادیر بالای نامیرانی و وقوع پاسخ‌های نوسانی مختلف به‌ازای مقادیر بالای خروج از مرکز میراگر را نشان می‌دهد؛ همچنین حساسیت نداشتن میراگر به‌وجود یا عدم وجود اثر ژيروسکوپی تأیید شده است.^[۱۵] مدرس احمدی و همکاران با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی به بررسی رفتار دینامیکی روتور تغییر شکل‌پذیر با یاتاقان غلتشی و میراگر فیلم فشرده به‌همراه فنر جانب مرکز پرداخته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش لب‌های موج، حرکات غیرهارمونیک و آشوبناک در پاسخ سیستم افزایش می‌یابد. همچنین با تغییر میزان ضخامت فیلم روغن نشان داده شد که برای ضخامت فیلم روغن، مقدار بهینه‌ی برای دستیابی به مقدار بیشینه‌ی میرایی برای سیستم وجود دارد.^[۱۶]

در پژوهش حاضر، پایداری و دوشاخگی پاسخ‌های نوسانی یک روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده با فنر جانب مرکز، با استفاده از روش فلوکوئت، تحلیل شده است. در مرحله‌ی اول تنها اثر تغییر در پارامترهای بی‌بعد نامیرانی روتور و سرعت دورانی بررسی شده است. اما در مرحله‌ی دوم با در نظر گرفتن تغییر در سایر پارامترهای سیستم سعی شده است مرز پایداری پاسخ دوره‌ی ۱ - سیستم به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها یافته شود.

۲. مدل‌سازی و یافتن معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم

۱.۲. مدل‌سازی فیلم روغن میراگر فیلم فشرده

مؤلفه‌های نیروی فیلم روغن میراگر فیلم فشرده را می‌توان از طریق انتگرال‌گیری از رابطه‌ی توزیع فشار در فیلم روغن در سرتاسر سطح میراگر به‌دست آورد. رابطه‌ی توزیع فشار در میراگر، از طریق معادله‌ی رینولدز که از معادله‌ی ناویر - استوکس استخراج می‌شود با فرضیات ساده‌کننده‌ی زیر به‌دست می‌آید:

۱. ضخامت فیلم روغن در مقایسه با شعاع ژورنال کوچک است. بنابراین، پیچش در فیلم روغن ناچیز خواهد بود.
۲. تغییرات فشار در امتداد ضخامت فیلم روغن (در راستای شعاعی) ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود.
۳. تغییرات سرعت در امتداد ضخامت فیلم روغن (در راستای شعاعی) ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود. بنابراین، جریان سیال روان‌کننده یک جریان دو بعدی است.
۴. جریان سیال روان‌کننده، یک جریان پایاست و به‌همین علت از نیروهای داخلی وارد بر المان‌های سیال صرف‌نظر می‌شود.
۵. از نیروهای حجمی وارد بر ذرات سیال صرف‌نظر شده است.
۶. جریان سیال روان‌کننده یک جریان آرام است.

رابطه‌ی توزیع فشار در یک میراگر کوتاه همراه خلاءسازی در دستگاه مختصات چرخان که از طریق معادله‌ی رینولدز استخراج شده به شکل زیر است:^[۱۷]

$$P(\theta, z) = \frac{6\mu}{c^2} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta + \dot{\varepsilon} \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (11)$$

که در آن ε و $\dot{\varepsilon}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جابه‌جایی و سرعت در راستای شعاعی، $\dot{\phi}$ بیان‌کننده‌ی سرعت زاویه‌ی، θ مختصه‌ی زاویه‌ی اندازه‌گیری شده از مکان بیشترین

۶. از نیروی تحریک بال بیرینگ‌ها صرف نظر شده است.

بر اساس فرض اول، روتور در حین دوران همانند یک جسم صلب رفتار می‌کند و خمشی در آن ایجاد نخواهد شد. فرض تقارن نیز سبب می‌شود که نیروهای عکس‌العمل در هر دو میراگر کاملاً مشابه باشند. وجود عدم تقارن در روتور می‌تواند سبب بروز رفتار دینامیکی کاملاً متفاوت در دو میراگر شود و همچنین باعث بروز جابه‌جایی محوری روتور شود. بر اساس فرض دوم، محور اصلی اینرسی روتور با محور دوران روتور موازی است. در این حالت سیستم در حالت تعادل دینامیکی قرار دارد، هرچند از نظر استاتیکی نامتعادل باشد. چهار فرض اول، سیستم را به یک سیستم با دو درجه آزادی تقلیل می‌دهند که تنها شامل حرکات عرضی در مختصات متعامد (X, Y) است. همچنین فرضیات اعمال شده موجب می‌شود که اولین مود طبیعی حرکتی روتور، مود استوانه‌ای (اولین مود حرکتی جسم صلب) باشد و به تبع آن حرکت دو میراگر با یکدیگر هم‌فاز باشد. بررسی مدل دو درجه آزادی ارائه شده هیچ نشانی از بروز مود مخروطی برای روتور ندارد. بنابه فرض پنجم بروز رفتار غیرخطی در سیستم را باید تنها در رفتار غیرخطی فیلم روغن درون میراگر فیلم فشرده جستجو کرد. با اعمال فرضیات بیان شده واضح است که برای مدل‌سازی سیستم روتور - بیرینگ ارائه شده، مدل‌کردن نیمی از روتور کافی است. معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر سیستم را می‌توان با استفاده از مختصات (x, y) توصیف کرد که به جابه‌جایی مرکز هندسی ژورنال نسبت به مرکز هندسی محفظه‌ی بیرینگ^۲ مربوط است. با در نظر گرفتن نیروهای خارجی اعمال شده بر ژورنال شامل نیروهای فیلم روغن، وزن، و نیروی نامیزانی، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر حرکت مرکز ژورنال عبارت‌است از:

