

شبیه‌سازی اثر مشخصه‌های نسبت چگالی و نسبت لزجت در دینامیک سقوط قطره‌ی کروی تراکم‌ناپذیر

مهدی محمودی* (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

رویا شادمانی (دانشجوی دکتری)

دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

محمود ابراهیمی (استادیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۶)
دوری ۳ - ۳، شماره ۲، ص. ۱۴۱-۱۳۷، (زادداشت ثنی)

در این نوشتار از مدل میدان فازی و روش حداقل مربعات برای شبیه‌سازی سقوط قطره‌ی سیالی تراکم‌ناپذیر در سیال دیگر پیرامون آن به‌علاوه وجود نیروی گرانش استفاده شده که از جفت شدگی معادلات ناویر-استوکس و کان-هیلاارد برای چگالی‌ها و لزجت‌های مختلف بین دو فاز در گام‌های زمانی کوچک بهره گرفته شده است. اثرات نسبت لزجت و نسبت چگالی بر دینامیک قطره‌ی تراکم‌ناپذیر به‌صورت کمی مورد مطالعه قرار گرفته و میدان سرعت پیرامون قطره و تأثیرات آن بر شکل قطره بررسی شده است. با افزایش نسبت چگالی تا حدود 10° برابر، سرعت سقوط آزاد قطره تا حدود 5° درصد کاهش می‌یابد در حالی‌که پارامتر میزان مدور بودن قطره تقریباً ثابت است. با افزایش نسبت لزجت تا حدود 10° برابر، سرعت سقوط آزاد قطره تا حدود 1° درصد افزایش و پارامتر میزان مدور بودن قطره تا حدود 15° درصد کاهش می‌یابد. به دلیل ایجاد حلقه‌های گردابی در پشت قطره در حین سقوط، شکل آن از کروی به بیضی تغییر می‌کند.

mehdymahmoody@gmail.com
shademani@gmail.com
ebrahimi@iust.ac.ir

واژگان کلیدی: مدل میدان فازی، قطره‌ی تراکم‌ناپذیر، نسبت لزجت، نسبت چگالی، روش حداقل مربعات.

۱. مقدمه

مدل‌سازی جریان سیال پیچیدگی‌های زیادی دارد و حل تحلیلی معادلات حاکم، جز در حالت‌های ساده ممکن نیست. بدین ترتیب استفاده از روش‌های عددی برای حل معادلات سیال مطرح شده و به‌طور جدی مورد توجه قرار گرفته است. در این حالت برای حل عددی ابتدا معادلات حاکم بر مسئله روی شبکه‌ی محاسباتی گسسته شده^[۱] و سپس معادلات جبری حاصل از گسسته‌سازی که از معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله به‌دست آمده است، استفاده می‌شوند. شبکه‌بندی دامنه‌ی حل اهمیت زیادی در دینامیک سیالات محاسباتی دارد و بیش از نیمی از زمان انجام پروژه‌ها، صرف تعریف هندسه و تولید شبکه می‌شود.^[۱]

از مدل میدان فازی^[۲] برای شبیه‌سازی دو یا چند سیال مخلوط‌نشده شامل برخورد قطره‌ها،^[۳] تصادم قطره‌ها با سطوح جامد،^[۴] و نیز مطالعه‌ی جت سیالات^[۵] استفاده می‌شود. شبیه‌سازی‌هایی شامل دو سیال با لزجت و چگالی‌های مختلف

بسیار انجام می‌شود که اغلب بر مبنای سرعت میانگین دو سیال است. آنتانوسکی^[۸] مدل میدان فازی نیمه‌تراکم‌پذیر را بر مبنای سرعت جرمی میانگین ارائه داد. آلاند^[۹] دقت و همگرایی چندین مدل میدان فازی را با تعریف عبارات توصیفی متفاوت برای اختلاف چگالی و لزجت دو سیال^[۱۰] بررسی کرد که در هر یک از موارد روش گسسته‌سازی خاصی استفاده شده است. دینگ و همکاران^[۱۱] از روش حجم محدود بالارونده^[۱۲]، بوی^[۱۳] از طرح مورمان و رززارینرا^[۱۴] با روش المان محدود، و شن و همکاران^[۱۵] از روش اوزاوا^[۱۶] استفاده کرده‌اند. شن^[۱۷] طرحی را برای حل کوپل معادلات دو بعدی ناویر-استوکس و کان-هیلاارد یا معادلات دو بعدی ناویر-استوکس و آلن-کان در جریان‌های دو فازی تراکم‌ناپذیر با لزجت‌های مختلف بر مبنای معادله‌ی انرژی ارائه داد. تیزنگ و همکاران^[۱۸] ویژگی‌ها و مشخصات هندسی خط تماس ناشی از تقابل دو سیال را با تغییر سیال‌ها مطالعه و بررسی کردند؛ به‌طوری‌که خط تماس را به مشخصه‌های سیالات به وجود آورنده‌ی آن وابسته کردند. یو و همکاران^[۱۹] رفتارهای دینامیکی و رئولوژی تقابل دو سیال در ریزساختار را مطالعه کردند.

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۳/۱۵، اصلاحیه ۱۳۹۵/۵/۱۱، پذیرش ۱۳۹۵/۵/۳۱.

