

حل معکوس معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی در رودخانه‌ها جهت شناسایی منبع آلاینده

محمد لوشابی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مهدی مظاهری* (استادیار)

جمال محمدولی سامانی (استاد)

دانشکده‌ی کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۸ (۱۳-۱۰۳-۱۳۰۳)
دوری ۳-۳۵، شماره ۱، ص. ۱۳۰-۱۳۳

آلودگی تخلیه شده در رودخانه توسط فرایندهای انتقال (جابه‌جایی - پراکندگی) به پایین دست منتقل می‌شود؛ پس یافتن هرچه سریع‌تر منبع آلاینده بسیار حائز اهمیت است. در این نوشتار با استفاده از حل معکوس معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی در حالت یک‌بعدی در شرایط جریان ماندگار و غیر یکنواخت، داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده‌ی تخلیه شده در رودخانه بازسازی می‌شوند. اساس روش حل معکوس ارائه شده، به نام روش شبه معکوس پذیری، بر این مبناست که با اضافه کردن ترم پایداری (ترم مشتق چهارم) به معادله‌ی مذکور که در ترم پایداری ضریب پایداری نقش اصلی را دارد، پاسخ‌های برگشتی این معادله را به هم‌گرایی لازم می‌رساند. نتایج نشان می‌دهد که هرچه الگوی زمانی بارگذاری دارای پیچیدگی بیشتری باشد به دلیل اثر ترم پراکندگی، بازسازی آن، توسط مدل معکوس با دشواری بیشتری مواجه است، اما همچنان روش شبه معکوس پذیری قابلیت خوبی در بازسازی الگوی زمانی بارگذاری غلظت آلاینده در رودخانه دارد.

واژگان کلیدی: مدل مستقیم، مدل معکوس، شبه معکوس پذیری، سری زمانی غلظت آلاینده، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی، ضریب پایداری.

m.loushabi@modares.ac.ir
m.mazaheri@modares.ac.ir
samani_@modares.ac.ir

۱. مقدمه

بنابراین یافتن هرچه سریع‌تر مکان و زمان رهاسازی آلاینده می‌تواند کمک شایانی باشد در جهت کاهش آلودگی و کمینه‌سازی خسارات را در پی داشته باشد. روش‌های مسئله‌ی معکوس^۱ در شناسایی منبع آلاینده راه‌گشای بسیاری از مشکلات شده است؛ این روش‌ها به صورت معکوس در زمان و مکان برای شناسایی منبع آلاینده عمل می‌کنند.

مطالعه‌ی مسائل معکوس روی معادلات مختلف به خصوص معادلات یفرانسسیل جزئی و اخذ نتایج، مورد علاقه‌ی بسیاری از محققان بوده است. یک مسئله‌ی معکوس ممکن است با موارد «عدم وجود جواب»، «عدم یکتایی جواب»، «عدم پایداری» یا ترکیبی از آن‌ها مواجه باشد.^[۲]

در این بخش ضمن مروری بر تحقیقات انجام گرفته در زمینه‌ی حل معکوس، اختصاصاً به مروری بر تحقیقات انجام گرفته در زمینه‌ی روش شبه معکوس‌پذیری (QR)^۲ می‌پردازیم.

وانگ و لیو^[۴] روش تحلیلی را برای شناسایی منبع آلاینده‌ی نقطه‌ی و در یک بعد ارائه کردند. روش تحلیلی مذکور نیازمند وجود اطلاعات رصد شده از نقاطی متمایز در طول رودخانه است.

حمدی و همکاران^[۵] حدود فعالیت زمانی مرتبط با برخی منابع ناشناخته را با کاربرد معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی توسعه یافته‌ی خطی دوبعدی را مورد

منابع آب‌های سطحی به دلیل کاربرد فراوان در بخش کشاورزی، صنعت و مصارف شهری در معرض آلودگی‌های شیمیایی قرار دارند. اغلب رودخانه‌ها توسط صنایع ایجاد شده در اطراف آن‌ها آلوده می‌شوند. منظور از آلودگی آب، آلودگی شیمیایی، میکروبی، آلودگی با مواد زاید آب دریاچه‌ها، رودخانه‌ها و آب‌های زیرزمینی است.^[۱] برای محدود کردن صنایع در رهاسازی آلاینده به رودخانه‌ها مقرراتی وجود دارد، اما بدیهی است حتی با وضع قوانین مهم و کاربردی باز هم ورود غیرمجاز آلاینده‌ها به منابع آبی امری غیرقابل انکار است. تخلف یک منبع آلاینده در مورد تخلیه‌ی پساب‌ها به منابع آبی می‌تواند به سه صورت انجام شود:^[۱]

۱. تخلیه‌ی پساب با غلظت بیش از حد تعیین شده در استاندارد،
۲. تخلیه‌ی پساب در زمان‌هایی غیر از زمان‌های تعیین شده در استاندارد،
۳. تخلیه‌ی مواد ممنوع شده در استاندارد.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۱۰/۲۰، اصلاحیه ۱۳۹۷/۱/۱۴، پذیرش ۱۳۹۷/۱/۲۸.

DOI: 10.24200/j40.2018.50053.1455

شناسایی قرار دادند. آن‌ها با برقراری یک روش شناسایی با استفاده از ثبت غلظت در مرز خروجی جریان و ثبت شار بر مرز ورودی جریان در دامنه‌ی مورد بررسی توانستند حدود فعالیت زمانی را بدون هیچ‌گونه اطلاعات پیشین درباره‌ی اشکال منابع ناشناخته‌ی درگیر تعیین کنند.

حمدی^[۶] شناسایی یک منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی را با استفاده از معادله‌ی انتقال توسعه یافته‌ی دوبعدی خطی انجام داد. وی منبع مورد نظر را با در نظر گرفتن فرضیات محدود کننده و با اندازه‌گیری غلظت در مرز جریان خروجی از دامنه کنترل شناسایی کرده است. سپس با فرض این که تابع غلظت منبع قبل از زمان کنترل نهایی تمام می‌شود با برقراری یک روش شناسایی شبه صریح مینی بر برخی نتایج کنترل مرزی موجود توانست پارامترهای منبع مورد نظر را با اندازه‌گیری غلظت در مرز جریان خروجی و از اندازه‌گیری شار در مرز ورودی جریان به دست آورد.

حمدی و مهفودهی^[۷] با استفاده از معادله‌ی کلی انتقال به صورت یک بعدی و با در نظر گرفتن ضرایب متغیر مکانی پراکنندگی، سرعت و واکنش، نیز در دسترس داشتن اطلاعات پیشینی در مورد منبع آلاینده توانستند مکان و تابع شدت منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی را در رودخانه با ثبت غلظت در بالادست و پایین دست منبع آلاینده شناسایی کنند.

مولسن و فریند^[۸] با استفاده از مدل احتمال برگشتی منطقی تحت تأثیر چاه را مشخص کرده و روشی برای تعیین میزان آسیب‌پذیری آبخوان ارائه کردند. در این نوشتار روشی جایگزین به منظور تعیین منطقی تحت تأثیر چاه بر اساس مفهوم عمر متوسط ارائه شده است. به عبارت دیگر، با استفاده از مفهوم زمان برگشتی پیمایش آلاینده، شکل کلی آبخوان مشخص می‌شود. مدل دوبعدی و سه‌بعدی آن برای چاهی در حوضه‌ی آبریز واترلو (کانادا) مورد استفاده قرار گرفته است.

کوپالا و همکاران^[۹] مدل احتمال برگشتی و مدل مبتنی بر روش‌های زمین آماری را با یکدیگر مقایسه کردند. در پژوهش اخیر از داده‌های آزمایشگاهی تحت شرایط کاملاً کنترل شده استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش زمین آماری قادر است تابع اولیه‌ی رهاسازی آلاینده و مکان رهاسازی را به خوبی تشخیص دهد؛ از جمله مشکلات این مدل می‌توان به نیاز به فرضیه‌ی اولیه برای تابع رهاسازی و مشخص کردن چند نقطه‌ی مظنون به منبع آلاینده اشاره کرد. روش احتمال برگشتی تنها به یک نقطه‌ی رصد با تعداد معدودی مشاهده نیاز دارد، در حالی که مدل زمین آماری به حداقل دو نقطه‌ی رصد با تعداد زیادی مشاهده نیاز دارد. لازم به ذکر است که در روش احتمال برگشتی یکی از پارامترهای مکان یا زمان رهاسازی باید مشخص باشد. هر دو مدل پیش‌بینی خوبی از مکان اولیه‌ی آلاینده ارائه می‌دهد.