$$m\ddot{x} = F_{DX} - kx + mu\omega^t \cos \omega t \quad (14)$$

$$m\ddot{y} = F_{DY} - ky - mg + mu\omega^t \sin \omega t \quad (15)$$

با قرار دادن روابط ۲ و ۳ در روابط ۱۲ و ۱۳ و قرار دادن نتیجه‌ی حاصل در روابط ۱۴ و ۱۵، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر سیستم به دست می‌آید. به منظور بی‌بعدسازی معادلات به دست آمده، می‌توان دو طرف معادله را بر $mc\omega^2$ تقسیم کرد. در نتیجه، معادلات دیفرانسیل بی‌بعدشده‌ی حاکم بر سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده با فنر جانب مرکز در حضور خلاءسازی به شکل زیر خواهد بود:

$$X'' = -\frac{B_b}{\Omega} \left[\frac{X}{\varepsilon} [I_1 \varepsilon' + I_2 \varepsilon \phi'] - \frac{Y}{\varepsilon} [I_2 \varepsilon' + I_1 \varepsilon \phi'] \right] - \frac{1}{\Omega^2} X + U \cos \tau \quad (16)$$

$$Y'' = -\frac{B_b}{\Omega} \left[\frac{Y}{\varepsilon} [I_1 \varepsilon' + I_2 \varepsilon \phi'] + \frac{X}{\varepsilon} [I_2 \varepsilon' + I_1 \varepsilon \phi'] \right] - \frac{1}{\Omega^2} Y - \frac{W}{\Omega^2} + U \sin \tau \quad (17)$$

که در آن، $U = \frac{u}{c}$ ، $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ ، $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ، $B_b = \frac{\mu RL^2}{m\omega_n c^2}$ و $W = \frac{g}{\omega_n^2 c}$ ، به عنوان پارامتر یاتاقان، نشان‌دهنده‌ی توانایی میراگر فیلم فشرده در فراهم کردن میرایی برای سیستم است.

۳. تحلیل پایداری و دوشاخگی سیستم

روش فلوکوت یک از مناسب‌ترین روش‌ها برای بررسی پایداری پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب نوسانی است. تحلیل پایداری در این روش بر اساس ضرایب فلوکوت^۴ است. این ضرایب، مقادیر ویژه‌ی ماتریس مونودرومی^۵ هستند.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\varepsilon \sin \theta_1}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \right) \quad (11)$$

برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم روتور - بیرینگ همراه میراگر فیلم فشرده، مؤلفه‌های نیروی فیلم روغن میراگر در مختصات دکارتی نیاز است. این مؤلفه‌ها را می‌توان به‌سادگی و با استفاده از معادلات زیر به مختصات دکارتی تبدیل کرد.

$$F_{DX} = F_r \cos \phi - F_t \sin \phi \quad (12)$$

$$F_{DY} = F_r \sin \phi + F_t \cos \phi \quad (13)$$

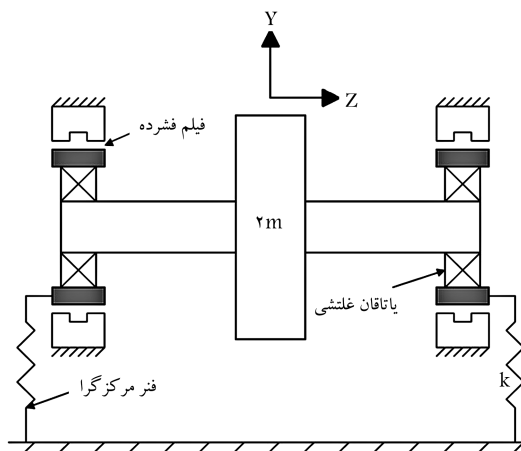
۲.۲. مدل‌سازی سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده

در شکل ۳، طرح‌واره‌ی از سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده نشان داده شده است. روتور که وزنی معادل $2m$ دارد روی دو عدد بال بیرینگ کاملاً مشابه قرار داده شده است که توسط دو میراگر فیلم فشرده‌ی مشابه جفت شده‌اند. هر کدام از میراگرها یک فنر جانب مرکز دارند.

نامیزانی استاتیکی خالص روتور، به‌وسیله خروج از مرکزیت آن (u) سنجیده می‌شود که به فاصله‌ی مرکز جرم روتور (G) نسبت به مرکز هندسی دوران مربوط است. در حالت روتور صلب، مرکز هندسی دوران روتور با مرکز هندسی ژورنال (CJ) برابر است. نمادها و دستگاه‌های مختصات استفاده شده، در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. دستگاه مختصات دکارتی ثابت (X, Y) در مرکز میراگر (CB) در نظر گرفته شده است و دستگاه مختصات قطبی (r, t) نیز با سرعت زاویه‌ی ژورنال درون میراگر دوران می‌کند.

برای استخراج معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده با فنر جانب مرکز، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

۱. روتور صلب و متقارن است.
۲. نامیزانی روتور کاملاً استاتیکی است و دقیقاً در وسط روتور و روی صفحه‌ی میانی قرار دارد.
۳. از اثر ژيروسکوپی صرف نظر شده است.
۴. از حرکت روتور در راستای محوری صرف نظر شده است.
۵. فنر جانب مرکز به‌عنوان فنر خطی در نظر گرفته شده است.



شکل ۳. طرح‌واره‌ی از سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده.