در این نوشتار از مدل میدان فازی با به‌کارگیری روش حداقل مربعات^۶ برای حل کوپل معادلات دو بعدی ناویر - استوکس و کان - هیلارد تراکم‌ناپذیر در جریان دو فازی استفاده شده است. در حالت کلی دو روش اصلی مجزا به نام‌های روش‌های پوشش‌دهنده سطح^۷ و روش‌های تطبیق‌دهنده سطح^۸ برای توصیف سطح آزاد میان دو سیال در جریان‌های دوفازی وجود دارد. می‌توان ادعا کرد که هدف نهایی هر دو روش تعیین دقیق سطح تماس است. در روش تطبیق‌دهنده سطح، یک شرط مرزی سینماتیکی در سطح آزاد اعمال و معادلات حاکم تنها برای فاز مایع حل می‌شود. این روش دارای محدودیت‌هایی است؛ مثلاً برای جریان‌هایی با عدد فرود بالا، به دلیل نیاز به تطابق، شکل سطح آزاد بر شبکه‌ی محاسباتی کاربندی نیست. روش‌های پوشش‌دهنده سطح قابلیت تطبیق‌پذیری بیشتری را برای شرایط جریان سطح آزاد دارند. معادلات حاکم بر مسئله برای هر دو فاز مایع و گاز حل می‌شوند. روش‌های میدان فازی، حجم سیال^۹، و روش تنظیم سطح از روش‌های رایج در این دسته‌اند. در روش تنظیم سطح، سطح تماس بین دو سیال با مجموعه‌ی نقاط با توابع درجه بالا تعریف شده‌اند. از معایب این روش، عدم ارضای دقیق معادله‌ی پایستگی جرم برای هر یک از سیالات در محدوده‌ی مش‌بندی برای شبیه‌سازی‌های وابسته به زمان است. در روش تنظیم سطح دو فازی، هر یک از هوا و آب یک سیال مجزا هستند که خواص آن‌ها در طول سطح تماس متغیر است. در حالی‌که در روش تنظیم سطح، حل عددی تنها در فاز مایع انجام می‌شود. روش حجم سیال می‌تواند حرکت دو یا چند سیال مخلوط‌نشده را با حل یک دسته از معادلات اندازه‌ی حرکت و دنبال کردن کسر حجمی هر یک از سیالات در این محدوده شبیه‌سازی کند. تابع کسر حجمی تعریف‌شده برای هر یک از سیالات در شبیه‌سازی، در صورتی که حجم یک سلول را پر کند مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر دارد. اگر سطح تماس دو سیال از میان یک سلول محاسباتی عبور کند، مقدار تابع برای سیالاتی که آن سلول را اشغال کرده‌اند به صورت کسری از حجم اشغالی از آن سیال در کل حجم سلول مذکور خواهد بود. روش حجم سیال قادر است تا ضمن ارضای قانون پایستگی جرم تا حد قابل قبولی، مرزهای کاملاً پیچیده را شبیه‌سازی کند. این روش برای مسائل درگیر با اثرات تنش سطحی توصیه نمی‌شود. با توجه به معایب ذکر شده و شرایط حاکم بر مسئله، روش میدان فازی انتخاب شد.

روش حداقل مربعات با اینکه می‌تواند معادلات را به صورت کلی فرمول‌بندی کند ولی کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. این روش را نخستین بار کارل فردریش گاوس در سال ۱۷۹۴ میلادی بیان کرد. در واقع روشی برای برازش داده‌هاست. بهترین مدل برازش شده بر مجموعه‌ی داده‌ها مدلی است که در آن مجموع مربع باقی‌مانده‌ها^{۱۰} کمینه باشد. منظور از باقی‌مانده‌ها، اختلاف بین داده‌ی محاسبه‌شده در دو گام زمانی متوالی است. این روش نسبت به سایر روش‌های ذکر شده نیاز کمتری به بررسی و پیگیری پارامترهای همگرایی دارد. در این روش، از باقی‌مانده‌های متغیرهای مورد بررسی در حل عددی می‌توان برای بهبود مش‌بندی استفاده کرد. سرعت همگرایی افزایش می‌یابد و به حافظه سخت‌افزاری کمتری نیاز است. در این نوشتار، اثرات نسبت لزجت و نسبت چگالی بردینامیک قطره‌ی تراکم‌ناپذیر به صورت کمی مطالعه شده و میدان سرعت پیرامون قطره و تأثیرات آن بر شکل قطره بررسی شده است.

۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی

روابط مدل میدان فازی بر مبنای مدل انرژی آزاد هلمهولتز^{۱۱} است. کان و همکاران^{۱۲}

روابط مجموع اثرات انرژی هلمهولتز محلی E_{loc} و تنش سطحی را در محل تماس دو سیال به صورت زیر تعریف کرده‌اند. پارامتر تماسی با ε و کسر حجمی فازی (بین صفر تا یک) با C ^{۱۳} نشان داده شده‌اند. تابع انرژی هلمهولتز محلی برای حالت هم‌دمایی^{۱۴} به صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$E(C, \nabla C) = E_{loc}(C) + \varepsilon |\nabla C|^2 \quad (1)$$

$$E_{loc}(C) = \rho_1 \rho_2 C^2 (C - 1)^2 \quad (2)$$

و چگالی و لزجت کلی مجموعه‌ی دو فازی مخلوط‌ناشدنی عبارت است از:

$$\rho = \rho_1 C + \rho_2 (1 - C) \quad (3)$$

$$\mu = \mu_1 C + \mu_2 (1 - C) \quad (4)$$

که ρ_1 و ρ_2 مقادیر چگالی و μ_1 و μ_2 مقادیر لزجت برای دو سیال را نشان می‌دهند. هر سیال میدان سرعت خاص خود \mathbf{u}_1 و \mathbf{u}_2 را دارد که سرعت حجمی میانگین \mathbf{u} به صورت زیر تعریف می‌شود.^{۱۵}

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 C + \mathbf{u}_2 (1 - C) \quad (5)$$

معادلات جفت شده‌ی ناویر - استوکس و کان - هیلارد برای جریان دو سیال تراکم‌ناپذیر مخلوط‌ناشدنی با نسبت چگالی و نسبت لزجت مشخص به شرح زیر است.^{۱۶}

$$\partial C / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (\nabla \omega) = 0 \quad (6)$$

$$\omega = \partial E / \partial C = C^2 - \gamma \Delta C^2 + \varepsilon \Delta C - \varepsilon^2 \nabla^2 C \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$\rho (\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \nabla P - \omega \nabla C = \rho \mathbf{g} \quad (9)$$

پارامتر P ، فشار و پارامتر ω ، پتانسیل شیمیایی در دمای ثابت است. در معادله‌ی ۶ عبارت $\mathbf{u} \cdot \nabla C$ نشان‌دهنده‌ی ترم جابه‌جایی فازها و در معادله‌ی ۹ عبارت $\nabla \cdot (\nabla \omega)$ نشان‌دهنده‌ی نیروی موینگی، بالانویس T نشان‌دهنده‌ی معکوس ماتریس و عبارت $\rho \mathbf{g}$ نشان‌دهنده‌ی نیروی گرانشی وارد بر قطره است. پارامتر پتانسیل شیمیایی در معادله‌ی کان - هیلارد به فشار دینامیکی سیال وابسته است.^{۱۷} معادلات ۶ تا ۹ دارای شرایط مرزی عدم لغزش و عدم نفوذ به شرح زیر هستند که پارامتر \mathbf{n} در واقع بردار خارجی عمود بر سطح بر روی مرز است.

$$\partial C / \partial n = 0; \quad \partial \omega / \partial n = 0; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (10)$$

چنانچه از نمایش بدون بعد پارامتر استفاده شود، معادلات به صورت زیر نوشته خواهند شد. چگالی و لزجت بدون بعد به ترتیب به صورت معادلات ۱۱ و ۱۲ است.

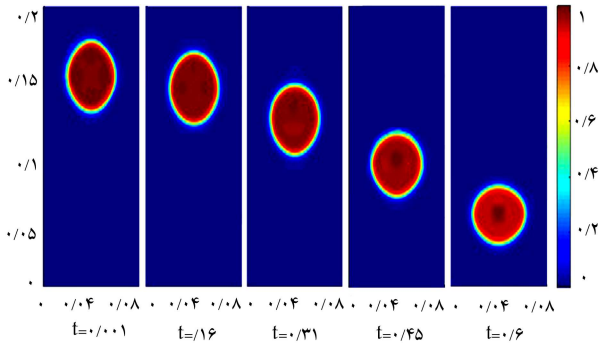
$$\rho' = \rho / \rho_1 = C + \lambda_\rho (1 - C) \quad (11)$$

$$\mu' = \mu / \mu_1 = C + \lambda_\mu (1 - C) \quad (12)$$

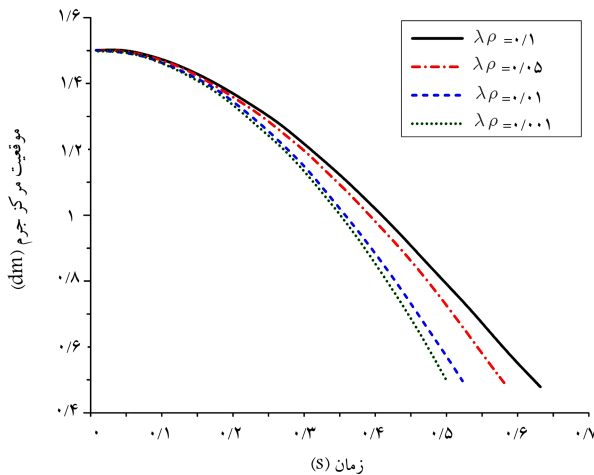
به طوری‌که نسبت چگالی و نسبت لزجت به صورت $\lambda_\rho = \rho_2 / \rho_1$ و $\lambda_\mu = \mu_2 / \mu_1$ تعریف می‌شوند. سایر متغیرها نیز در حالت بدون بعد به صورت زیر خواهند بود.

$$x' = x / L_0, \quad t' = t / t_0, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} / U_0, \quad P' = P / P_0 \quad (13)$$