آلاینده توسط فرایندهای جابه‌جایی^۳ پراکنندگی^۴ در رودخانه منتشر می‌شود، پس برای یافتن زمان و نوع الگوی زمانی بارگذاری منبع آلاینده، حل معادله‌ی مذکور با گام‌های زمانی منفی ضرورت می‌یابد، که معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی بدخیم را ایجاد خواهد کرد.^[۱۰] معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم به معادلاتی اطلاق می‌شود که با روش‌های متداول حل معادلات دیفرانسیلی جزئی قابل حل نیستند و در اصل برای آنها پاسخ پایداری ایجاد نخواهد شد، بلکه پاسخ‌ها به همگرایی لازم نمی‌رسند و واگرا می‌شوند.^[۱۰]

پس باید روشی ارائه شود تا بتوان ضمن حل معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم، پاسخ‌های معادلات را به همگرایی لازم رساند. بنابراین روش شبه معکوس پذیری (QR) توسط لئس و لیون^[۱۱] ارائه شده است. هدف این روش حل معادلات

دیفرانسیلی جزئی با گام‌های زمانی منفی است. استراتژی روش QR جلوگیری از حل معادله‌ی غیر معکوس‌پذیر و به جای آن حل معادله‌ی نزدیک به معادله‌ی اصلی با گام زمانی منفی است.^[۱۲]

لئس و لیون^[۱۱] معادله‌ی پخشیدگی^۵ را با زمان معکوس از طریق جایگزینی اپراتور پخشیدگی $\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ با اپراتور QR، $\Delta - \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon$ که در آن ϵ ثابت مثبت کوچک و Δ پایه‌یی برای معادله‌ی لاپلاس است، حل کردند.

یانگ^[۱۳] شناسایی منبع ناشناخته را برای معادله‌ی پخشیدگی ذرات مورد مطالعه قرار داد، او نتیجه گرفت که تغییر کوچک در داده‌های اندازه‌گیری پاسخ‌های حل معکوس معادله‌ی پخشیدگی تأثیرگذار خواهد بود.

یک راه حل برای پایداری پاسخ‌های معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی با ضرایب ثابت، به صورت معکوس، روش QR با جایگذاری ترم پایداری مشتق چهارم است.^[۱۴] روش QR یک روش تنظیم^۶ برای حل معادله‌ی همرفت حرارت^۷ با

اضافه کردن پارامتر تنظیم به معادله‌ی همرفت است.^[۱۵] اسماعیل‌زاده و همکاران^[۱۲] روش QR را برای معادله‌ی سه‌بعدی همرفت گرما ارائه دادند. پاسخ‌های معادله‌ی سه‌بعدی همرفت گرما در حالت معکوس زمانی ناپایدار است، پس روش QR باعث پایداری و همگرایی پاسخ‌های معادله می‌شود.^[۱۲]

بگنرگلو و اتمادجا^[۱۶] در نتایج خود نشان دادند که ترم پراکنندگی بر دقت پاسخ‌های حل معکوس معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی با روش QR بسیار مؤثر است. رویکرد روش QR دارای الگوریتمی غیر تکرار شونده و فقط با یکبار پیاده‌سازی در روش عددی برای معادله‌ی دیفرانسیلی جزئی به این صورت که مجهولات مسئله را به صورت معین و بدون تکرار حل می‌کند.^[۱۷]

اسکاگر و کابالا^[۱۸] روش QR را برای حل معکوس معادله‌ی انتقال آلاینده در آب‌های زیرزمینی برای شناسایی منابع آلودگی به کار بردند. آنها اعتقاد داشتند که روش مذکور در حل معکوس معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی قابل کاربرد است.^[۱۶، ۱۸]

لئس و لیون^[۱۱] معادله‌ی انتقال را با ضرایب ثابت در آب‌های زیرزمینی با روش QR حل کردند. روش مذکور در حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی به صورت معکوس زمانی، در مواقعی که آلودگی غالب بر جریان است عملکرد ضعیفی دارد.^[۱۶، ۱۹]

روش QR در تحقیق ژیانگ و همکاران^[۱۵] بسیار به تعیین شرایط اولیه‌ی توزیع غلظت آلاینده در دامنه‌ی محاسباتی متکی بود.^[۱۵]

دورا و رایو^[۲۰] اثبات کردند با اضافه کردن محدودیت‌های خاص در شرایط مرزی می‌توان پاسخ‌های به مراتب دقیق‌تری به دست آورد.

روش شبه معکوس پذیری روشی است که با اضافه کردن ترم پایدارکننده مشتق چهارم به معادله‌ی جابه‌جایی، پراکنندگی، باعث پایداری پاسخ‌های معادله‌ی مذکور در گام‌های زمانی منفی می‌شود؛^[۲۱] بدین صورت می‌توان معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی را در اصطلاح به صورت معکوس حل کرد. هدف به دست آوردن داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده‌ی رها شده (تابع شدت فرضی) در رودخانه و همچنین زمان رهاسازی را می‌توان توسط مدل ارائه شده بازسازی کرد، که در ترم پایداری ضریب پایداری نقش اصلی را دارد.^[۲۲]

مشخصاً ساده سازی در معادلات جریان شناسایی منبع آلاینده را در رودخانه آسان‌تر و به عکس عدم ساده‌سازی در معادلات مذکور شناسایی منبع آلاینده را دشوارتر می‌کند.^[۲۳، ۲۴]

در نوشتار حاضر روش شبه معکوس‌پذیری برای حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکنندگی با گام‌های زمانی منفی به کار می‌رود، رودخانه در نظر گرفته شده در

انتقال آلاینده در حالت یک بعدی چنین است [۲۴]:

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} = -\frac{\partial(QC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - AkC + AS \quad (5)$$

که در آن، x بعد مکان، t بعد زمان، A سطح مقطع جریان، Q دبی جریان، C غلظت آلاینده، E_x ضریب پراکندگی در جهت طول رودخانه است. همچنین k ضریب ترم واکنش و S ترم منبع آلاینده است. در معادله ۵، برای تعیین پارامترهای جریان در حالت یک بعدی از حل معادلات سنت - ونانت استفاده می شود. لازم به ذکر است که معادله ی جابه جایی - پراکندگی و معادله ی جریان با شرط جریان ماندگار و غیریکنواخت مطابق رابطه ی ۶ بازنویسی می شوند:

$$A \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(QC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - AkC + AS \quad (6)$$

معادله ی جریان به کار رفته در همه ی مدل های موجود برای حالت شبیه سازی یک بعدی، معادلات جریان سنت - ونانت است که برای جریان ماندگار و غیریکنواخت مطابق معادلات ۷ و ۸ است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (8)$$

که در آن، Q دبی جریان، A سطح مقطع جریان، y عمق جریان، S_f شیب خط انرزی، S_0 شیب بستر رودخانه است.

معادله ی جابه جایی - پراکندگی به صورت گام های زمانی منفی در دسته معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم قرار می گیرد. [۱۶] پاسخ های معادله ی جابه جایی - پراکندگی در گام های زمانی منفی به همگرایی لازم نمی رسند. روش شبه معکوس پذیری ترم پایدار مشتق چهارم^۸ را به معادله ی جابه جایی - پراکندگی اضافه می کند که اضافه کردن چنین اپراتوری موجب تنظیم پاسخ های معادله در حالت گام های زمانی منفی شده و از واگرایی پاسخ ها جلوگیری می کند. [۱۸] پس معادله ی ۶ طبق روش شبه معکوس پذیری چنین بازنویسی می شود.

$$A \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial(QC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (9)$$

که در آن، ε ضریب پایداری نام دارد. به ترم مشتق چهارم مشخص شده ترم پایداری گفته می شود که نقش اصلی را در همگرایی معادله ی ۹ با گام های زمانی منفی دارد. ضریب پایداری و ترم پایداری برای همگرایی پاسخ های معادله ی مذکور مورد استفاده قرار می گیرد که پایه و اساس روش شبه معکوس پذیری بر مبنای ترم پایداری است. [۱۱] همچنین ترم های رابطه ی ۹ در سمت چپ تساوی تغییرات غلظت نسبت به زمان را نشان می دهد، و در سمت راست تساوی از سمت چپ به راست، ترم اول ترم جابه جایی نام دارد که با تقسیم دبی (Q) بر سطح مقطع جریان ضریب جابه جایی به دست می آید. همچنین ترم دوم، ترم پراکندگی نام دارد که به E_x ضریب پراکندگی گفته می شود. در ادامه توضیحات لازم برای این ضریب ارائه می شود.

لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر ترم منبع آلاینده و ضریب واکنش برابر صفر در نظر گرفته می شود. شرایط مرزی و انتهایی معادله ی ۹ عبارت است از:

شرایط جریان ماندگار و غیر یکنواخت است. در این تحقیق طبق تابع شدت فرضی در رودخانه آلاینده یی در مرز ورودی رها می شود؛ برای یافتن تابع شدت فرضی روش شبه معکوس پذیری به کار می رود. به طور کلی روش مذکور به دلیل محدودیت موجود در شرط اولیه ی آن و شرایط واقعی موجود در جریان رودخانه، در محیط رودخانه در دیگر مطالعات و تحقیق های پیشین مورد استفاده واقع نشده است. با رفع چنین محدودیتی روش شبه معکوس پذیری در این نوشتار در رودخانه مورد استفاده قرار گرفته است.