فضای حالت به صورت کلی زیر قابل نمایش است:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in R^n \quad (18)$$

با فرض $x = \varphi(t)$ به عنوان پاسخ نوسانی سیستم با دوری نوسان T ، معادله آشفتگی متناظر با این پاسخ از سیستم به شکل زیر خواهد بود:

$$\delta \dot{\varphi} = A(\varphi(t), t) \delta \varphi \quad (19)$$

در رابطه ۱۹، A بیان‌کننده‌ی ماتریس ژاکوبین است که رابطه‌ی $A(t+T) = A(t)$ برای آن برقرار است. بر اساس این رابطه، ماتریس A ماتریسی دوره‌یی با دوره تناوب T است. بر اساس روش فلوکوئت، اگر $\Phi(t)$ ماتریس پاسخ پایه برای معادله آشفتگی باشد، آنگاه ماتریس B به عنوان ماتریس مونودرومی سیستم شناخته خواهد شد که رابطه‌ی $\Phi(t+T) = \Phi(t)B$ برای آن برقرار می‌باشد. در این صورت، مقادیر ویژه‌ی این ماتریس همان ضرایب فلوکوئت خواهند بود.^[۱۸] بنابراین، با یافتن ماتریس مونودرومی، تحلیل پایداری و دوشاخگی سیستم مورد نظر با استفاده از مقادیر ویژه‌ی این ماتریس به سادگی قابل انجام خواهد بود. اما یافتن ماتریس مونودرومی در عمل کار دشواری است و هیچ روش تحلیلی مؤثری نیز برای یافتن آن وجود ندارد. به همین علت، برای محاسبه‌ی این ماتریس از روش‌های عددی استفاده می‌شود. یکی از پرکاربردترین این روش‌ها، روش تیراندازی است. از طرفی ماتریس مونودرومی به تبع آن مقادیر ضرایب فلوکوئت، به ازای یک پاسخ نوسانی مشخص از سیستم به دست می‌آید. در ادامه، روش محاسبه‌ی ماتریس مونودرومی و پاسخ نوسانی سیستم با استفاده از روش تیراندازی به صورت همزمان شرح داده خواهد شد.

با در نظر گرفتن $x(t)$ به عنوان پاسخ نوسانی برای معادله ۱۸، به ازای شرایط اولیه η ، عبارت $x(0) = \eta$ معرف شرایط اولیه‌ی سیستم و $x(t, \eta)$ معرف مسیر پاسخ سیستم است. بنابراین، با در نظر گرفتن $x(t)$ به عنوان پاسخ نوسانی معادله ۱۸ با دوری نوسان T ، رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$x(T, \eta) = \eta \quad (20)$$

منظور از یافتن پاسخ نوسانی سیستم، یافتن مقادیر T و η به گونه‌یی است که عبارت ۲۰ برقرار باشد. معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم روتور - بیرینگ نامیزان، از نوع غیرخودگردان با تحریک هارمونیک خواهد بود که در آن دوره‌ی T مربوط به پاسخ نوسانی سیستم، مضربی از دوره‌ی تحریک سیستم است. بنابراین، برای یافتن پاسخ نوسانی سیستم تنها مجهول مسئله η است.

استراتژی در نظر گرفته شده برای حل مسئله عبارت است از تبدیل مسئله مقدار اولیه به یک مسئله مقدار مرزی دونقطه‌یی با استفاده از روش تیراندازی و یافتن شرط اولیه $x(0) = \eta$ و پاسخ $x(t, \eta)$ به گونه‌یی که رابطه‌ی ۲۰ برقرار باشد. مجموعه‌ی معادلات ۱۸ و ۲۰ بیان‌کننده‌ی معادله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی مذکور است و پاسخی از سیستم که در $t = 0$ از مقدار η آغاز شود و در $t = T$ در همان مقدار اولیه باشد نیز بیان‌کننده‌ی پاسخ نوسانی مورد نظر است. برای یافتن مقدار مجهول η ، ابتدا کار با حدس اولیه η_0 آغاز می‌شود. از آنجا که این حدس با مقدار حقیقی فاصله دارد باید آن را اصلاح کرد. برای اصلاح مقدار η_0 از استراتژی روش نیوتون - رافسون^{۱۰} به شکل زیر استفاده می‌شود:

$$\delta \eta = \eta - \eta_0 \quad (21)$$

در صورت صحیح بودن حدس، عبارت زیر باید با لقی قابل قبولی برقرار باشد:

$$x(T, \eta_0 + \delta \eta) - (\eta_0 + \delta \eta) \approx 0 \quad (22)$$

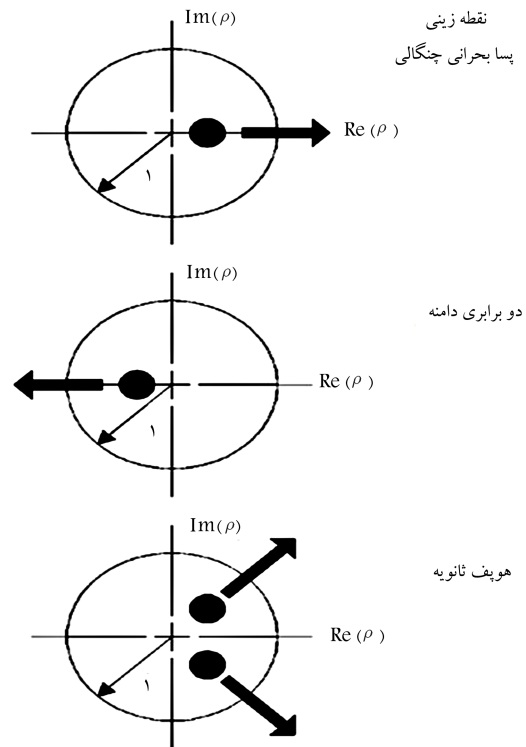
روش یافتن ماتریس مونودرومی در ادامه‌ی این بخش توضیح داده خواهد شد. بر اساس روش فلوکوئت، اگر نمایش تمام ضرایب فلوکوئتی که به ازای یک پاسخ نوسانی مشخص از سیستم به دست می‌آیند، روی دستگاه مختصات حقیقی - موهومی درون دایره‌یی به شعاع واحد قرار گیرد، پاسخ مورد نظر پایدار است. متعاقباً، در صورت خروج یکی از این مقادیر از دایره‌ی واحد، پاسخ مورد نظر ناپایدار می‌شود و دوشاخگی رخ خواهد داد. همچنین، جهت و چگونگی خروج ضرایب فلوکوئت از دایره‌ی واحد تعیین‌کننده‌ی نوع و کیفیت وقوع دوشاخگی در سیستم است. در ادامه به بررسی حالات مختلف خروج این مقادیر از دایره‌ی واحد و معنای هر کدام از این حالات پرداخته شده است:

حالت اول: اگر یکی از ضرایب فلوکوئت از سمت ۱+ از دایره‌ی واحد خارج شود، دوشاخگی رخ داده از یکی از سه نوع نقطه‌ی زینی، پسابحرانی^۶، یا چنگالی^۷ خواهد بود.

حالت دوم: اگر یکی از ضرایب فلوکوئت از سمت ۱- از دایره‌ی واحد خارج شود، دوشاخگی رخ داده از نوع دوبرابری دوره^۸ خواهد بود. در این حالت پاسخی که بعد از دوشاخگی ایجاد خواهد شد، دارای دوره‌ی نوسان دو برابر دوره‌ی پاسخ اول خواهد بود.

حالت سوم: اگر دو عدد از ضرایب فلوکوئت مختلط مزدوج در راستای محور حقیقی از دایره‌ی واحد خارج شوند، دوشاخگی رخ داده از نوع هوپف ثانویه خواهد بود.^[۱۸]

در شکل ۴ حالات مختلف بروز دوشاخگی در پاسخ نوسانی سیستم نشان داده شده است. معادله‌ی غیرخطی حاکم بر یک سیستم روتور - بیرینگ نامیزان به شکل یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی معمولی غیرخودگردان^۹ است که در فرم



شکل ۴. حالات مختلف وقوع دوشاخگی در پاسخ نوسانی سیستم.

بسط رابطی ۲۲ با استفاده از سری تیلور و حذف جمله‌های غیرخطی بر حسب $\delta\eta$ ، نتیجه می‌دهد:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}(T, \eta_0) - I \right] \delta\eta = \eta_0 - x(T, \eta_0) \quad (23)$$

در ادامه باید مقدار $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ را در (T, η_0) به دست آورد. برای این کار از دو طرف معادله ۲۳ بر حسب η مشتق گرفته می‌شود که حاصل آن عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = D_x F(x; M) \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (24)$$

همچنین با مشتق‌گیری از شرط اولیه $x(0) = \eta$ بر حسب η عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}(0) = I \quad (25)$$

با حل همزمان معادله ۱۸ با شرط اولیه $x(0) = \eta$ و معادله ۲۴ با شرط اولیه $\frac{\partial x}{\partial \eta}(0) = I$ در بازه $0 \leq t \leq T$ ، مقادیر $\frac{\partial x}{\partial \eta}(T, \eta_0)$ و $x(T, \eta_0)$ به عنوان مجهولات معادله ۲۳ به دست می‌آید. با قرار دادن این مقادیر در معادله، میزان خطای $\delta\eta$ محاسبه می‌شود که بر اساس آن و با استفاده از استراتژی روش نیوتون - رافسون می‌توان فرض جدیدی را برای η_0 در نظر گرفت. این فرایند تا حصول کمترین میزان خطای قابل قبول برای مقدار $\delta\eta$ ادامه خواهد یافت. پس از نزدیک شدن مقدار $\delta\eta$ به سمت صفر با میزان لقی قابل قبول، مقدار η_0 به دست آمده در آخرین مرحله همان مقدار η مورد نظر برای یافتن پاسخ نوسانی سیستم با دوره نوسان T در عبارت ۲۰ خواهد بود.

به عبارت دیگر، پاسخ نوسانی سیستم با دوره نوسان T به دست آمده است. از طرفی مقدار $\frac{\partial x}{\partial \eta}(T, \eta_0)$ به دست آمده در مرحله آخر نیز همان ماتریس مونودرومی مورد نظر است که مقادیر ویژه آن ضرایب فلوکوئت است و معیار تحلیل پایداری و دوشاخگی پاسخ نوسانی مورد نظر می‌باشند.

استفاده از روش تیراندازی برای یافتن پاسخ‌های نوسانی سیستم می‌تواند کمی وقت‌گیر و دشوار باشد. از این رو، در تحقیق حاضر از یک تکنیک ساده‌کننده در کنار روش استاندارد معرفی شده استفاده شده است. برای استفاده از این روش، ابتدا مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل غیرخودگردان سیستم با استفاده از افزودن معادلات یک نوسانگر غیرخطی به خودگردان تبدیل می‌شود؛^{[۱۱]، [۱۲]} سپس به‌ازای مقادیر پایین پارامتر دوشاخگی^{۱۱} و نیز به‌ازای یک شرط اولیه دلخواه در یک بازه‌ی زمانی دلخواه، از روش رانگ - کوتا برای حل این مجموعه معادلات استفاده می‌شود. در صورت مشاهده‌ی تمایل پاسخ سیستم به همگرایی به یک پاسخ نوسانی این روند ادامه خواهد یافت؛ به این شکل که در هر مرحله، پاسخ سیستم در پایان بازه‌ی زمانی مشخص شده به عنوان شرط اولیه در مرحله‌ی بعد به کار می‌رود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که پاسخ سیستم دقیقاً روی یکی از پاسخ‌های نوسانی منطبق شود. با یافتن پاسخ نوسانی مورد نظر، در حقیقت مقدار η به دست آمده است. حال با حل همزمان معادلات ۱۸ و ۲۴ به‌ازای شرط اولیه به دست آمده می‌توان ماتریس مونودرومی و ضرایب فلوکوئت را محاسبه کرد.