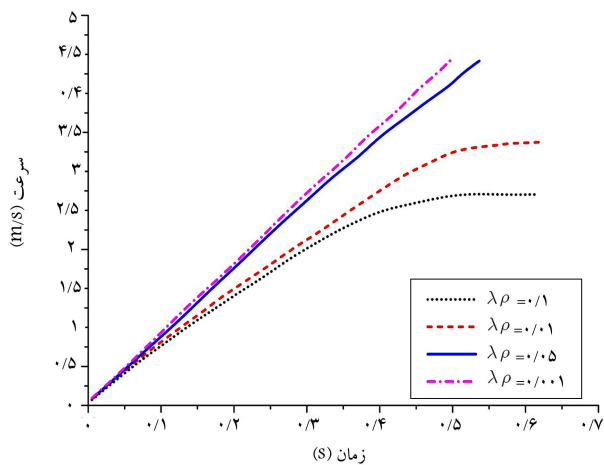
مطالعه قرار گرفت؛ به طوری که مش‌ها ریز شد و منحنی سرعت سقوط ترسیم شد و این عمل تا جایی ادامه یافت که دیگر کوچک تر کردن سلول‌های مش تغییری در نتایج حل عددی سرعت سقوط ایجاد نکرد. در انتها تعداد ۵۵۰۰ سلول مثلثی به کار رفت. نمونه‌ای از شبیه‌سازی برای $\lambda_\rho = 0.1$ و $\lambda_\mu = 0.1$ در شکل ۱ آمده است. قطره در طول لحظات سقوط، به بیضی تغییر شکل می‌دهد. شکل ۲، تغییرات محل مرکز جرم و شکل ۳، سرعت سقوط آزاد قطره‌ها با



شکل ۱. سقوط قطره با نسبت چگالی و نسبت لزجت برابر ۰٫۱



شکل ۲. محل مرکز جرم قطره برای نسبت چگالی‌های مختلف و نسبت لزجت ۰٫۱



شکل ۳. سرعت سقوط قطره برای نسبت چگالی‌های مختلف و نسبت لزجت ۰٫۱

و پارامترهای L_0 ، t_0 ، U_0 و P_0 به ترتیب طول، زمان، سرعت و فشار مرجع هستند. اگر از علامت « \prime » در نگارش صرف نظر کنیم، معادلات ۶ تا ۹ در حالت بی‌بعد به صورت زیر خواهند بود.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (\nabla \omega) = 0 \quad (14)$$

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial C} = C^T - \lambda_\rho \Delta C^T + \lambda_\mu \Delta C - \varepsilon^T \nabla^T C \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \frac{\mu}{\text{Re}} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \nabla P - \frac{\lambda}{\text{Re Ca}} \omega \nabla C = \frac{\text{Bo}}{\text{Re Ca}} \rho \mathbf{g} \quad (17)$$

اعداد بدون بعد پکلت Pe، رینولدز Re، موینگی Ca و پیوند Bo به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند و پارامتر σ نشان‌دهنده تنش تماسی است.

$$\text{Pe} = L_0 U_0, \quad \text{Re} = \rho U_0 L_0 / \mu$$

$$\text{Ca} = \mu U_0 / \sigma, \quad \text{Bo} = \rho L_0^3 g / \sigma \quad (18)$$

۳. مدل‌سازی مسئله

در این بخش سقوط آزاد قطره‌ی کروی تراکم‌ناپذیر تحت نیروی گرانش به منظور بررسی اثر نسبت لزجت و نسبت چگالی دو سیال متفاوت بررسی شده است. برای توصیف کتی این اثرات از سه پارامتر محل مرکز جرم y_c ، میزان مدور بودن C و سرعت سقوط V_c استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شوند.^[۱۹]

$$y_c = \frac{\int_{C > 0.5} y dx}{\int_{C > 0.5} dx} \quad (19)$$

$$c = \pi d_A / P_A \quad (20)$$

$$V_c = \frac{\int_{C > 0.5} v dx}{\int_{C > 0.5} dx} \quad (21)$$

پارامتر $d_A = \sqrt{4A_p/\pi}$ قطر مساحت تصویر کرده عمود بر جریان^{۱۵} است و پارامتر میزان مدور بودن c به صورت نسبت محیط دایره‌ی هم‌ارز تصویر کرده عمود بر جریان به محیط قطره است. فرض بر این است که در محل تماس $c = 0.5$. هندسه‌ی مورد مطالعه شامل فضایی به ابعاد 0.2 متر طول در 0.08 متر عرض است که تمام مرزهای این محدوده دارای شروط عدم لغزش و عدم نفوذ هستند. یک قطره با شعاع 0.05 سانتی‌متر از حالت سکون و تحت تأثیر نیروی گرانش در آن رها می‌شود، به طوری که مرکز جرم قطره در لحظه‌ی اولیه‌ی سقوط آن بر مختصات $(0.04, 0.15)$ منطبق است.

