

# تنظیم بهینه پارامترهای آزاد کنترل کننده PI مرتب‌ه کسری قابل پیاده‌سازی بر اساس معیار کارایی انتگرال مجذور خطا

مهرداد اشجعی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

محمد صالح توافعی\* (دانشیار)

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار طرحی کلی برای تنظیم بهینه پارامترهای آزاد کنترل کننده PI مرتبه کسری بر اساس معیار کارایی ISE برای استفاده در کنترل فرایندهای مرتبه اول با تأخیر زمانی ارائه شده است. در این طرح، از رویکرد «تنظیم بر اساس فرم قابل پیاده‌سازی» به جای رویکرد «تنظیم بر اساس فرم ایده‌آل» استفاده شده است. این امر مانع از بروز عدم تطابق بین رفتار ایده‌آل برای کنترل کننده با رفتار کنترل کننده پیاده‌سازی شده خواهد شد. همچنین برای پرهیز از خطا در محاسبه ISE، به صورت تحلیلی روابطی برای محاسبه جبری تابع هزینه مبتنی بر معیار کارایی ISE به دست آمده است. نتیجه‌ی طرح ارائه‌ی قوانین ساده‌ی برای تنظیم کنترل کننده PI مرتبه‌ی کسری قابل پیاده‌سازی بوده که استفاده از آنها تضمین می‌دهد ISE سیستم کنترلی در مقایسه با ISE سیستم کنترلی بهینه‌ی که در آن از کنترل کننده PI استفاده شده، کمتر باشد. این نتیجه از طریق مثال‌های عددی و پیاده‌سازی عملی مورد تأیید قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: سیستم کنترلی، کنترل کننده PI مرتبه کسری قابل پیاده‌سازی، تنظیم بهینه، معیار کارایی ISE.

mehrdadashjaee@gmail.com  
tavazoei@sharif.edu

## ۱. مقدمه

است. [۲] در روش‌های معرفی شده، تقریب مرتبه صحیح کنترل کننده مرتبه کسری امری اجتناب‌ناپذیر است، زیرا پیاده‌سازی دقیق اپراتورهای مرتبه کسری در کاربردهای عملی، به دلیل مشخصات حافظه‌ی بی‌نهایت برای آن‌ها، ناممکن است. [۶] این تقریب باعث ایجاد تفاوت بین رفتار سیستم پیاده‌سازی شده و مشخصات مطلوب مورد انتظار از سیستم حلقه بسته می‌شود. [۷] یعنی مشخصات حوزه‌ی فرکانس یا زمان مورد انتظار از تحلیل نظری سیستم حلقه بسته با آنچه در عمل و بعد از تقریب و پیاده‌سازی اتفاق می‌افتد، ممکن است متفاوت باشد. بنابراین انتخاب یک روش تقریب مناسب و دقیق برای پیاده‌سازی اپراتورهای مرتبه کسری، امری ضروری است.

به طور کلی دو رویکرد برای تنظیم بهینه پارامترهای مربوط به کنترل کننده‌های مرتبه کسری وجود دارد. در رویکرد اول، ابتدا پارامترهای کنترلی در ساختار کسری تنظیم بهینه می‌شود و سپس تقریب کنترل کننده به منظور پیاده‌سازی انجام خواهد شد؛ [۸] این رویکرد همان مشکل ذکر شده را خواهد داشت. در رویکرد دوم ابتدا تقریب مرتبه صحیح کنترل کننده مرتبه کسری بر حسب پارامترهای آزاد موجود در آن به دست می‌آید و سپس این پارامترها در فیلتر تقریبی از لحاظ نظری به طور بهینه تنظیم، و در عمل پیاده‌سازی می‌شود. در واقع، در رویکرد دوم این پارامترهای کنترل کننده قابل پیاده‌سازی به صورت بهینه تنظیم می‌شوند. این رویکرد موجب