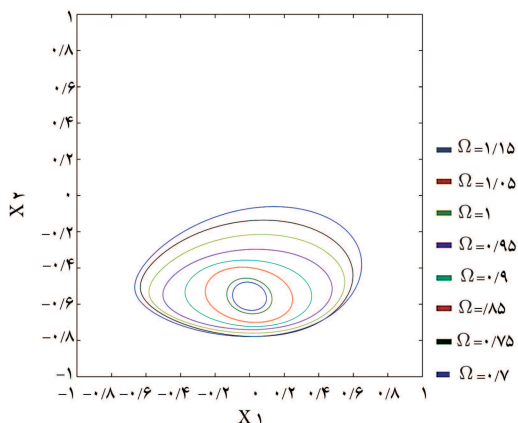
۴. ارائه‌ی نتایج، بحث و بررسی

همان‌گونه که در بخش قبل اشاره شد، برای حل عددی مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل موجود از روش رانگ - کوتا استفاده شده است. پارامترهای سیستم در این شبیه‌سازی،

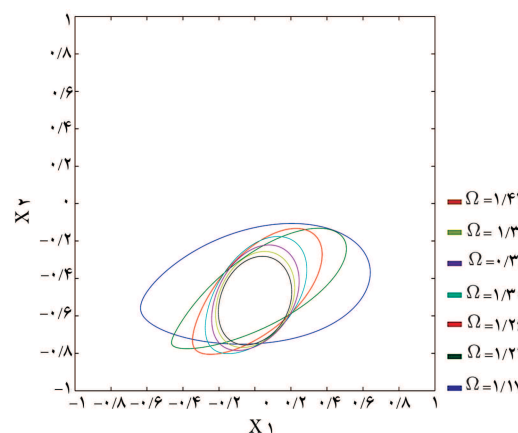
$W = 6/53$ ، $B_b = 0/86$ ، در نظر گرفته شده است. با توجه به تأثیر بسیار زیاد سرعت دورانی و نامیزانی بر پاسخ روتور، در این مرحله اثر تغییرات پارامتر نسبت بی‌بعد سرعت دورانی، Ω ، و پارامتر بی‌بعد نامیزانی، U ، بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که در ابتدا و به‌ازای افزایش پارامتر بی‌بعد نامیزانی روتور U و نیز نسبت سرعت دورانی Ω ، سیستم به حفظ پایداری پاسخ پریرود - ۱ تمایل دارد. در این حالت به‌ازای افزایش نسبت سرعت دورانی، Ω ، ناپایداری و دوشاخگی در پاسخ سیستم مشاهده نخواهد شد و فقط افزایش دامنه‌ی پاسخ روتور تا نسبت سرعت دورانی ۱/۱۵ (شکل ۵) و کاهش دامنه‌ی پاسخ روتور به‌ازای مقادیر بزرگتر از Ω رخ خواهد داد (شکل ۶).

با ادامه‌ی روند افزایش در پارامتر نامیزانی روتور تا میزان $U = 0/25$ و به‌ازای افزایش پارامتر بی‌بعد سرعت دورانی، Ω ، پدیده‌ی پرش در پاسخ سیستم مشاهده می‌شود. در $U = 0/25$ و به‌ازای $\Omega = 2/3$ اولین پرش در پاسخ سیستم مشاهده می‌شود که طی آن پاسخ پریرود - ۱ طی وقوع دوشاخگی نقطه‌ی زینی ناپایدار می‌شود و روی یک پاسخ پریرود - ۲ از شاخه‌ی دیگر از پاسخ‌های سیستم پرش خواهد کرد (شکل ۷).

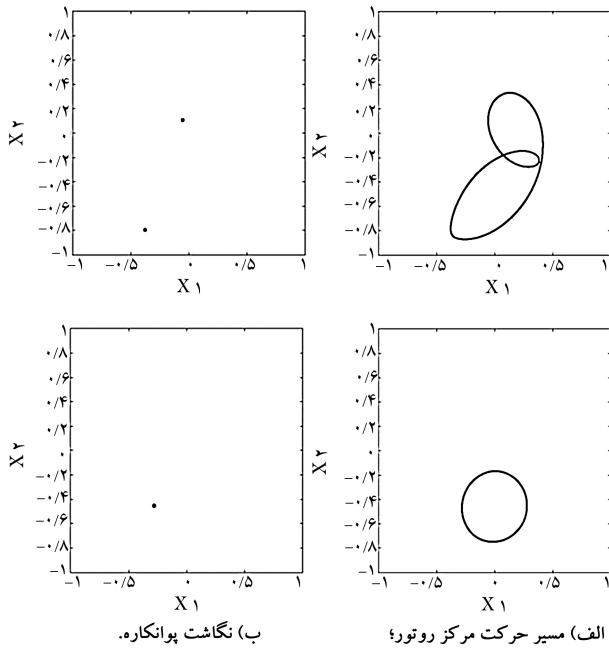
این پاسخ پریرود - ۲ جدید، پایداری خود را تا مقدار $\Omega = 3/1$ حفظ خواهد کرد. در این مقدار از نسبت سرعت دورانی سیستم بار دیگر طی وقوع یک دوشاخگی نقطه‌ی زینی، پایداری خود را از دست می‌دهد و پدیده‌ی پرش در پاسخ سیستم و این بار بر روی یک پاسخ پریرود - ۲ دیگر با دامنه‌ی به‌وضوح کمتر مشاهده خواهد شد (شکل ۸).