۴. شبیه‌سازی سقوط قطره

در این شبیه‌سازی $\varepsilon = 0.1$ ، $\text{Pe} = 10^3$ ، $\text{Re} = 10^3$ ، $\text{Ca} = 0.1$ و $\text{Bo} = 10^2$ در نظر گرفته شده‌اند. به دلیل نیاز به استفاده از روش مش متحرک در این مسئله، گام زمانی 0.001 ثانیه در نظر گرفته شده است تا پس از هر گام زمانی و سقوط قطره، دوباره هندسه‌ی جدید مش زده شود و حل عددی تکرار شود. در این حل عددی پارامتر سرعت سقوط قطره برای استقلال نتایج از شبکه مورد

تبادل میان نیروهای درگ و شناوری در این شبیه‌سازی به شدت به λ_p وابسته است. تعیین بازه‌ی زمانی دست‌یابی قطره‌ها به سرعت نهایی نیز توسط پارامتر نسبت چگالی λ_p مشخص می‌شود.

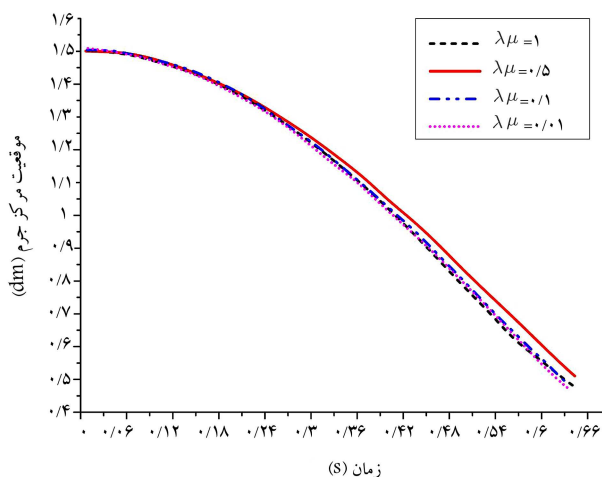
برای بررسی اثر نسبت لزجت λ_μ بر دینامیک سقوط قطره، اثر چهار نسبت لزجت مختلف $0.1, 0.5, 1, 1.5$ با لزجت بخار ثابت ۱ و نسبت چگالی ثابت ۰.۱ شبیه‌سازی شده است. تغییرات محل مرکز جرم در شکل ۶ و سرعت سقوط قطره در شکل ۷ نمایش داده شده است. محل مرکز جرم قطره بر حسب زمان با یک تابع درجه دوم در آغاز حرکت و پس از آن با یک تابع خطی در ادامه حرکت قابل تقریب زدن است.

شکل ۸ نمایشی از شکل ظاهری قطره با نسبت لزجت‌های مختلف هنگام گذر از موقعیت $y = 0.5$ و شکل ۹ میزان مدور بودن قطره‌ها برای نسبت لزجت ۰.۱ را نمایش می‌دهد. پارامتر میزان مدور بودن شکل ظاهری قطره‌ها برای نسبت لزجت‌های ۰.۱ و ۰.۵ تقریباً ثابت است؛ ولی برای نسبت لزجت‌های ۰.۵ و ۱ قطره‌ها به صورت افقی کشیده می‌شوند و در بخش‌های بالا و پایین قطره تورفتگی‌هایی ایجاد می‌شود.

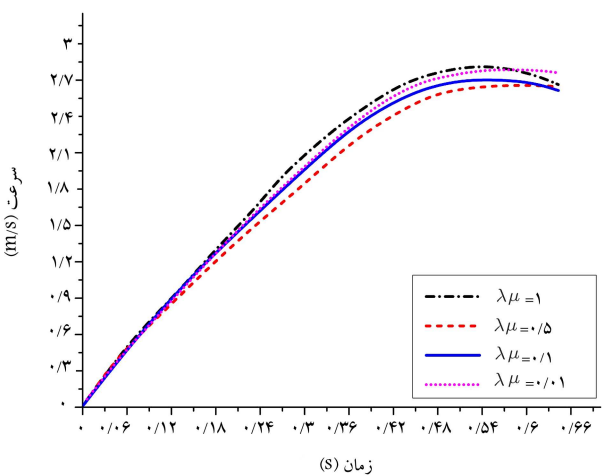
با افزایش نسبت لزجت، مقدار لزجت سیال مایع کاهش می‌یابد و سبب کاهش مقاومت کشش سطحی نسبت به نیروهای اینرسی می‌شود؛ در نتیجه، سطح

چهار نسبت چگالی λ_p مختلف $0.1, 0.5, 1, 1.5$ را نشان می‌دهند که چگالی بخار برابر یک و نسبت لزجت ۰.۱ در نظر گرفته شده است. نمودارهای سرعت سقوط مربوط به نسبت چگالی‌های ۰.۱ و ۰.۵ نشان می‌دهند که قطره‌ها به ترتیب در ۲.۶ و ۳.۳ به سرعت‌های نهایی می‌رسند که در واقع ناشی از تعادل میان نیروهای شناوری و درگ است. از سوی دیگر، سرعت‌های سقوط مربوط به نسبت چگالی‌های ۰.۱ و ۰.۵ به ترتیب افزایش خطی سرعت با شیب‌های ۹ و ۹.۶ را نشان می‌دهند که نزدیک به مقدار نیروی گرانشی است و بیان می‌کند که نیروی درگ در این موارد نسبت به نیروی شناوری ناچیز است.