در سال‌های اخیر، محققان توجه فزاینده‌ی به موضوع تنظیم کنترل کننده‌های PID مرتبه کسری ( $PI^\lambda D^\mu$ ) با استفاده از شاخص‌های کارایی حوزه‌ی زمان - مانند انتگرال قدرمطلق خطا (IAE) و انتگرال مجذور خطا (ISE) یا حوزه‌ی فرکانس - مانند حد فاز، حد بهره یا فرکانس قطع بهره - داشته‌اند. این امر منجر به ایجاد مسائل بهینه‌سازی چند بعدی شده که حل آن‌ها به صورت تحلیلی پیچیده است. [۱] الگوریتم‌های هوشمند بسیاری مانند الگوریتم کلونی زنبور عسل (ABC) [۲،۳]، الگوریتم ژنتیک (GA) [۴،۵] و بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) [۵] برای حل این مسائل و تنظیم بهینه پارامترهای آزاد کنترل کننده PID مرتبه کسری به کار گرفته شده است. به عنوان مثال، محققان از کنترل کننده PID مرتبه کسری به منظور کمینه کردن شاخص‌های کارایی همچون انتگرال قدر مطلق خطا، انتگرال مجذور خطا و انتگرال زمان در قدر مطلق خطا (ITAE) [۶] با استفاده از الگوریتم کلونی زنبور عسل بهره برده‌اند. [۱] همچنین به منظور بهینه کردن ردیابی مؤثر ورودی مرجع و پس‌زنی اغتشاش بار، یک مجموعه از قوانین تنظیم برای کنترل کننده‌های PID مرتبه صحیح و کسری برای سیستم‌های ناپایدار و انتگرالی با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک ارائه شده

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۴/۲۷، اصلاحیه ۱۳۹۷/۱/۴، پذیرش ۱۳۹۷/۱/۱۹

DOI:10.24200/J40.2018.10795.1431

در عمل به جای این کنترل کننده‌ها قرار می‌گیرد. این موضوع اهمیت انتخاب یک روش تقریب مناسب و دقیق را نشان می‌دهد. روش‌های تقریبی زیادی در حوزه‌ی گسسته زمان یا حوزه‌ی پیوسته زمان برای تقریب اپراتورهای مرتبه کسری با یک مدل دینامیکی مرتبه صحیح وجود دارد. [۱۳-۱۶] در حوزه‌ی گسسته زمان یا همان حوزه‌ی  $z$ ، روش‌های تقریبی مانند Lubich (PSE)  $\wedge$  و CFE  $\wedge$  را می‌توان نام برد. [۱۵] در حوزه‌ی پیوسته زمان نیز روش‌های مختلفی از قبیل Carlson, CFE, Matsuda و Oustaloup را می‌توان برشمرد. [۱۶]

یکی از رایج‌ترین روش‌های پیوسته زمان تقریب عملگرهای مرتبه کسری، روش تقریب Oustaloup است که در این نوشتار برای تقریب کنترل کننده‌ی مرتبه کسری  $PI^\lambda$  مورد استفاده قرار گرفته است. فرمول بندی تقریب در این روش مطابق رابطه‌ی ۳ است: [۱۷]

$$s^\nu \cong k \sum_{i=1}^N \frac{1 + (\frac{s}{\omega_z^i})}{1 + (\frac{s}{\omega_p^i})}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (3)$$

که در آن فرکانس‌های قطب و صفر ( $\omega_z^i$  و  $\omega_p^i$ ) با روابط بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{\omega_H}{\omega_L}\right)^{\frac{1-\nu}{N}}, \\ \kappa &= \left(\frac{\omega_H}{\omega_L}\right)^{\frac{\nu}{N}}, \\ \omega_z^1 &= \sqrt{\eta} \omega_L, \\ \omega_p^i &= \kappa \omega_z^i, \quad i = 1, \dots, N \\ \omega_z^{i+1} &= \eta \omega_p^i, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4)$$