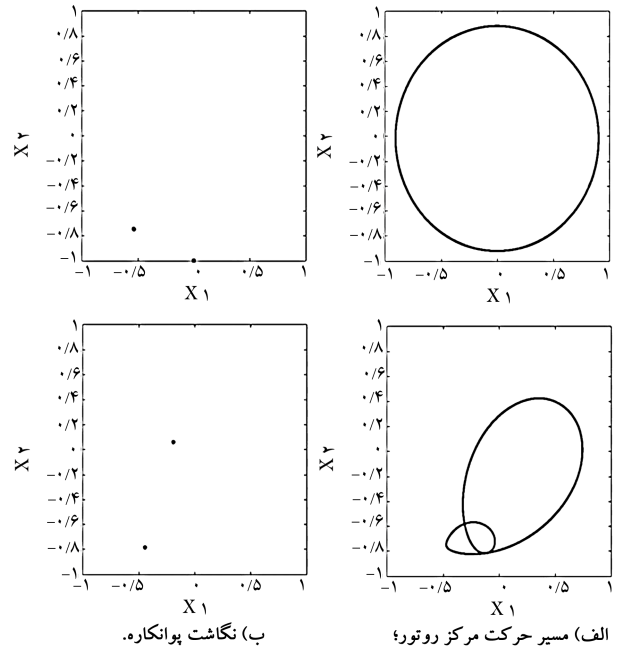
شکل ۵. روند افزایش دامنه‌ی پاسخ روتور به‌ازای $U = 0/1$.



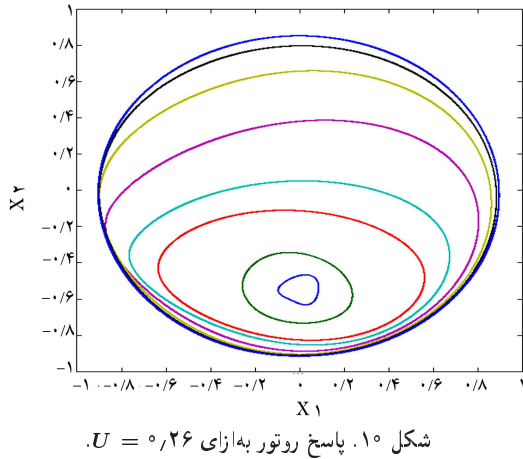
شکل ۶. روند کاهش دامنه‌ی پاسخ روتور به‌ازای $U = 0/1$.



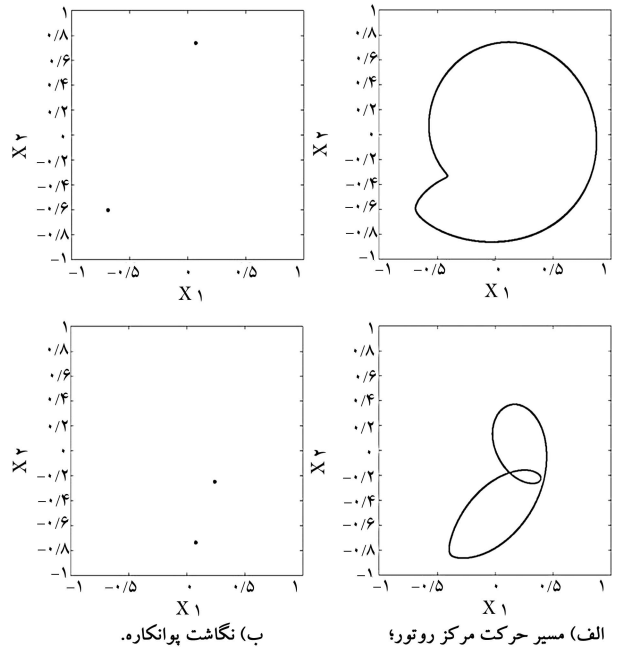
شکل ۹. وقوع پدیده‌ی پرش به‌ازای $U = 0.25$ و $\Omega = 3.18$.
 الف) مسیر حرکت مرکز روتور؛ ب) نگاشت پوانکاره.



شکل ۷. وقوع پدیده‌ی پرش به‌ازای $U = 0.25$ و $\Omega = 2.3$.
 الف) مسیر حرکت مرکز روتور؛ ب) نگاشت پوانکاره.



شکل ۱۰. پاسخ روتور به‌ازای $U = 0.26$.



شکل ۸. وقوع پدیده‌ی پرش به‌ازای $U = 0.25$ و $\Omega = 3.1$.
 الف) مسیر حرکت مرکز روتور؛ ب) نگاشت پوانکاره.

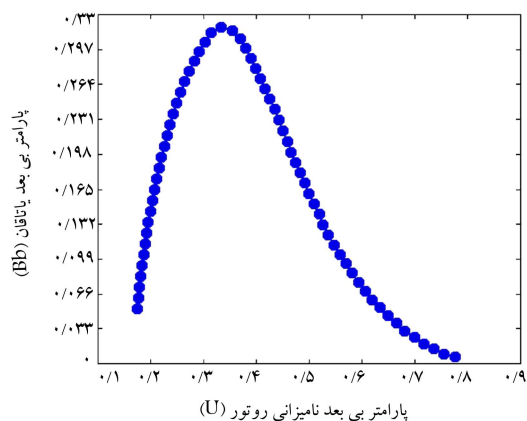
ادامه، با افزایش مقدار پارامتر Ω و پیش از وقوع پرش دوم، دوشاخگی دوبرابری دوره به‌ازای $\Omega = 2.07$ رخ خواهد داد.

با ادامه‌ی روند افزایش در پارامتر بی‌بعد نامیزانی روتور و به‌ازای تغییر در پارامتر سرعت دورانی، مشاهده می‌شود که سیستم مجدداً تمایل به‌حفظ پایداری پاسخ پریود ۱- خود دارد. به‌این معنی که به‌ازای مقادیر کوچک Ω ، پاسخ سیستم از نوع پریود ۱- است و با افزایش Ω نیز فقط افزایش در دامنه‌ی پاسخ سیستم مشاهده خواهد شد و هیچ‌گونه ناپایداری و دوشاخگی در پاسخ سیستم رخ نخواهد داد.