در این نوشتار روشی جدید برای رفع محدودیت شرایط اولیه ی (پروفیل طولی غلظت آلاینده) روش شبه معکوس پذیری استفاده شده است. همچنین با ارائه ی الگوریتمی متناسب با شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت رودخانه، روش شبه معکوس پذیری در رودخانه برای شناسایی منبع آلاینده مورد آزمون واقع شده است.

نوآوری های موجود در این نوشتار را می توان این گونه خلاصه کرد که محدودیت برداشت پروفیل طولی غلظت آلاینده برای شرط اولیه ی روش شبه معکوس پذیری توسط روشی برطرف شده است. همچنین از روش مذکور در رودخانه بهره گرفته شده که در تحقیقات پیشین این امر میسر نبوده است.

به طور کلی هدف از ارائه ی نوشتار حاضر استفاده از روش شبه معکوس پذیری در رودخانه برای شناسایی منبع آلاینده ی رها شده در مرز ورودی رودخانه است.

۲. مبانی نظری و روش ها

به طور کلی روش شبه معکوس پذیری ابتدا برای معادله ی گرما ارائه شد که اپراتور گرما در معادله ی مذکور عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) u = 0 \quad (1)$$

$$u(x, T) = X(x) \quad (2)$$

که در آن، k ضریب هدایت گرما، x بعد مکان، t بعد زمان، T کل زمان شبیه سازی، $X(x)$ شرایط انتهایی و تابع به دست آمده از حل مستقیم معادله ی مذکور است.

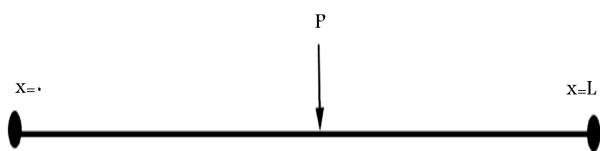
رابطه ی ۲ شرط انتهایی به دست آمده از حل مستقیم معادله ی ۱، به روش های معمول است. اما اگر معادله ی ۱ به صورت معکوس حل شود، مشخصاً از رابطه ی ۲ به عنوان شرایط انتهایی معادله ی معکوس استفاده خواهد شد، و بدین ترتیب یک معادله ی دیفرانسیلی جزئی بدخیم ایجاد می شود که پاسخ های آن به همگرایی لازم نمی رسد. پس ترم پایداری به منظور حل معادله ی معکوس، به معادله ی ۱ اضافه می شود:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta - \varepsilon\Delta^2 \right) u = 0 \quad \varepsilon > 0 \quad (3)$$

با اضافه شدن ترم پایداری ($\varepsilon\Delta^2$) که در آن ε ضریب پایداری نام دارد، معادله ی ۱ به صورت معکوس قابل حل است. شرایط انتهایی معادله ی ۳ عبارت است از:

$$u(x, T) = X(x) \quad (4)$$

با توجه به مطالب گفته شده می توان معادله ی ۴ را با اعمال تغییراتی به معادله ی جابه جایی - پراکندگی تعمیم داد. فرم کلی معادله ی جابه جایی - پراکندگی یا معادله ی



شکل ۱. رودخانه‌ی فرضی.

برای شرط اولیه‌ی معادله‌ی ۹، برداشت پروفیل طولی غلظت آلاینده در رودخانه در یک زمان ضروری است، زیرا معادله‌ی بازنویسی شده توسط روش شبه معکوس پذیری نیاز به پروفیل مکانی غلظت دارد که در واقعیت برداشت غلظت آلاینده در یک زمان از سراسر رودخانه امری بسیار مشکل، هزینه‌بر یا غیرممکن است. پس باید برداشت غلظت آلاینده از رودخانه به گونه‌ی انجام شود که هم کاربردی و هم با کمترین هزینه ممکن باشد زیرا وجود یک ایستگاه اندازه‌گیری در هر رودخانه کاملاً منطقی و عملی است. اما همان طور که مشخص است با محدودیت استفاده از روش شبه معکوس پذیری در این مورد، باید غلظت آلاینده را به صورت تابع مکانی یا همان پروفیل طولی برداشت کرد. پس باید برای این مشکل چاره‌ی اندیشید. در این تحقیق از ابتکار برداشت داده از یک نقطه در همه‌ی زمان‌ها و با استفاده از تابع شدت غلظت آلاینده، برای به دست آوردن پروفیل مکانی بهره‌گرفته شده است تا بتوان این مشکل را نیز برطرف کرد. روش ارائه شده، عملاً را قادر می‌سازد تا به جای برداشت داده از نقطه‌های زیاد در یک زمان مشخص، که امری بسیار هزینه‌بر است، فقط از یک نقطه در هر زمان و از طریق فقط یک ایستگاه سنجش داده‌برداری کنیم. توضیح روش رفع محدودیت شرط انتهایی معادله‌ی شبه معکوس پذیری با ارائه‌ی مثالی ساده به این صورت است که در رودخانه‌ی مطابق شکل ۱ و در ایستگاه سنجه P ، می‌توان غلظت آلاینده را در هر زمان برداشت.

برای مثال اگر بازه زمانی برداشت داده دستگاه اندازه‌گیری غلظت آلاینده، ۱۲ ساعت در نظر گرفته شود، می‌توان چنین شرح داد که از ساعت ۱۲:۰۰ ظهر الی ۰۰:۲۴ عصر، دستگاه داده برداری کرده است. فرضاً طبق تابعی غلظت آلاینده در طول ۱۲ ساعت برداشت شده است و غلظت آلاینده طی مدتی مشخص، از صفر شروع شده، طی روندی افزایش یافته و سپس پایان پذیرفته است، و غلظت آلاینده در رودخانه برابر صفر شده و در عمل آلاینده از نقطه‌ی اندازه‌گیری گذشته است. در این مرحله است که برای استفاده از داده‌های موجود در مدل برگشتی از روش نامبرده استفاده می‌شود، به این صورت که تابع شدت غلظت آلاینده به دست آمده از ایستگاه سنجه در نقطه‌ی P ، می‌توان به عنوان شرط مرزی ورودی در مدل مستقیم معادله‌ی انتقال، در بازه P تا L استفاده کرد. طبیعتاً خروجی مدل مستقیم تعریف شده برای بازه P تا L ، پروفیل طولی غلظت آلاینده خواهد بود، که می‌توان از همین پروفیل در مدل برگشتی ارائه شده توسط روش شبه معکوس پذیری استفاده کرد. با رفع چنین محدودیتی در روش شبه معکوس پذیری می‌توان از این روش برای استفاده در رودخانه با هزینه‌ی بسیار پایین و در حالتی کاربردی استفاده کرد.

۲.۲. مدل عددی

برای گسسته‌سازی معادله‌ی ۹ از روش تقریب تفاضل مرکزی برای مشتقات مکانی و از الگوی کرانک - نیکلسون برای مشتق زمانی استفاده شده است. از جمله مزایای این روش، پایداری بی‌قید و شرط آن است و لذا می‌توان گام زمانی بزرگ‌تری در برنامه‌ی رایانه‌ی اختیار کرد. همچنین این الگو هم در مکان و هم در زمان دارای دقت درجه دو است و میزان پراکندگی عددی در آن نیز برابر صفر است.^[۱۱] پس معادله‌ی ۹ به صورت گسسته‌سازی ترم به ترم درخواهد آمد:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(L, T) = 0 \quad (13)$$

$$C(x, t) = \xi(x) \quad (14)$$

که در آنها، L طول رودخانه، T کل زمان شبیه‌سازی، $\xi(x)$ شرط انتهایی و پروفیل طولی غلظت آلاینده از کل طول رودخانه است. چنان که مشاهده می‌شود در بالا از شرایط انتهایی نام برده شده است؛ به این معنی که به معادله‌ی ۹ شرط انتهایی داده می‌شود تا بتواند به صورت برگشتی بازسازی را انجام دهد. اما با تغییر و متغیری ساده می‌توان آن را به شرط ابتدایی تبدیل کرد تا مانند شکل متداول دیگر معادلات دیفرانسیلی جزئی شود. تغییر و متغیر شرط انتهایی تبدیل می‌شود به:

$$\tau = T - t \quad (15)$$

رابطه‌ی بازنویسی شده با تغییر و متغیر بالا عبارت است از:

$$A \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial(QC)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (16)$$

شرایط مرزی و انتهایی معادله‌ی ۱۶ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0, \tau) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L, \tau) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0, \tau) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(L, \tau) = 0 \quad (20)$$

$$C(x, 0) = \xi(x) \quad (21)$$

باید توجه داشت معادله‌ی ۱۶ با توجه به نکات ذکر شده بعد از ارائه‌ی این معادله توسط روش شبه معکوس پذیری بازنویسی شده است. در معادله‌ی ۹، $\varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ ترم پایداری نام دارد و همان طور که از نام آن بر می‌آید باعث پایداری معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی در گام‌های زمانی منفی می‌شود. همچنین در این معادله ε ضریب پایداری نام دارد و مشخصاً در ترم پایداری نقش اصلی را دارد.^[۱۸] با تغییر ضریب پایداری پاسخ‌ها دچار تغییر می‌شوند و اگر ضریب پایداری از مقداری کم‌تر پاسخ‌ها ناپایدار شده و جواب‌ها واگرا می‌شوند، همچنین اگر مقدار ضریب پایداری از حدی بیشتر شود پاسخ‌ها به صفر میل می‌کنند و طبیعتاً پاسخ صحیح را نخواهد داد.^[۱۱] البته معیار مشخصی برای تعیین مقدار ε وجود ندارد^[۱۸] و باید توجه داشت که، مقدار ضرایب جابه‌جایی - پراکندگی، زمان شبیه‌سازی برای بازسازی شرایط موجود توسط روش شبه معکوس پذیری در تعیین مقدار ضریب پایداری مؤثر است^[۱۶] و بدیهی است که هرچه داده‌ها با دقت کمتری برداشت شده باشند، بازسازی شرایط موجود توسط روش شبه معکوس پذیری مشکل‌تر، استفاده از ضریب پایداری دارای محدودیت بیشتر و با دقت کم‌تری خواهد بود.