این تقریب در بازه فرکانسی  $[\omega_L, \omega_H]$  معتبر و دارای مرتبه‌ی  $N$  است. بهره‌ی ثابت  $k$  نیز در صورتی که  $\lambda \in [\omega_L, \omega_H]$  باشد، با ایجاد بهره‌ی واحد در  $s = 1$  برای تقریب سمت راست رابطه‌ی ۳ و در غیر این صورت با برابری بهره‌ها در دو طرف معادله‌ی ۳ در  $s = \frac{\omega_L + \omega_H}{2}$  محاسبه می‌شود. حال برای تقریب عملگر انتگرالی مرتبه کسری  $\frac{1}{s^\lambda}$  در کنترل کننده‌ی ۲، ابتدا آن را به رابطه‌ی ۵ تبدیل کرده و سپس تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^\lambda} &= \frac{s^{1-\lambda}}{s} \cong k \frac{(1 + 10^{-\lambda+1}s)(1 + 10^{-\lambda-1}s)}{s(1 + 10^{\lambda-1}s)(1 + 10^{\lambda-2}s)}, \\ k &= \frac{(1 + 10^{\lambda-1})(1 + 10^{\lambda-2})}{(1 + 10^{-\lambda+1})(1 + 10^{-\lambda-1})}. \end{aligned} \quad (5)$$

مرتبه‌ی این تقریب ( $N$ ) برابر ۲ و بازه فرکانسی آن نیز  $[0/1, 10000] rad/s$  در نظر گرفته شده است. در رابطه‌ی ۵، در واقع این ترم  $s^{1-\lambda}$  است که تقریب زده شده و در نتیجه با حفظ یک انتگرال گیر خالص در ساختار کنترل کننده قابل پیاده‌سازی، خطای ماندگار برای ورودی‌های مرجع پله‌ی شکل در سیستم کنترلی صفر می‌شود (در برخی از منابع [۱۶، ۱۸] از چنین ایده‌ی استفاده شده است). اکنون با جایگزینی تقریب رابطه‌ی ۵ در رابطه‌ی ۲، کنترل کننده‌ی مرتبه صحیح چنین دست می‌آید:

$$C_I(s) = k_p + k_i k \frac{(1 + 10^{-\lambda+1}s)(1 + 10^{-\lambda-1}s)}{s(1 + 10^{\lambda-1}s)(1 + 10^{\lambda-2}s)}. \quad (6)$$

که از فیلتر آن، برای پیاده‌سازی کنترل کننده‌ی PI مرتبه کسری رابطه‌ی ۲ استفاده می‌شود.

رفع عدم تطابق بین رفتار نظری و واقعی سیستم حلقه بسته، به خصوص در مواردی که محاسبه‌ی تابع هزینه در حوزه‌ی فرکانس است، می‌شود. [۷] در این نوشتار نیز از همین رویکرد به منظور تنظیم بهینه‌ی پارامترهای کنترل کننده‌ی مرتبه کسری استفاده شده است.

کنترل کننده‌ی PI مرتبه کسری ( $PI^\lambda$ ) از جمله کنترل کننده‌های سه پارامتری است که به صورت عملی برای کنترل سیستم‌های مختلفی از جمله کنترل سرعت و مکان در سروموتورها، [۹، ۱۰] سیستم‌های کنترل دما، [۱۱] کنترل سطح مایع [۱۲] و دیگر سیستم‌ها و فرایندهای آزمایشگاهی و صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نوشتار حاضر، قوانینی به منظور تنظیم بهینه‌ی پارامترهای آزاد کنترل کننده‌ی سه پارامتری و قابل پیاده‌سازی  $PI^\lambda$  بر اساس معیار کارایی ISE، به منظور استفاده در کنترل فرایندهای مرتبه اول با تأخیر زمانی (FOPDT)  $\gamma$  ارائه می‌شود.