هر چند در این حالت پاسخ سیستم پاسخ پریود ۱- پایدار است اما دامنه‌ی پاسخ مذکور به‌ازای محدوده‌ی وسیعی از پارامتر Ω ، بسیار زیاد است که این امر سبب انتقال نیروی زیادی به یاتاقان‌ها و پایه‌ی سیستم خواهد شد. پاسخ سیستم در این حالت و به‌ازای حالت مرزی $U = 0.26$ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. به‌ازای مقادیر بالاتر U نیز روند پاسخ سیستم مشابه است.

بر خلاف روند طی‌شده در مرحله‌ی قبل که در آن پارامترهای بی‌بعد وزن W و یاتاقان B_0 در مقادیر مشخصی ثابت در نظر گرفته شده بودند، در ادامه به‌این

مجدداً با افزایش نسبت سرعت دورانی سیستم، برای سومین بار و به‌ازای $\Omega = 3.18$ ، دوشاخگی نقطه‌ی زینی و پدیده‌ی پرش بر روی یک پاسخ پریود ۱- رخ خواهد داد (شکل ۹). با ادامه‌ی روند بالا رفتن Ω ، پاسخ پریود ۱- مذکور پایداری خود را حفظ خواهد کرد و هیچ‌گونه ناپایداری و دوشاخگی در پاسخ سیستم رخ نمی‌دهد. با تغییر مقدار پارامتر U ، رفتار سیستم مشابه حالت $U = 0.25$ خواهد بود، با این تفاوت که هرچه مقدار پارامتر نامیزانی U کمتر باشد، پدیده‌های پرش به‌ازای مقادیر کمتری از نسبت سرعت دورانی، Ω ، رخ می‌دهند. مثلاً به‌ازای $U = 0.2$ و بررسی اثر افزایش Ω ، اولین پرش در $\Omega = 1.49$ و با وقوع دوشاخگی نقطه‌ی زینی در پاسخ سیستم و بر روی یک پاسخ پریود ۱- رخ خواهد داد. در



شکل ۱۱. محدوده‌ی پاسخ پایدار پر یود - ۱ برای سیستم.

دو پارامتر اجازه‌ی تغییر داده شده است به‌گونه‌ی که پارامتر وزن در محدوده‌ی ۰/۵۵ تا ۲/۲۱ و پارامتر یاتاقان در محدوده‌ی ۰/۳۳ تا ۰/۳۳ تغییر کرده است. نمودار رسم شده در شکل ۱۱ نشان‌دهنده‌ی محدوده‌ی پایداری پاسخ پر یود - ۱ سیستم است. در این نمودار مقادیر مربوط به قسمت بالای نمودار ناحیه‌ی پایداری و قسمت زیر نمودار ناحیه‌ی ناپایدار پاسخ سیستم است.

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار غیرخطی سیستم روتور صلب همراه میراگر فیلم فشرده با فنر جانب مرکز در قالب بررسی پایداری و دوشاخگی پاسخ سیستم، با استفاده از روش فلوکوئنت و استفاده از یک شیوه‌ی ساده‌کننده برای محاسبه‌ی ماتریس مونودرومی، بررسی شد. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که در کنار اثرات مثبت میراگرهای فیلم فشرده برای کنترل دامنه‌ی ارتعاشات سیستم و چیرگی بر مشکلات ناپایداری، بروز رفتارهای غیرخطی شدید، از جمله وقوع حرکات ناهمگام، حرکات آشوبناک، و پدیده‌ی پرش از جمله محدودیت‌های بزرگ میراگرهای فیلم فشرده برای سیستم‌های دوار است. عامل اصلی این رفتارهای غیرخطی را باید در کنش و واکنش میان نیروی نامیزانی روتور و مؤلفه‌های نیروی فیلم روغن میراگر جستجو کرد. بر اساس بررسی‌های انجام شده، نقش مخرب نامیزانی روتور در پاسخ سیستم کاملاً واضح است.

فهرست علائم

B_b : پارامتر بی‌بعد یاتاقان، $\frac{\mu RL^2}{m \omega_n c^2}$ ؛
 c : لقی شعاعی میراگر (m)

- C_B : مرکز هندسی میراگر؛
- C_J : مرکز هندسی ژورنال؛
- e : خروج از مرکزیت بین مرکز میراگر و ژورنال (m)؛
- F_{DX} : نیروی فیلم روغن در جهت X ، (N)؛
- F_{DY} : نیروی فیلم روغن در جهت Y ، (N)؛
- F_r : نیروی فیلم روغن در جهت شعاعی (N)؛
- F_t : نیروی فیلم روغن در جهت مماسی (N)؛
- G : مرکز جرم روتور؛
- g : شتاب گرانش (ms^{-2})؛
- ν : سختی فنر جانب مرکز (N/m)؛
- L : طول میراگر (L)؛
- m : نصف جرم روتور (m)؛
- P : فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)؛
- R : شعاع میراگر (m)؛
- t : زمان (s)؛
- U : پارامتر بی‌بعد نامیزانی، $\frac{\omega}{\omega_c}$ ؛
- W : پارامتر بی‌بعد وزن، $\frac{g}{\omega_c^2}$ ؛
- x : جابه‌جایی مرکز هندسی ژورنال در راستای X ، (m)؛
- y : جابه‌جایی مرکز هندسی ژورنال در راستای Y ، (m)؛
- X : جابه‌جایی بی‌بعد مرکز هندسی ژورنال در راستای X ، $\frac{x}{R}$ ؛
- Y : جابه‌جایی بی‌بعد مرکز هندسی ژورنال در راستای Y ، $\frac{y}{R}$ ؛
- u : خروج از مرکزیت مرکز جرم روتور (m)؛
- z : موقعیت در جهت Z در میراگر (m)؛
- ε : نسبت بی‌بعد خروج از مرکزیت، $\frac{e}{R}$ ؛
- θ : مختصه‌ی زاویه‌ی اندازه‌ی گرفته شده از محل ضخیم‌ترین قسمت فیلم روغن، در جهت سرعت زاویه‌ی روتور (rad)؛
- θ_1 : مختصه‌ی زاویه‌ی شروع ناحیه‌ی فشار مثبت، اندازه گرفته شده از θ ، در جهت سرعت زاویه‌ی روتور (rad)؛
- μ : لزجت دینامیکی روان‌کننده ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)؛
- T : زمان بی‌بعد، ωt ؛
- ϕ : موقعیت زاویه‌ی خط واصل بین موقعیت آنی خروج از مرکزیت مرکز هندسی ژورنال و مرکز هندسی میراگر، اندازه گرفته شده از جهت مثبت محور X در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (rad)؛
- ω : سرعت زاویه‌ی روتور (rad/s)؛
- ω_n : بسامد طبیعی مربوط به فنر جانب مرکز (rad/s)؛
- (.) : علامت مشتق‌گیری بر حسب t ؛
- (') : علامت مشتق‌گیری بر حسب T ؛