۱.۲. رفع محدودیت شرط انتهایی روش شبه معکوس پذیری

همان طور که در قسمت ارائه‌ی شرایط مرزی و اولیه‌ی معادله‌ی برگشتی اشاره شد،

$$\begin{aligned} & \Delta \tau \left[\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2} \right] C_{i+1}^j + \\ & \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} \right] C_i^j + \\ & \Delta \tau \left[\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2} - \frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2} + \frac{A_i}{\Delta \tau} \right] C_i^j + \\ & \Delta \tau \left[\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2} \right] C_{i-1}^j + \\ & \Delta \left(-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right) C_{i-2}^j \end{aligned} \quad (24)$$

در رابطه‌ی ۲۴ $C \dots C^j$ بردار معلوم و ستون غلظت مشخص و همان شرایط اولیه است که در معادله‌ی برگشتی به عنوان شرایط انتهایی وارد می‌شود، همچنین C_{i+1}^{j+1} بردار مجهولات و ستون غلظتی است که از حل برگشتی به دست می‌آید. دیگر اندیس و پارامترها نیز در معادلات و روابط قبل معرفی شده‌اند. با توجه به رابطه‌ی ۲۴ مشاهده می‌شود که برای تشکیل ماتریس ضرایب و با توجه به ترم مشتق چهارم، $n - 4$ معادله وجود دارد در حالی که تعداد n مجهول داریم. پس ۴ معادله‌ی دیگر لازم است تا تعداد معادلات برابر مجهولات شود. بدین منظور باید از ۴ شرط مرزی که تعداد مجهولات را برابر معادلات می‌کند، استفاده کرد. با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده و رابطه‌ی ۲۴، روابط به کار رفته در ماتریس ضرایب عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, a_{12} = 1, \dots, a_{1n} = 0 \\ a_{21} &= 1, a_{22} = -2, a_{23} = 1, \\ a_{24} &= 0, \dots, a_{2n} = 0 \quad a_{21} = \Delta \tau \left(\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right), \\ a_{32} &= \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{2-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{2-1}}{4\Delta x^2} \right], \\ a_{33} &= \Delta \tau \left[\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{2+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{2-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \right. \\ & \left. \frac{Q_{2+1}}{4\Delta x^2} + \frac{Q_{2-1}}{4\Delta x^2} + \frac{A_2}{\Delta \tau} \right], \\ a_{34} &= \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{2+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{2+1}}{4\Delta x^2} \right], \\ a_{35} &= \Delta \tau \left(\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right) \\ a_{41} &= 0, a_{42} = \Delta \tau \left(+\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right), \\ a_{43} &= \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{3+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{3-1}}{4\Delta x^2} \right], \\ a_{44} &= \Delta \tau \left[\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{3+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{3-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \right. \\ & \left. \frac{Q_{3+1}}{4\Delta x^2} + \frac{Q_{3-1}}{4\Delta x^2} + \frac{A_3}{\Delta \tau} \right], \\ a_{45} &= \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{3+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{3+1}}{4\Delta x^2} \right], \\ a_{46} &= \Delta \tau \left(\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right), \quad a_{51} = 0, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

برای دیگر ضرایب نیز به طور مشابه می‌توان عمل کرد. با توجه به روابط ارائه

$$\begin{aligned} A \frac{\partial C}{\partial \tau} &\cong A_i^j \left(\frac{C_{i+1}^{j+1} - C_i^j}{\Delta \tau} \right) \\ \frac{\partial(QC)}{\partial x} &\cong \frac{(QC)_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - (QC)_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) &\cong \frac{\left[(AE_x)_{i+1} C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x^2} \\ &- \frac{2 \left[(AE_x)_i C_i^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x^2} + \frac{\left[(AE_x)_{i-1} C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &\cong \\ &\epsilon \left(\frac{C_{i+2}^{j+\frac{1}{2}} - 4C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} + 6C_i^{j+\frac{1}{2}} - 4C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} + C_{i-2}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$\Delta \tau$ گام زمانی، Δx گام مکانی، و همچنین i شمارنده‌ی مکان و j شمارنده‌ی زمان است. گسسته‌سازی کلی این معادله مطابق رابطه‌ی ۲۳ خواهد بود:

$$\begin{aligned} A_i^j \left(\frac{C_{i+1}^{j+1} - C_i^j}{\Delta \tau} \right) &= \frac{(QC)_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - (QC)_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\ &- \frac{\left[(AE_x)_{i+1} C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x^2} + \frac{2 \left[(AE_x)_i C_i^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x} \\ &- \frac{\left[(AE_x)_{i-1} C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x^2} \\ &- \epsilon \left(\frac{C_{i+2}^{j+\frac{1}{2}} - 4C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} + 6C_i^{j+\frac{1}{2}} - 4C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} + C_{i-2}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

با توجه به الگوی‌های ارائه شده در گسسته‌سازی به شکل رابطه‌ی ۲۲ ارائه‌ی ماتریس ضرایب و روابط به دست آمده برای محاسبه‌ی بردار مجهولات کمک شایانی به درک هرچه بهتر مفهوم الگوی عددی به کار رفته می‌کند. پس با توجه به گسسته‌سازی انجام گرفته روی معادله‌ی ۹ که در رابطه‌ی ۲۲ ارائه شده، برای ساختن ماتریس ضرایب به روابط ۲۴ نیاز است، شایان ذکر است که در گسسته‌سازی زیر، معادلات گسسته شده در سمت چپ ضرایب و ستون غلظت آلاینده در زمان قبل خواهد بود که از مجهولات است. همچنین در سمت راست ضرایب ستون غلظت آلاینده معلوم است و همچنین محاسباتی توسط روش شبه معکوس پذیری است.

$$\begin{aligned} & \Delta \tau \left(+\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right) C_{i+2}^{j+1} + \\ & \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2} \right] C_{i+1}^{j+1} + \\ & \Delta \tau \left[\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} - \frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} \right] C_i^{j+1} + \\ & \Delta \tau \left[-\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2} + \frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2} + \frac{A_i}{\Delta \tau} \right] C_i^{j+1} + \\ & \Delta \tau \left[-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} + \frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2} \right] C_{i-1}^{j+1} + \\ & \Delta \tau \left(+\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right) C_{i-2}^{j+1} = \\ & \Delta \tau \left(-\frac{\epsilon}{2\Delta x^2} \right) C_{i+2}^j + \end{aligned}$$

شده، ماتریس ضرایب و بردار مجهولات و بردار معلومات تبدیل می‌شود به:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & & & & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & & & & & & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \\ b_{17} \\ b_{18} \\ b_{19} \\ b_{20} \end{bmatrix} \quad (26)$$

بردار مجهولات و معلومات به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

همان‌طور که در ماتریس‌های ۲۵ مشخص است نوع رابطه‌ی ایجاد شده بین ماتریس‌ها به صورت معادله‌ی $ax = b$ است که b بردار معلومات x بردار مجهولات C_1, C_2, \dots, C_n است و a ماتریس ضرایب است که در رابطه‌ی ۲۶ نشان داده شده است و به صورت کلی C_1, C_2, \dots, C_n در زمان‌های t_1, t_2, \dots, t_n به دست می‌آید.