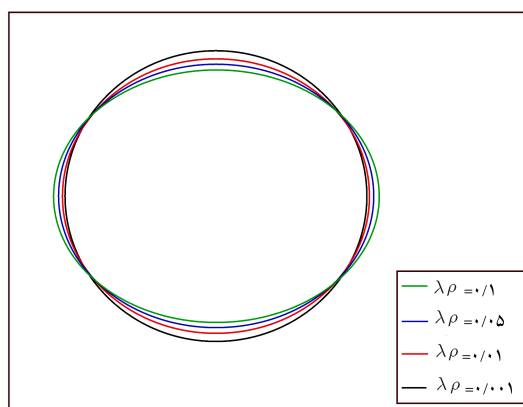
موقعیت مرکز جرم مربوط به نسبت چگالی‌های ۰.۱ و ۰.۵ به ترتیب با معادلات درجه دوم $1.57t + 0.12t^2 - 4.75t^2 - 0.5$ و $4.79t^2 - 0.5$ منطبق می‌باشند؛ درحالی‌که نمودار محل مرکز جرم مربوط به نسبت چگالی‌های ۰.۱ و ۰.۵ نواحی خطی را نشان می‌دهند که در نهایت قطره به سرعت نهایی می‌رسد. شکل ظاهری قطره‌ها با نسبت چگالی‌های مختلف در موقعیت $y = 0.5$ در شکل ۴ و پارامتر میزان مدور بودن آن‌ها در شکل ۵ آمده است که تفاوت‌های محسوس در شکل ظاهری قطره‌ها برای نسبت چگالی‌های مختلف وجود ندارد. نیروی درگ بدون بعد اعمالی به قطره با نسبت چگالی، مجذور سرعت نسبی و تصویر مساحت تماس قطره و سیال پیرامون متناسب است. مشاهده می‌شود که



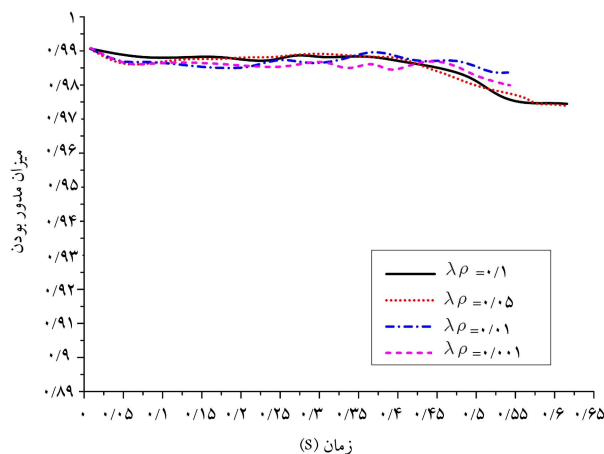
شکل ۵. محل مرکز جرم قطره برای نسبت لزجت‌های مختلف و نسبت چگالی ۰.۱.



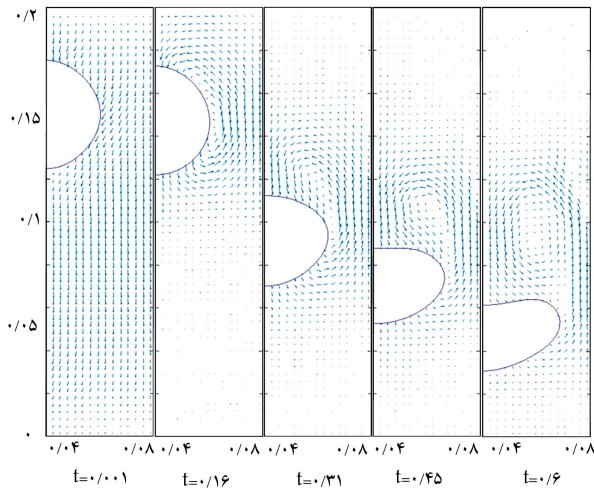
شکل ۶. سرعت سقوط قطره برای نسبت لزجت‌های مختلف و نسبت چگالی ۰.۱.



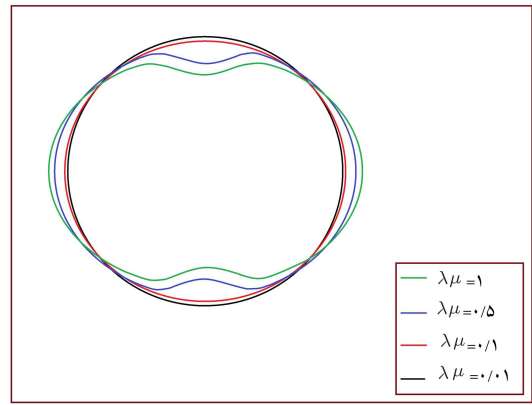
شکل ۷. شکل ظاهری قطره برای نسبت چگالی‌های مختلف و نسبت لزجت ۰.۱ در موقعیت $y = 0.5$.