پانوشته‌ها

1. Cross - Couple
2. Ball Bearing
3. Bearing housing
4. Floquet multiplier
5. Monodromy matrix

6. transcritical
7. pitchfork
8. period doubling
9. non-autonomous
10. Newton-Raphson method
11. bifurcation parameter

منابع (References)

1. Kanki, H., Kaneko, Y., Kurosawa, M. and Yamamoto, T., "Prevention of low-frequency vibration of high-capacity steam turbine units by squeeze-film damper", *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **120**, pp. 391-396 (1998).
2. Leader, M.E., Whalen, J.K., Grey, G.G. and Hess, T.D. "The design and application of a squeeze-film damper bearing to a flexible steam turbine rotor", *Proceedings of the 24th Turbomachinery Symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M University*, pp. 49-57 (1995).
3. Holmes, R. "Vibratin and its control in rotating sysyem", *Proc. IUTAM Symposium Dynamics of Rotors*, Denmark, pp. 156-181 (1974).
4. Hahn, E.J. "Equivalent stiffness and damping coefficients for squeeze film dampers", *Proceedings of the Third I.Mech.E. Conf. on Vibration in Rotating Machinery*, York, England (1984).
5. Burrows, C.R., Sahinkaya, M.N. and Kucuk, N.C. "Modeling of oil-film forces in squeeze-film bearings", *Journal of Tribology*, **180**(2), pp. 262-269 (1985).
6. Chu, F. and Holmes, R. "The effect of squeeze film damper parameters on the unbalance responce and stability of a flexible rotor", *Engineering for Gas Turbines and Power*, **120**, pp. 140-148 (1998).
7. Taylor, D.L. and Kumar, B.K. "Nonlinear response of short squeeze film dampers", *Lubrication Technology*, **102**, pp. 51-58 (1980).
8. Mohan, S. and Hahn, E.J. "Design of squeeze film damper supports for rigid rotors", *Engineering for Industry*, **96**, pp. 976-982 (1974).
9. Zhao, J.Y., Linnett, I.W. and McLean, L.J. "Stability and bifurcation of unbalanced response of a squeeze film damped flexible rotor", *Journal of Tribology*, **116**, pp. 361-368 (1994).
10. Inayat-Hussain, J.I., Kanki, H. and Mureithi, N.W. "Stability and bifurcation of a rigid rotor in cavitated squeeze-film dampers without centering spring", *Tribology International*, **34**, pp. 689-702 (2001).
11. Inayat-Hussain, J.I., Kanki, H. and Murrithi, N.W. "On the bifurcation of rigid rotor response in squeeze film dampers", *Journal of Fluids and Structures*, **17**, pp. 433-459 (2003).
12. Qin, W., Zhang, J. and Ren, X. "Responce and bifurcation of rotor with squeeze film damper on elastic support", *Chaos, Solutions and Fractals*, **39**, pp. 188-195 (2009).
13. Zhou, H.L., Luo, G.H., Chen, G. and Wang, F. "Analysis of the nonlinear dynamic responce of a rotor supported on ball bearings whit floating-ring squeeze film dampers", *Mechanism and Machine Theory*, **59**, pp. 65-77 (2013).
14. Cao, J., Dimond, T. and Allaire, P. "Numerical analysis of flexible rotor with nonlinear bearings and squeeze film dampers", *International Mechanical Engineering Congress and Exposition Dynamics, Vibration, and Control*, Montreal, Quebec, Canada, **4B** (14-20 November 2014).
15. Feng, H., Allaire, P.E., Dousti, S. and Untaroiu, A. "Forced response of a flexible rotor with squeeze film damper under parametric hange", *Turbine Technical Conference and Exposition, Structures and Dynamics*, San Antonio, Texas, USA, **7A** (3-7 June 2013).
16. Modares Ahmadi, S., Ghazavi, M.R. and Sheikhzad, M. "Dynamic analysis of a rotor supported on ball bearings with waviness and centralizing springs and squeeze film dampers", *International Journal of Engineering*, **28**, pp. 1351-1358 (2015).
17. Burrows, C.R., Sahinkaya, M.N., Kucuk, N.C. and Taylor, D. "Dynamic on Rotordynamics Instabilityperformance of squeeze-film bearings", *Proceedings of the 4th Workshop Problems in High Performance Turbomachinery*, NASA (1986).
18. Nayfeh, A.H. and Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, John Wiley & Sons (1995).