در ادامه، در بخش ۲ ساختار کلی فرایند، کنترل کننده و روش تقریب مرتبه صحیح و نرمالیزه کردن آن تشریح و در بخش ۳ نحوه‌ی محاسبه‌ی تحلیلی تابع هزینه‌ی ISE توضیح داده می‌شود. سپس در بخش ۴ مراحل و سازوکار بهینه‌سازی پارامترهای آزاد کنترل کننده و همچنین قوانین تنظیم نهایی ارائه می‌شود. در بخش ۵ نیز نتایج شبیه‌سازی دو سیستم کنترلی طراحی شده بر اساس قوانین پیشنهادی ارائه می‌شود. همچنین در این بخش به منظور بررسی کارایی عملی قوانین مذکور، از آنها به صورت آزمایشگاهی در کنترل دمای کوره استفاده می‌شود. در بخش ۶ نیز نتایج اجزائی این تحقیق مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## ۲. ساختار فرایند و کنترل کننده

فرم کلی سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی مد نظر در این نوشتار، در شکل ۱ نمایش داده شده است. در این فرم، فرایند تحت کنترل از نوع FOPDT است و با تابع:

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T s}, \quad (1)$$

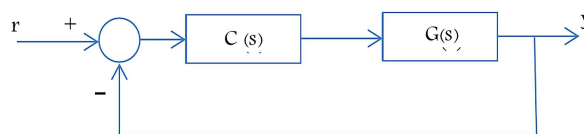
توصیف شده، که در آن  $K$  بهره حالت ماندگار،  $\tau$  تأخیر زمانی فرایند و  $T$  ثابت زمانی با مقدار مثبت است. کنترل کننده‌ی اولیه نیز از نوع  $PI^\lambda$  است که تابع تبدیل آن عبارت است از:

$$C_F(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda}, \quad (2)$$

که در آن  $\lambda$  کمیتی مثبت و نشان دهنده‌ی مرتبه‌ی انتگرال گیری است.  $k_p$  و  $k_i$  نیز به ترتیب معرف بهره‌های تناسبی و انتگرالی کنترل کننده‌ی  $C_F(s)$  اولیه‌ی هستند.

### ۱.۲. تقریب مرتبه صحیح کنترل کننده $PI^\lambda$

همان‌طور که می‌دانیم، پیاده‌سازی کنترل کننده‌های مرتبه کسری در عمل، نیاز به یک تقریب مرتبه صحیح دارد و در واقع این فیلتر تقریبی مرتبه صحیح است که



شکل ۱. ساختار سیستم حلقه بسته.

### ۲.۲. نرمالیزه کردن تابع تبدیل فرایند

تابع تبدیل حلقه باز در سیستم کنترلی دارای فرایند (۱) و کنترل کننده اولیه  $PI^\lambda$  (۲) است:

$$G_{ol}(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s^\lambda}\right) \left(\frac{K e^{-\tau s}}{1 + Ts}\right). \quad (7)$$

برای نرمالیزه کردن تابع تبدیل فرایند  $(G(s))$  می توان از تغییر متغیر  $\zeta = Ts$  استفاده کرد که این امر منجر به مقیاس بندی سیستم در حوزه زمان با نسبت  $\frac{1}{T}$  می شود. با این تغییر متغیر، رابطه ی ۸ بر حسب  $\zeta$  برای توصیف تابع تبدیل حلقه باز به دست می آید:

$$G_{ol}(\zeta) = \left(k_p K + \frac{k_i K T^\lambda}{\zeta^\lambda}\right) \left(\frac{e^{-\frac{\tau}{T}\zeta}}{1 + \zeta}\right). \quad (8)$$

حال فرض می شود که فرم کلی توابع تبدیل فرایند و کنترل کننده ی نرمالیزه شده ی مرتبه کسری چنین باشد:

$$\bar{G}(\zeta) = \frac{e^{-\frac{\tau}{T}\zeta}}{1 + \zeta}, \quad (9)$$

$$\bar{C}_F(\zeta) = \bar{k}_p + \frac{\bar{k}_i}{\zeta^\lambda}. \quad (10)$$

اکنون کنترل کننده ی نرمالیزه شده ی رابطه ی ۱۰ همانند رابطه ی ۵ تقریب زده می شود که حاصل آن کنترل کننده ی نرمالیزه شده ی مرتبه صحیح مطابق رابطه ی ۱۱ است:

$$\bar{C}_I(\zeta) = \bar{k}_p + \bar{k}_i k \frac{(1 + 10^{-\lambda+1}\zeta)(1 + 10^{-\lambda-1}\zeta)}{\zeta(1 + 10^{\lambda-1}\zeta)(1 + 10^{\lambda-2}\zeta)}. \quad (11)$$