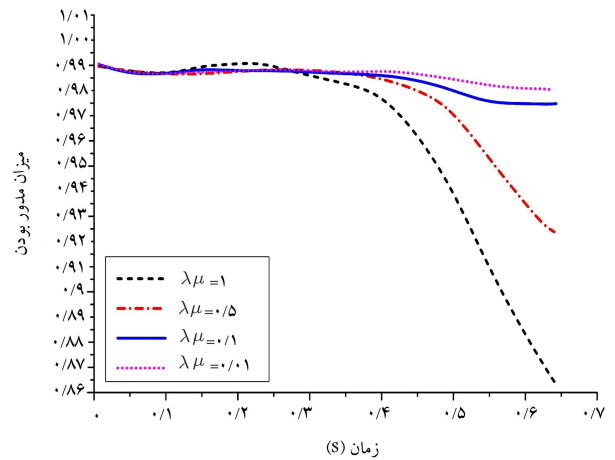
شکل ۸. میزان مدور بودن قطره برای نسبت چگالی‌های مختلف و نسبت لزجت ۰.۱ در موقعیت $y = 0.5$.



شکل ۱۰. میدان سرعت پیرامون قطره برای نسبت چگالی ۰/۱ و نسبت لزجت ۰/۱.



شکل ۸. شکل ظاهری قطره برای نسبت لزجت‌های مختلف و نسبت چگالی ۰/۱ در موقعیت $y = 0.5$.



شکل ۹. میزان مدور بودن قطره برای نسبت لزجت‌های مختلف و نسبت چگالی ۰/۱ در موقعیت $y = 0.5$.

قطره اختلاف فشار کمتری را تحمل می‌کند و تغییر شکل بیشتری خواهد داشت. با توجه به رابطه‌ی بین سرعت و شکل ظاهری قطره، می‌توان نتیجه گرفت که قطره‌ی در حال سقوط ظاهر بیضی شکل خود را تا رسیدن به سرعت نهایی حفظ خواهد کرد (همچون حالت‌های مربوط به نسبت لزجت‌های ۰/۰۱ و ۰/۰۱) ولی پس از این نقطه، قطره شکسته خواهد شد که کاهش شدید سرعت را در پی خواهد داشت. این اختلاف سرعت با بررسی توازن نیروها قابل توصیف است به طوری که نیروی درگ به ضریب درگ و مساحت تصویر قطره عمود بر جریان وابسته است و سرعت سقوط قطره و نسبت چگالی نیز برای نسبت لزجت‌های مختلف تقریباً یکسان است. شکل ۱۰ میدان سرعت پیرامون نیمه‌ی سمت راست قطره برای نسبت لزجت ۱ و نسبت چگالی ۰/۱ را نمایش می‌دهد. از زمان ۰/۴ ثانیه به بعد به دلیل ایجاد حلقه‌های گردابی، قطره‌ی کروی تغییر شکل می‌دهد. دایک^[۲۰] به صورت آزمایشگاهی نشان داد که حلقه‌های گردابی برای عدد رینولدز بزرگتر از ۱۳۰ شروع به تشکیل شدن می‌کنند. پس از آن، شکل ظاهری قطره به بیضی تبدیل می‌شود که رشد ناحیه‌ی تشکیل گردابه را تشدید خواهد کرد. با افزایش اندازه‌ی گردابه‌ها، میدان سرعت سبب کشیده شدن سطح قطره به صورت افقی می‌شود. وادوا و همکاران^[۲۱] نتایجی مشابه آنچه ذکر شد را به دست آورده بودند.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، مدل میدان فازی و روش حداقل مربعات برای دو سیال تراکم‌ناپذیر مخلوط‌نشده‌ی برای بررسی دینامیک سقوط آزاد قطره‌ی سیال کروی در سیال دیگر پیرامون آن به کار گرفته شد. معادلات دو بعدی ناویر - استوکس و کان - هیلارد بر مبنای سرعت حجمی میانگین با اعمال شرایط مرزی و اولیه به صورت عددی حل شد. با تعریف نسبت لزجت و نسبت چگالی برای عمومی کردن حل عددی، اثر این مشخصه‌ها بر دینامیک قطره‌ی در حال سقوط بررسی شد. با افزایش نسبت چگالی، سرعت سقوط آزاد قطره به طور محسوسی کاهش می‌یابد و پارامتر میزان مدور بودن قطره تقریباً ثابت است. با افزایش نسبت لزجت، سرعت سقوط آزاد قطره به طور نامحسوسی افزایش و پارامتر میزان مدور بودن قطره به طور محسوسی کاهش می‌یابد. با مطالعه‌ی میدان سرعت پیرامون قطره‌ی در حال سقوط مشاهده می‌شود که از یک زمان مشخص به بعد به دلیل ایجاد حلقه‌های گردابی در پشت قطره، تغییر شکل آن از کروی به بیضی شروع می‌شود که زمان وقوع این لحظه به کمک عدد رینولدز توصیف می‌شود.