۳. نتایج و بحث

برای صحت‌سنجی مدل معکوس معادله‌ی انتقال درحالت یک‌بعدی، ابتدا یک رودخانه‌ی فرضی با مقاطع عرضی نامنظم در نظر گرفته می‌شود. سپس با حل معادلات جریان در حالت یک‌بعدی با شرایط مرزی معلوم، پارامترهای شامل عمق‌ها و سرعت‌ها و ... به دست می‌آید. سپس معادله‌ی انتقال مستقیماً حل می‌شود و خروجی مدل مستقیم معادله‌ی انتقال به عنوان ورودی حل معکوس برای معادله‌ی انتقال در حالت یک‌بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

وقتی که معادلات جریان و انتقال در رودخانه به صورت یک‌بعدی به کار می‌رود، توزیع کمیت‌های سرعت و غلظت در مقطع عرضی رودخانه یکسان فرض می‌شود. در حقیقت معادلات یک‌بعدی به صورت میانگین مقطعی از انتقال‌گیری معادلات سه‌بعدی در مقطع عرضی رودخانه به دست می‌آید. مهم‌ترین عوامل مؤثر در یک‌بعدی بودن جریان در رودخانه، هندسه، توپوگرافی و شرایط زیری بستر است و همچنین بیشترین تأثیر را بر یک‌بعدی بودن انتقال آلاینده، شرایط جریان و شرایط منبع آلاینده دارد. وقتی که معادله‌ی انتقال به صورت یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شود،

جدول ۱. مشخصات رودخانه فرضی.

پارامترها	مشخصات رودخانه
۲۴ کیلومتر	طول رودخانه
۱۰۰ متر	گام‌های مکانی
۰/۰۳۵	ضریب زبری مانینگ
دبی ثابت ۱۰۰ متر مکعب بر ثانیه	شرط مرزی در بالادست
شیب خط جریان ۰/۰۳۰ متر در متر	شرط مرزی در پایین دست
۱۲ ساعت	زمان شبیه‌سازی

فرض بر این است که توزیع غلظت در مقطع یک‌نواخت است. این فرض ممکن است تحت شرایطی، مثلاً در حالت عریض بودن رودخانه، صادق نباشد. البته باید بیان داشت که بار محاسباتی و پیچیدگی معادلات در حالت یک‌بعدی نسبت به حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی کم‌تر و سهل‌تر است.^[۲۴] برای مثال‌های فرضی در حالت یک‌بعدی، رودخانه‌ی بی به طول ۲۴ کیلومتر و با مقاطع عرضی نامنظم در نظر گرفته می‌شود (جدول ۱).

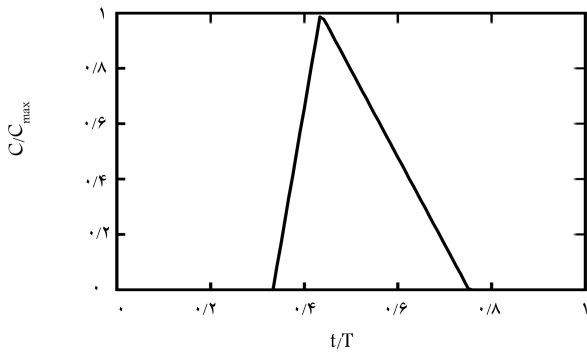
با توجه به شکل ۲، جریان به وجود آمده در رودخانه‌ی مورد نظر از نوع جریان ماندگار و غیریک‌نواخت است. با حل معادلات جریان در حالت یک‌بعدی، متغیرهای مرتبط با جریان برای این مثال به دست می‌آید. در این شکل به ترتیب مقادیر ماندگار دبی، سرعت، پروفیل طولی سطح مقطع و همچنین ضریب پراکنندگی محاسبه شده توسط رابطه‌ی دنگ و همکاران^[۲۵] (رابطه‌ی ۲۸) در طول رودخانه نشان داده شده است:

$$D_L = \frac{0.115 U^* B}{8 \varepsilon t^* H^* U_*^*} \quad (28)$$

$$\varepsilon t^* = 0.1145 + \frac{1}{3520} \left(\frac{U}{U_*} \right) \left(\frac{B}{H} \right)^{1.38} \quad (29)$$

که در آن، D_L ضریب پراکنندگی طولی، U سرعت متوسط، B عرض متوسط مقطع، H عمق متوسط مقطع و U_* نیز سرعت برشی است. ضریب پراکنندگی با استفاده از پارامترهای به دست آمده از حل معادلات جریان محاسبه می‌شود؛ از محدودیت‌های محاسبه‌ی ضریب پراکنندگی می‌توان به دقت پایین روش‌های محاسباتی اشاره کرد. از جمله روش‌هایی که در مقالات متعدد مورد استفاده قرار گرفته، می‌توان به رابطه‌ی دنگ و همکاران اشاره کرد که مورد اعتماد بسیاری از محققین بوده است. در این نوشتار نیز از روش دنگ و همکاران برای محاسبه‌ی ضریب پراکنندگی استفاده شده است. بدین منظور از روش‌های دیگر نظیر روش‌های آماری نیز استفاده شده و فرمول‌هایی نیز به دست آمده است. از جمله این فرمول‌ها می‌توان به فرمول ارائه شده در مطالعه‌ی کاشفی‌پور و فالكونر اشاره کرد^[۲۶] که با توجه به محاسبات انجام شده و مقایسه با داده‌های واقعی ضریب همستگی قابل قبولی داشته است. ضریب پراکنندگی به دست آمده توسط روش‌های شیمیایی به مراتب دقت بالاتری نسبت به فرمول‌های موجود دارد، اما هزینه‌ی روش‌های شیمیایی به مراتب بالاتر است و نیاز به امکانات بیشتری دارد. روش‌های محاسباتی به طور واضح فقط با در اختیار داشتن برخی پارامترهای جریان میسر است.

گسترده شدن ذرات یک ماده‌ی آلاینده در یک سیال می‌تواند در اثر پدیده‌های جابه‌جایی، پخشیدگی مولکولی، پخشیدگی متلاطم و پراکنندگی باشد. جابه‌جایی، انتقال ذرات ماده‌ی آلاینده در اثر حرکت جریان سیال است. پخشیدگی مولکولی در اثر حرکات تصادفی مولکول‌های سیال انجام می‌شود و بیان ریاضی آن با استفاده از قانون اول فیزیک صورت می‌پذیرد؛ براساس این قانون، شار جرمی در اثر پخشیدگی



شکل ۳. منحنی سری غلظت آلاینده (تابع شدت فرضی) در مرز ورودی (مثال اول).

جریان نسبت به مکان مشاهده می‌شود زیرا جریان ماندگار و غیریکنواخت است. با توجه به توضیحات داده شده در قسمت قبل، براساس نوع جریان مشخصاً ضریب پراکندگی نیز نسبت به مکان متغیر است.

۱.۳. کاربرد روش شبه معکوس پذیری در رودخانه (مثال اول)

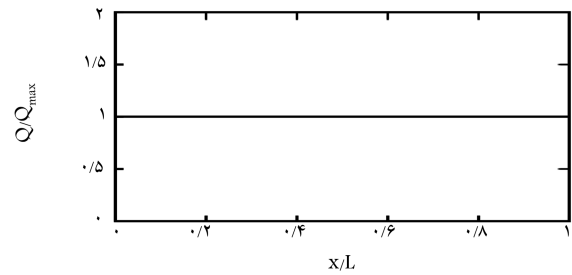
برداشت پروفیل مکانی غلظت آلاینده در رودخانه برای ارضای شرط اولیه‌ی روش شبه معکوس پذیری امری بسیار هزینه‌بر و معمولاً غیرقابل انجام است. پس باید برای رفع چنین مشکلی چاره‌ی اندیشید (شکل ۳).

مشخصاً هیچ‌گونه داده‌برداری بدون خطا، چه دستگاهی و چه انسانی وجود ندارد و همیشه برای محاسبات و نتایج به دست آمده از اندازه‌گیری داده‌های مختلف - که در این تحقیق به برداشت غلظت آلاینده اختصاص دارد - با توجه به دستگاه‌های مختلف اندازه‌گیری میزان خطایی را در نظر می‌گیرند. پس برای هرچه نزدیک‌تر شدن مسئله‌ی مورد نظر به واقعیت، مقداری خطا به داده‌های اندازه‌گیری شده یا همان داده‌های به دست آمده از حل مستقیم وارد می‌شود. [۱۸] البته میزان خطای وارده باید در حد منطقی باشد تا پاسخ‌های دریافتی نزدیک به واقعیت باشند. منطقی بودن میزان خطا یعنی از حدی بیشتر یا از حدی کوچک‌تر نباشد زیرا میزان خطای موجود در دستگاه‌های اندازه‌گیری یا خطای انسانی فقط تا حدی قابل قبول است. در این تحقیق میزان خطا ۱۵ درصد در نظر گرفته شده که مقدار زیادی است. به این ترتیب مشاهده می‌شود که خطا هر قدر زیاد باشد، چه تأثیری بر پاسخ‌های حل معکوس خواهد گذاشت.