بنابراین کافی است برای فرایند نرمالیزه شده ی رابطه ی ۹، قوانین تنظیم بهینه ی پارامترهای آزاد  $\bar{k}_p$  و  $\bar{k}_i$  و  $\lambda$  را در کنترل کننده ی نرمالیزه شده ی مرتبه صحیح رابطه ی ۱۱ را به ازای مقادیر مختلف  $\frac{\tau}{T}$  به دست آوریم. در واقع در این جا از رویکرد پیاده سازی و سپس تنظیم بهینه ی پارامترهای کنترلی استفاده شده است. در انتها نیز با استفاده از تغییر متغیر  $s = \frac{\zeta}{T}$ ، روابط به حوزه  $s$  بازمی گردند و در نتیجه، فرایند ۱ و کنترل کننده ی نهایی:

$$C(s) = k_p + k_i k \frac{(1 + 10^{-\lambda+1}Ts)(1 + 10^{-\lambda-1}Ts)}{s(1 + 10^{\lambda-1}Ts)(1 + 10^{\lambda-2}Ts)}, \quad (12)$$

به ازای هر مقدار  $T$  و  $\tau$  به دست می آید که ضرایب  $k_p$  و  $k_i$  در آن از طریق رابطه ی ۱۳ و با استفاده از پارامترهای آزاد کنترل کننده ی نرمالیزه شده ی ۱۱ قابل محاسبه است:

$$k_p = \frac{\bar{k}_p}{K}, \quad k_i = \frac{\bar{k}_i}{KT}. \quad (13)$$

بدین ترتیب کنترل کننده ی قابل پیاده سازی  $C(s)$  مورد استفاده در این تحقیق، دارای تابع تبدیل ۱۲ بوده و سیستم تحت کنترل  $G(s)$  نیز تابع تبدیلی به فرم ۱ دارد. بنابراین چون کنترل کننده ی مرتبه صحیح قابل پیاده سازی (رابطه ی ۱۲) در محاسبات مربوط به تابع هزینه قرار می گیرد، مشکل عدم تطابق بین مشخصات نظری سیستم حلقه بسته با آنچه در عمل پیاده سازی می شود، وجود نخواهد داشت.

### ۳. محاسبه ی تحلیلی تابع هزینه

در این نوشتار شاخص ISE با همان انتگرال مجذور خطا، به عنوان تابع هدف برای بهینه سازی فرض شده است. استفاده از این شاخص به عنوان تابع هزینه در طراحی سیستم های کنترلی، عمدتاً سبب سریع تر و در نتیجه نوسانی تر شدن پاسخ پله ای سیستم حلقه بسته می شود.<sup>[۱۸]</sup> تعریف این شاخص کارایی عبارت است از:

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt, \quad (14)$$

که در آن  $e(t) = r(t) - y(t)$  سیگنال خطا با فرض ورودی مرجع به صورت سیگنال پله ای واحد است. با این فرض، تبدیل لاپلاس خطا در سیستم کنترلی شکل ۱ چنین است:

$$E(s) = \frac{1}{s + sC(s)G(s)}. \quad (15)$$

یکی از روش های ساده ی محاسبه ی ISE، استفاده از روش گسسته سازی و تبدیل عبارت انتگرالی در رابطه ی ۱۴ به مجموع مقادیر نمونه برداری شده از  $e(t)$  به ازای یک زمان نمونه برداری و یک بازه ی مشخص است که با استفاده از نرم افزاری مانند متلب قابل محاسبه است.<sup>[۱]</sup> اما این روش صرفاً یک روش عددی غیر تحلیلی است که دقت آن نیز ممکن است پایین باشد. از آنجا که فرایند در نظر گرفته شده از نوع تأخیردار است، وجود تأخیر در روابط دینامیکی سیستم حلقه بسته محاسبه ی تحلیلی رابطه ی ۱۴ را بسیار پیچیده تر می کند. یکی از روش های محاسبه ی ISE، استفاده از روابط معادل در حوزه فرکانس است. اما در بسیاری از مطالعات انجام شده بر اساس این روش، از تقریب ترم  $e^{-\tau s}$  با یک فیلتر مرتبه صحیح استفاده شده است. به عنوان مثال از روش تقریب مرتبه صحیح Pade برای تقریب ترم نمایی  $e^{-\tau s}$  در تبدیل لاپلاس تابع خطای پله واحد سیستم حلقه بسته استفاده شده است.<sup>[۱۹]</sup> این روش هم به دلیل استفاده از تقریب برای  $e^{\tau s}$  از دقت بالایی برخوردار نیست. بنابراین یافتن روشی در حوزه فرکانس که در آن از تقریب ترم  $e^{\tau s}$  استفاده نشده باشد، دقت محاسبه ی ISE را افزایش خواهد داد.

### ۳.۱. محاسبه ی ISE با استفاده از روش انتگرال مانده ها

در این قسمت به منظور محاسبه ی تحلیلی تابع هزینه ی ISE برای سیستم های تأخیردار، یک روش دقیق در حوزه فرکانس ارائه می شود. به منظور محاسبه ی ISE، تبدیل لاپلاس سیگنال خطا  $(E(s))$  در سیستم های تأخیردار مطابق رابطه ی ۱۶ در نظر گرفته می شود:

$$E(s) = \frac{\hat{B}(s) + \hat{D}(s)e^{-\tau s}}{\hat{A}(s) + \hat{C}(s)e^{-\tau s}}, \quad (16)$$

که در آن  $\hat{A}(s)$ ،  $\hat{B}(s)$  و  $\hat{C}(s)$  و  $\hat{D}(s)$  چند جمله هایی با درجه ی مشخصی از  $s$  هستند. محققین با استفاده از قضیه ی پارسوال<sup>۱۰</sup>، که معادل رابطه ی ۱۴ را در حوزه فرکانس بیان می کند و استفاده از روش انتگرال گیری مانده ها به محاسبه ی تحلیلی ISE برای سیستم هایی پرداخته اند که تبدیل لاپلاس سیگنال خطای آن ها مطابق رابطه ی ۱۶ است.<sup>[۲۰]</sup> در واقع، قضیه ی پارسوال انتگرال حوزه زمان در رابطه ی ۱۴ را به یک انتگرال در حوزه فرکانس با کران های بی نهایت تبدیل می کند:

$$J = \frac{1}{j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds, \quad (17)$$

با توجه به نتایج ارائه شده،<sup>[۲۰]</sup> رابطه انتگرالی ۱۷ چنین محاسبه می‌شود:

$$J = - \sum_k Res_{s=s_k} \left( \frac{\hat{B}(s) + \hat{D}(s)e^{\tau s}}{\hat{A}(s) + \hat{C}(s)e^{-\tau s}} \right) \left( \frac{\hat{B}(-s)\hat{A}(s) - \hat{D}(-s)\hat{C}(s)}{\hat{A}(-s)\hat{A}(s) - \hat{C}(-s)\hat{C}(s)} \right) \quad (18)$$