فهرست علائم

ρ : چگالی (kg.m^{-3});

μ : لزجت دینامیکی ($\text{kg.m}^{-1}.\text{S}^{-1}$);

λ : نسبت;

ω : پتانسیل شیمیایی دما ثابت;

ε : پارامتر تماسی;

A_p : مساحت تصویر قطره (m^2);

Bo: عدد پیوند;

c: میزان مدور بودن;

C: کسر حجمی فازی;

Ca: عدد مویبگی;

d_A : قطر دایره معادل A_p (m);

E: انرژی هلمهولتز;

U_0 : سرعت مرجع ($m.s^{-1}$)؛	g : شتاب گرانش ($m.s^{-2}$)؛
x : راستای افقی (m)؛	L_0 : طول مرجع (m)؛
y_c : مؤلفه‌ی عمودی مرکز جرم (m)؛	n : بردار خارجی عمود بر سطح؛
y : راستای عمودی (m).	P : فشار ($kg.s^{-2}.m^{-1}$)؛
	P_0 : فشار مرجع ($kg.s^{-2}.m^{-1}$)؛
	Pe : عدد پکلت؛
	Re : عدد رینولدز؛
	t : زمان (S)؛
	u : سرعت حجمی میانگین ($m.s^{-1}$)؛

زیرنویس

- loc : محلی؛
 μ : لزجت؛
 ۱، ۲: سیال‌های مختلف.

پانوشتها

1. discretization
2. phase field
3. upwinding finite volume method
4. Muramn & Resetarinera
5. Uzawa method
6. least square method
7. interface capturing method
8. interface fitting method
9. volume of fluid (VOF)
10. sum of squared residual
11. Helmholtz free energy model
12. capillary number
13. bond number
14. circularity
15. projected area

منابع (References)

1. Versteeg, H.K. and Malasekera, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, the Finite Volume Method*, Longman scientific & Technical (1995).
2. Yue, P., Feng, J.J., Liu, C. and Shen, J. "A diffuse-interface method for simulating two-phase flows of complex fluids", *J. Fluid Mech.*, **515**, pp. 293-317 (2004).
3. Dupuy, P.M., Lin, Y., Fernandino, M., Jakobsen, H.A. and Svendsen, H.F. "Modelling of high pressure binary droplet collisions", *Compu. Math. Appl.*, **61**, pp. 3564-3576 (2011).
4. Khatavkar, V., Anderson, P., Duineveld, P. and Meijer, H. "Diffuse-interface modelling of droplet impact", *J. Fluid Mech.*, **581**, pp. 97-127 (2007).
5. Wu, J., Liu, C. and Zhao, N. "Dynamics of falling droplets impact on a liquid film: Hybrid lattice Boltzmann simulation", *Colloids Surface A*, **472**, pp. 92-100 (2015).
6. Eshraghi, J., Kosari, E., Hadikhani, P., Amini, A., Ashjaee, M. and Hanafizadeh, P. "Numerical study of surface tension effects on bubble detachment in a submerged needle", *Computational Methods in Multiphase Flow VIII*, **89**, pp. 77-86 (2015).
7. Liu, J. and Wang, X.P. "Phase field simulation of drop formation in a coflowing fluid", *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, **12**(2), pp. 268-285 (2015).
8. Antanovskii, L.K. "A phase field model of capillarity", *Phys. Fluids*, **7**(4), pp. 747-753 (1995).
9. Aland, S. and Voigt, A. "Benchmark computations of diffuse interface models for two dimensional bubble dynamics", *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **69**(3), pp. 747-761 (2012).
10. Abels, H., Garcke, H. and Grün, G. "Thermodynamically consistent, frame indifferent diffuse interface models for incompressible two-phase flows with different densities", *Math. Mod. Meth. Appl. S.*, **22**(3), p. 1-39 (2012).
11. Ding, H. Spelt, P.D. and Shu, C. "Diffuse interface model for incompressible two-phase flows with large density ratios", *J. Comput. Phys.*, **226**(2), pp. 2078-2095 (2007).
12. Boyer, F. "A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows", *Comput. Fluid*, **31**(1), pp. 41-68 (2002).
13. Shen, J. and Yang, X. "A phase-field model and its numerical approximation for two-phase incompressible flows with different densities and viscosities", *SIAM J. Sci. Comput.*, **32**(3), pp. 1159-1179 (2010).
14. Shen, J. "Modeling and numerical approximation of two-phase incompressible flows by a phase-field approach", *Lecture Note Series*, Purdue University, pp. 1-49 (2011).

15. Tiezheng, Q., Xiao-Ping, W. and Ping, Sh. "A variational approach to moving contact line hydrodynamics", *J. Fluid Mech.*, **564**, pp. 333-360 (2006).
16. Yue, P., Feng, J., Liu, C. and Shen, J. "A diffuse-interface method for simulating two-phase flows of complex fluids", *J. Fluid Mech.*, **515**, pp. 293-317 (2004).
17. Cahn, J.W. and Hilliard, J.E. "Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy", *J. Chem. Phys.*, **28**(2), pp. 258-267 (1958).
18. Boettinger, W., Warren, J., Beckermann, C. and Karma, A. "Phase-field simulation of solidification 1", *Annu. Rev. Mater. Res.*, **32**(1), pp. 163-194 (2002).
19. Ju, L., Zhang, J. and Du, Q. "Fast and accurate algorithms for simulating coarsening dynamics of Cahn-Hilliard equations", *Comp. Mater. Sci.*, **108**, pp. 272-282 (2015).
20. Dyke, V., *An Album of Fluid Motion*, Stanford, Calif., Parabolic Press (2012).
21. Wadhwa, A.R., Magi, V. and Abraham, J. "Transient deformation and drag of decelerating drops in axisymmetric flows", *Phys. Fluids*, **19**(11), p. 113 (2007).