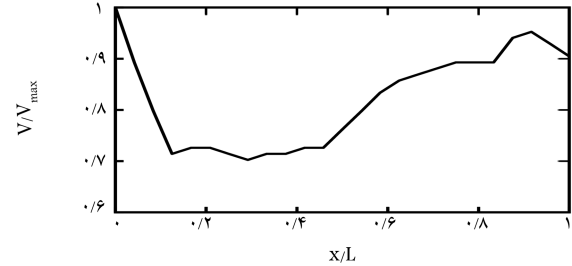
همان طور که مشخص است، هیچ برداشت داده‌ی بدون خطا و عاری از خطا نیست. برای نزدیک‌تر شدن مسئله به واقعیت به نمودار به دست آمده از حل مستقیم، خطای ۱۵ درصد اعمال شده است (شکل ۴ ب). پروفیل مکانی غلظت آلاینده در بازه P تا L مطابق شکل ۱ خواهد بود.

در شکل ۵ مشاهده می‌شود که روند برگشتی پروفیل مکانی غلظت آلاینده به سمت مرز ورودی به خوبی در حال انجام است. همان‌طور که در نمودار سری زمانی مرز ورودی بارگذاری آلاینده به صورت مثلثی نامتقارن است، نمودارهای برگشتی در هر دو زمان حالت نامتقارن به دست می‌آیند.

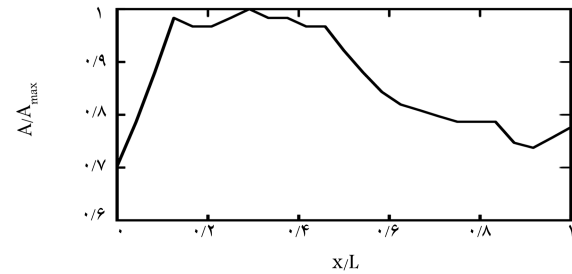
چنان‌که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، روند بازسازی نمودار سری زمانی غلظت آلاینده در مرز ورودی به طور قابل قبولی توسط مدل برگشتی در هر دو حالت با خطای ۱۵ درصد انجام گرفته و فقط تا مقدار منطقی در بازسازی نقطه‌ی اوج قله، مدل دچار مشکل شده است. باید توجه داشت که هرچه مقدار خطا بیشتر شود برای بهبود بازسازی مدل باید از مقدار ضریب پایداری بیشتری استفاده کرد تا از واگرایی



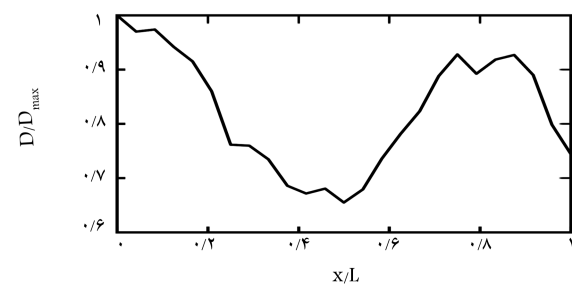
الف) دبی؟



ب) سرعت جریان؟



ج) سطح مقطع جریان؟



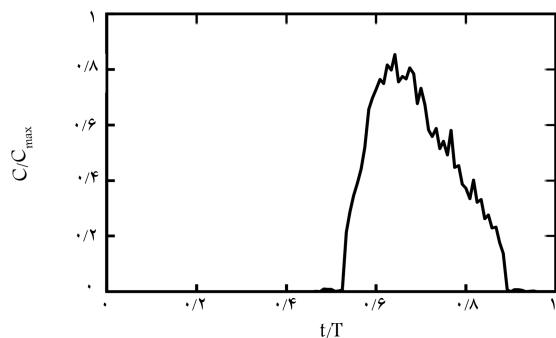
د) ضریب پراکندگی طولی.

شکل ۲. خروجی مدل جریان در حالت بی بعد.

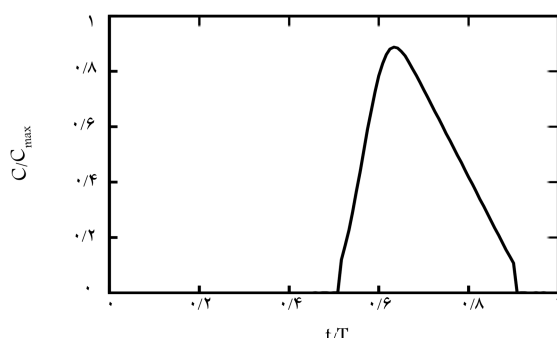
مولکولی با گرادینان مکانی غلظت متناسب است؛ ضریب این تناسب، ضریب پخشیدگی مولکولی نام دارد. [۴]

ضریب پخشیدگی مولکولی فقط به خصوصیات سیال بستگی دارد. تأثیر پخشیدگی متلاطم که بر اثر حرکات ذرات سیال به دلیل پدیده‌ی تلاطم صورت می‌گیرد بسیار بزرگ‌تر از پخشیدگی مولکولی است. پخشیدگی متلاطم به خصوصیات جریان سیال بستگی دارد و تقریباً با توان چهار سوم طول مشخصه‌ی پدیده رابطه دارد. [۲۷] ذکر این نکته قابل توجه است که تمامی نمودارهای ارائه شده در این تحقیق برای ارائه‌ی هرچه بهتر و مفهومی‌تر نتایج به صورت بی‌بعد ارائه شده است.

در شکل ۲ الف تغییرات دبی نسبت به مکان نشان داده شده که به دلیل جریان ماندگار دبی نسبت به مکان و زمان ثابت است، همچنین در شکل ۲ ب تغییرات سرعت نسبت به مکان مشاهده می‌شود؛ مطابق شکل ۲ ج تغییرات سطح مقطع

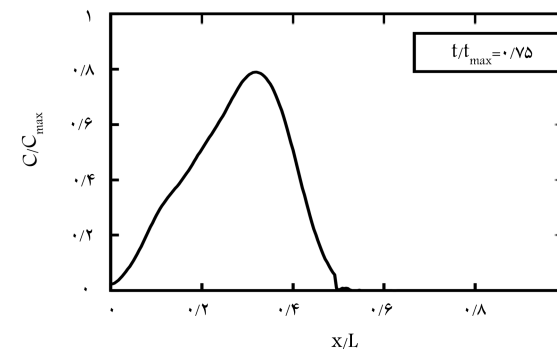
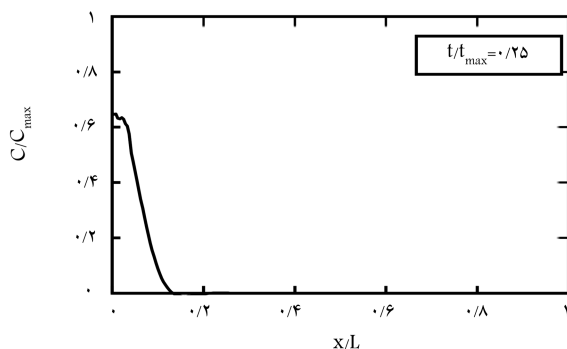
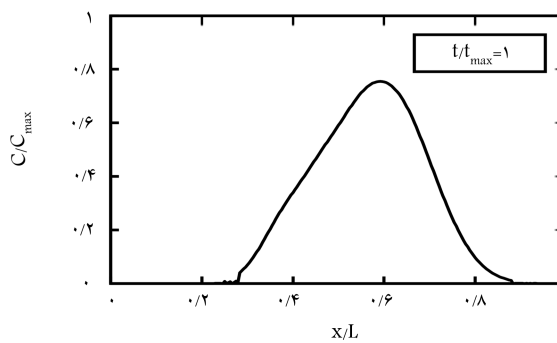
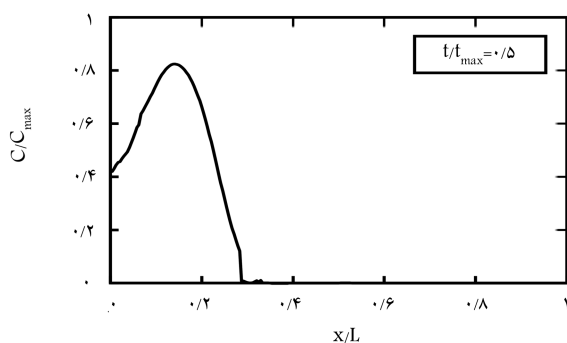


ب) با اعمال خطای ۱۵٪:



الف) بدون خطا؛

شکل ۴. (مثال اول) نمودار سری زمانی غلظت آلاینده از مدل مستقیم در $\frac{x}{L} = 0.21$.



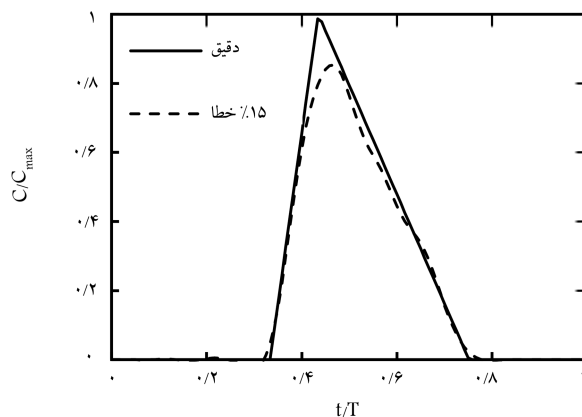
شکل ۵. (مثال اول) پروفیل مکانی برگشتی غلظت آلاینده با اعمال ۱۵ درصد خطا.