که در آن مجموع موجود روی ریشه‌های معادله‌ی ۱۹ ( $s_k$  ها) است:

$$\hat{A}(s)\hat{A}(-s) - \hat{C}(s)\hat{C}(-s) = 0. \quad (19)$$

حال به منظور استفاده از روش مذکور برای محاسبه‌ی ISE در سیستم حلقه بسته با فرایند  $G(s)$  و کنترل‌کننده‌ی  $C(s)$ ، ابتدا چندجمله‌یی‌های  $\hat{A}(s)$ ،  $\hat{B}(s)$ ،  $\hat{C}(s)$  و  $\hat{D}(s)$  در رابطه‌ی ۱۶ تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{A}(s) = s(1 + Ts)(1 + 10^{\lambda-1}Ts)(1 + 10^{\lambda-2}Ts), \\ \hat{B}(s) = (1 + Ts)(1 + 10^{\lambda-1}Ts)(1 + 10^{\lambda-2}Ts) \\ \hat{C}(s) = Kk_i k(1 + 10^{-1-\lambda}Ts)(1 + 10^{-1-\lambda}Ts) \\ \quad + Kk_p s(1 + 10^{\lambda-1}Ts)(1 + 10^{\lambda-2}Ts) \\ \hat{D}(s) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۰، پس از انجام محاسباتی که جزئیات آن به منظور اختصار در نوشتار آورده نشده است، معادله‌ی ۱۹ به یک معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۸ تبدیل می‌شود:

$$as^8 + bs^6 + cs^4 + ds^2 + e = 0 \quad (21)$$

که ضرایب موجود در آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} a = 10^{\tau\lambda-8}T^6, \\ b = -(T^{\tau}(10^{\tau\lambda-2} + 10^{\tau\lambda-6} + 10^{\tau\lambda-8})) + K^{\tau}a_1^{\tau}, \\ c = T^{\tau}(1 + 10^{\tau\lambda-2} + 10^{\tau\lambda-6}) + K^{\tau}(-b_1^{\tau} + 2a_1c_1), \\ d = K^{\tau}(c_1^{\tau} - 2b_1d_1) - 1, \\ e = -K^{\tau}d_1^{\tau}, \end{cases} \quad (22)$$

و

$$\begin{cases} a_1 = 10^{\tau\lambda-2}T^{\tau}k_p, \\ b_1 = k_p T(10^{\lambda-1} + 10^{\lambda-2}) + 10^{-2\lambda}T^{\tau}k_i k, \\ c_1 = k_i k T(10^{-\lambda-1} + 10^{-\lambda+1}) + k_p, \\ d_1 = k_i k, \end{cases}$$

معادله‌ی چندجمله‌یی ۲۱ را که از درجه ۸ است، می‌توان با استفاده از تغییر متغیر  $x = s^{\tau}$ ، به یک معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۴ تبدیل کرد:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \quad (23)$$

که در آن ضرایب  $a$  تا  $e$ ، با معلوم بودن پارامترهای فرایند تحت کنترل ( $T$  و  $K$ )، تابعی از پارامترهای  $k_p$ ،  $k_i$  و  $\lambda$  هستند. از آنجا که محاسبه‌ی جبری ریشه‌های

معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۸ در رابطه‌ی ۲۱ با توجه به تقارن ریشه‌های آن از طریق حل جبری یک معادله‌ی درجه ۴ امکان‌پذیر است،<sup>[۲۱]</sup> محاسبه‌ی تحلیلی ISE برای سیستم مرتبه اول تأخیردار (رابطه‌ی ۱) با کنترل‌کننده‌ی  $PI^{\lambda}$  قابل پیاده‌سازی (رابطه‌ی ۱۲) که در آن از تقریب نرم  $e^{-\tau s}$  استفاده نشده، برحسب پارامترهای آزاد کنترل‌کننده قابل انجام است. بنابراین می‌توان رابطه‌ی ۱۸ را به صورت تابعی از پارامترهای کنترلی  $k_p$ ،  $k_i$  و  $\lambda$  به صورت تحلیلی به دست آورد.

### ۲.۳. حل جبری معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۴

برای حل معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۴ در رابطه‌ی ۲۳، ابتدا باید معادله را تبدیل کنیم به:

$$x^4 + a_{11}x^3 + b_{11}x^2 + c_{11}x + d_{11} = 0. \quad (24)$$

و در ادامه با تجزیه‌ی عبارت رابطه‌ی ۲۴ به دو چندجمله‌یی درجه ۲ و سپس حل یک چندجمله‌یی درجه ۳ جدید، می‌توان آن را به صورت جبری حل کرد<sup>[۲۲]</sup> (محاسبات و روابط مربوطه در بخش پیوست آمده است).