و پرت شدن پاسخها جلوگیری شود. با ارائه‌ی جدول ۲ مقادیر حداقل مربعات خطا و درصد خطای نسبی در حالات مختلف خطا و مقادیر مختلف ضریب پایداری، برای درک بهتر نتایج حاصله از مدل برگشتی تلاش شده است.

۲.۳ کاربرد روش شبه معکوس‌پذیری در رودخانه (مثال دوم)

الگوی در نظر گرفته شده برای این مثال الگوی سری زمانی غلظت آلاینده در شکل ۷ است که توسط بسیاری از محققین برای زمینه‌ی حل معکوس معادله‌ی انتقال آلاینده به کار گرفته شده است. به ترتیب نمودارهای حل مستقیم سری زمانی غلظت همراه با مختلف خطا و بدون خطا و نمودارهای برگشتی پروفیل مکانی و زمانی (شکل ۹ و ۸) ارائه خواهند شد.

در نمودار مشخص است مدل برگشتی شبه معکوس‌پذیری در تخمین رأس کوچک تر تا حد محسوسی دچار اختلال شده و توانسته به خوبی رأس دیگر



شکل ۶. (مثال اول) مقایسه نمودار سری زمانی غلظت آلاینده (خط) و ۱۵ درصد خطا (خط چین) ($\epsilon = 2.2 \times 10^{-6}$).

جدول ۲. شاخص‌های خطا در حالت‌های مختلف (مثال اول).

شاخص / پارامتر	ε _۱			ε _۲		
	%	%	%	%	%	%
R ^۲ (%)	۹۹٫۹۳	۹۹٫۸۴	۹۹٫۶۹	۹۹٫۹۱	۹۹٫۸۲	۹۹٫۷۵
MRE (%) ^۹	۳٫۰۱	۵٫۰۲	۹٫۱۲	۳٫۰۲	۵٫۰۸	۹٫۰۳

mean relative error^۹

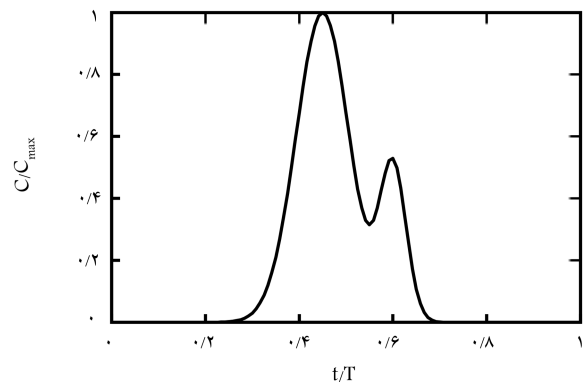
جدول ۳. شاخص‌های خطا در حالت‌های مختلف (مثال دوم).

شاخص / پارامتر	ε _۱			ε _۲		
	%	%	%	%	%	%
R ^۲ (%)	۹۹٫۷۹	۹۹٫۴۱	۹۹٫۳۵	۹۹٫۷۴	۹۹٫۳۵	۹۹٫۴۳
MRE (%)	۵٫۹۸	۷٫۷۸	۹٫۶۳	۵٫۸۹	۷٫۶۱	۹٫۷۷

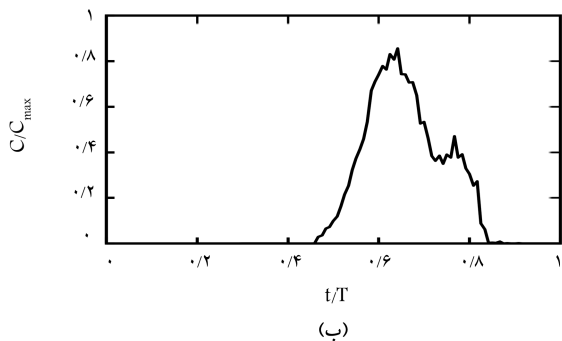
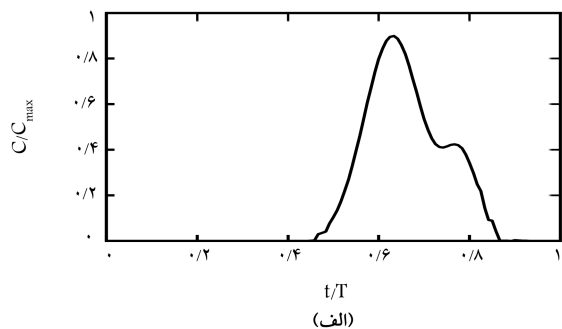
آن را تخمین بزند و شکل نرم‌تری به خود گرفته است این گونه استنباط می‌شود که چون غلظت در زمان بسیار کمی روند افزایشی و سپس کاهش یافته و با توجه به گام‌های زمانی در نظر گرفته شده در شبیه‌سازی، مدل برگشتی نتوانسته به خوبی روند را بازسازی کند. همچنین اثرگذاری ضریب پراکندگی در عدم بازسازی کامل قله کوچک کاملاً محسوس بوده و مشکلاتی برای مدل معکوس ایجاد کرده که نشان‌گر اثر به سزای ضریب پراکندگی در روند پاسخ‌های مدل برگشتی روش شبه معکوس‌پذیری است زیرا هنگام پخش آلاینده در رودخانه، ترم پراکندگی سبب باز شدن و پراکندگی آلاینده می‌شود. یادآور می‌شود رأس کوچک باز شده و هنگام بازسازی داده‌های برگشتی توسط مدل معکوس اختلالی ایجاد می‌شود و مدل معکوس قادر به بازسازی کامل رأس‌های کوچک در الگوی زمانی بارگذاری نخواهد بود و با توجه به محدودیت در گام‌های زمانی برداشت داده، در واقعیت این امر نشان می‌دهد که اگر در الگوی زمانی بارگذاری آلاینده در رودخانه، روند افزایشی و کاهش یافته و در اصطلاح رأسی کوچک در بازه زمانی به وجود آید مدل برگشتی شبه معکوس‌پذیری نمی‌تواند به خوبی آن را بازسازی کند. اما باز هم مشاهده می‌شود که نشانه‌هایی از رأس مذکور به صورت محسوس در نمودار پیداست و بازسازی کاملاً انجام نشده است. همچنین مشاهده می‌شود که ضرایب در نظر گرفته شده برای ضریب پایداری در مثال دوم بیشتر است زیرا هرچه نوع الگوی زمانی بارگذاری در رودخانه پیچیده‌تر باشد باید برای رسیدن به پاسخی مطلوب‌تر و جلوگیری از واگرایی پاسخ‌ها مقدار ضریب پایداری را افزایش داد (جدول ۳).

۴. نتیجه‌گیری

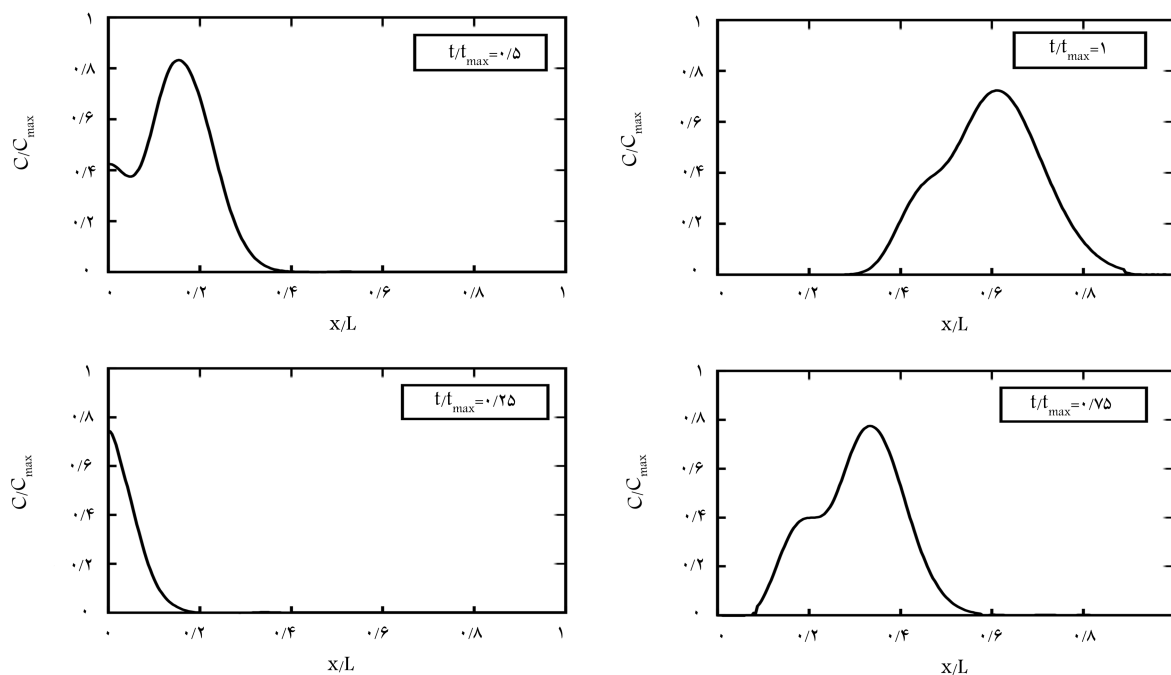
در تحقیق حاضر روش شبه معکوس‌پذیری در رودخانه، تحت شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت مورد آزمون قرار گرفت و نمودارها به صورت بی‌بعد ارائه شد. همچنین نتایج با فرض دو مثال برای نوع الگوی زمانی بارگذاری غلظت آلاینده در رودخانه تحت نمودارهای پروفیل مکان برگشتی آلاینده و مقایسه نمودارهای روش شبه معکوس‌پذیری با ۱۵ درصد خطا ارائه شد. نتایج حاصله نشان می‌دهد که هرچه الگوی زمانی بارگذاری آلاینده پیچیده‌تر و دارای شکل رأسی کوچکتر باشد، به دلیل اثر پخش‌کنندگی ترم پراکندگی مدل برگشتی دچار نقص می‌شود. همچنین هرچه



شکل ۷. منحنی سری زمانی غلظت آلاینده (تابع شدت فرضی) در مرز ورودی (مثال دوم).



شکل ۸. نمودار سری زمانی غلظت آلاینده از مدل مستقیم در $\frac{\sigma}{T} = 0$.

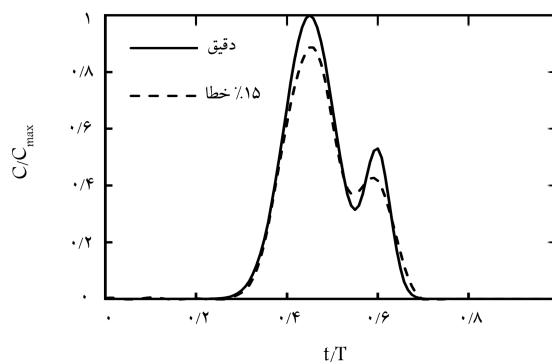


شکل ۹. (مثال دوم) پروفیل مکانی برگشتی غلظت آلاینده با اعمال ۱۵ درصد خطا.

الگوی زمانی بارگذاری دارای پیچیدگی بیشتری باشد باید برای ضریب پایداری مقدار افزون‌تری در نظر گرفت.

در این نوشتار روشی برای رفع محدودیت شرط اولیه‌ی معادله‌ی روش شبه معکوس‌پذیری ارائه شد تا بتوان از روش مذکور در رودخانه بهره برد. در این روش

فقط با برداشت داده‌های غلظت آلاینده در طی زمان از یک نقطه در رودخانه می‌توان به شرط اولیه‌ی معادله‌ی QR دست یافت. همچنین استفاده از روش QR در شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت در رودخانه که یکی از محدودیت‌های تحقیق‌های پیشین (به دلیل بیشتر بودن مقادیر ضرایب معادلات) برای محققان بود، در این نوشتار مورد آزمون قرار گرفت. در حالت کلی روش شبه معکوس‌پذیری در بازسازی الگوی زمانی بارگذاری غلظت آلاینده در رودخانه با شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت موفق عمل کرده است.



شکل ۱۰. (مثال دوم) مقایسه نمودار سری زمانی غلظت آلاینده (خط) و ۱۵ درصد خطا (خط چین) ($\epsilon = 2/4 \times 10^6$).

پانوشتها

1. inverse problem
2. quasi reversibility method
3. advection
4. dispersion
5. diffusion equation
6. regularization method
7. heat conduction
8. forth-order stabilization term

منابع (References)

1. Chapra, S.C. *Surface water quality modeling*, New York: McGraw-Hill, pp.389-564 (1997).
2. Neupauer, R.M., Borchers, B. and Wilson, J.L. "Comparison of inverse methods for reconstructing the release history of a groundwater contamination source", *Water Resources Research*, **36**(9), pp. 2469-2475 (2000).
3. Atmadja, J. and Bagtzoglou, A.C. "Pollution source identification in heterogeneous porous media", *Water Resources Research*, **37**(8), pp. 2113-2125 (2001).
4. Wang, Z. and Liu, J. "Identification of the pollution source from one-dimensional parabolic equation models", *Applied Mathematics and Computation*, **219**(8), pp. 3403-3413 (2012).
5. Hamdi, A., Mahfoudhi, I. and Rejaiba, A. "Identification of time active limit with lower and upper bounds of total amount loaded by unknown sources in 2D transport

- equations”, *Journal of Engineering Mathematics*, **97**(1), pp. 101-117 (2015).
6. Hamdi, A. “Inverse source problem in a 2D linear evolution transport equation: detection of pollution source”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**(3), pp. 401-421 (2012).
 7. Hamdi, A. and Mahfoudhi, I. “Inverse source problem in a one-dimensional evolution linear transport equation with spatially varying coefficients: application to surface water pollution”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **21**(6), pp. 1007-1031 (2013).
 8. Molson, J.W. and Frind, E.O. “On the use of mean groundwater age, life expectancy and capture probability for defining aquifer vulnerability and time-of-travel zones for water protection”, *Journal of Contaminant Hydrology*, **127**(1-4), pp. 76-87 (2012).
 9. Cupola, F. and Tanda, M. and Zanini, A. “Laboratory sandbox validation of pollutant source location methods”, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **29**(1), pp. 169-182 (2015).
 10. Denche, M. and Bessila, K. “A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **301**(2), pp. 419-426 (2005).
 11. Lattes, R., and Lions, J., *The Method of Quasi-Reversibility: Applications to Partial Differential Equations*, Elsevier Sci., New York, **16**(2), pp.236-247 (1969).
 12. Ismail-Zadeh, A.T., Korotkil, I.A. and Tsepeler, A.I. “Three-dimensional numerical simulation of the inverse problem of thermal convection using the quasi-reversibility method”, *Water Resources*, **46**(12), pp. 2176-2186 (2006).
 13. Yang, F., Fu, C. and Li, X. “Identifying an unknown source in space-fractional diffusion equation”, *Acta Mathematica Scientia*, **34**(4), pp. 1012-1024 (2014).
 14. Zhang, T. and Chen, Q. “Identification of contaminant sources in enclosed environments by inverse CFD modeling”, *Indoor Air*, **17**(3), pp. 77-167 In press. (2007).
 15. Xiong, X.-T., Fu, C.-L. and Qian, Z. “Two numerical methods for solving a backward heat conduction problem”, *Applied Mathematics and Computation*, **179**(1), pp. 370-377 (2006).
 16. Bagtzoglou, A.C. and Atmadja, J. “Marching-jury backward beam equation and quasi-reversibility methods for hydrologic inversion: application to contaminant plume spatial distribution recovery”, *Water Resources Research*, **39**(2), pp.156-164 (2003).
 17. Bagtzoglou, A.C. “Application of particle methods of reliable Identification of groundwater pollution sources”, *Water Resources Management*, **6**(1), pp. 15-23 (1992).
 18. Skaggs, T.H. and Kabala, Z. J. “Recovering the history of a groundwater contaminant plume: Method of quasi-reversibility”, *Water Resources*, **31**(16), pp. 2669-2673. (1995).
 19. Wilson, J.L. and Liu, J. “Backward tracking to find the source of pollution”, *Water Manage. Risk Remed*, **1**, pp. 181-199 (1994).
 20. Dorroh, J. R. and Ru, Xueping. “The application of the method of quasi-reversibility to the sideways heat equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **236**(6), pp. 503-519 (1998).
 21. Zhang, T. and Wang, Li. H. “Identification of particulate contaminant source locations in enclosed spaces with inverse CFD modelling”, *12th International Conference on Indoor Air Quality and Climate 2011*, **1**, pp. 667-672 (2011).
 22. Ghane, A., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J. “Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the backward probability Method”, *J Environ Manage*, **180**, pp. 164-171 (2016).
 23. Qian, A. and Mao, J. “quasi-reversibility regularization method for solving a backward heat conduction problem”, *American Journal of Computational Mathematics*, **01**(03), pp. 159-162 (2011).
 24. Mazaheri, M., Mohammad Vali Samani, J. and Samani, H.M.V. “Mathematical model for pollution source identification in rivers”, *Environmental Forensics*, **16**, pp. 310-321 (2015).
 25. Deng, Z. Q., Singh, V. P. and Bengtsson, L. “Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers”, *Journal of Hydraulic Engineering*, **127**(11), pp. 927 -919 (2001).
 26. Kashefipour, S. M. and Falconer, R.A. “Longitudinal dispersion coefficients in natural channels”, *Water Research*, **36**(6), pp. 1608 -1596 (2002).
 27. Lewis, F.R. “Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **110**(756), pp. 709-737 (1926).