### ۴. تنظیم بهینه‌ی پارامترهای کنترلی

همان‌طور که در بخش‌های قبل ذکر شد، در این تحقیق، از رویکرد تقریب کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری و سپس بهینه‌سازی پارامترهای آزاد در کنترل‌کننده‌ی قابل پیاده‌سازی، استفاده می‌شود. به منظور تنظیم بهینه‌ی این پارامترهای سه‌گانه از الگوریتم بهینه‌سازی Steepest descent با تابع هزینه‌ی ISE استفاده شده است. این الگوریتم یکی از روش‌های جست‌وجوی خط<sup>۱۱</sup> است که طول گام ( $\alpha$ ) آن در هر مرحله، معادل یک عدد مثبت حقیقی انتخاب می‌شود.<sup>[۲۳]</sup> اما در این جا، به منظور کوتاه‌تر و بهینه‌تر شدن مراحل الگوریتم، در هر مرحله یک مسئله‌ی بهینه‌سازی یک‌بعدی برحسب  $\alpha$  و مطابق رابطه‌ی ۲۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$\min_{\alpha^{i+1}} J(P^i - \alpha^{i+1} \nabla J(P^i)), \alpha^{i+1} \in \mathbb{R}^+. \quad (25)$$

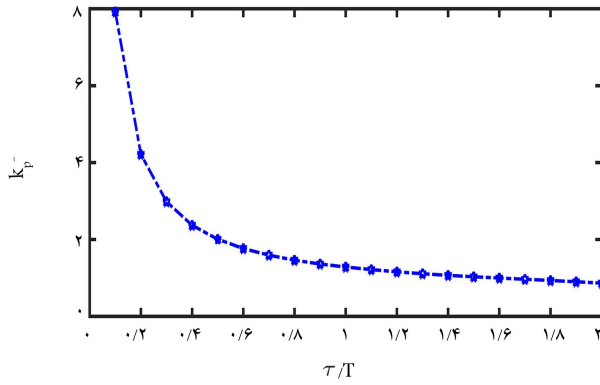
که در آن  $\alpha^{i+1}$  طول گام در مرحله‌ی  $i+1$  نام بوده و  $P^i$  نیز بردار پارامترهای کنترلی در مرحله‌ی  $i$  نام الگوریتم است:

$$P^i = \begin{bmatrix} k_p^i \\ k_i^i \\ \lambda^i \end{bmatrix}, \quad (26)$$

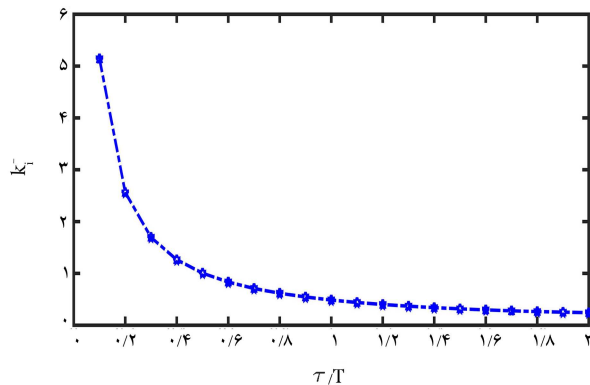
از آنجا که در بخش قبل یک حل تحلیلی برای محاسبه‌ی ISE به دست آمده است، می‌توان گردایان تابع هزینه در معادله‌ی ۲۵ را نیز به صورت تحلیلی محاسبه کرد. بنابراین در هر مرحله، کافی است یک مسئله‌ی بهینه‌سازی یک‌بعدی تابع هزینه‌ی  $J$  بر حسب طول گام  $\alpha$ ، مطابق معادله‌ی ۲۵ حل شود.

### ۱.۴. نقطه‌ی شروع الگوریتم بهینه‌سازی

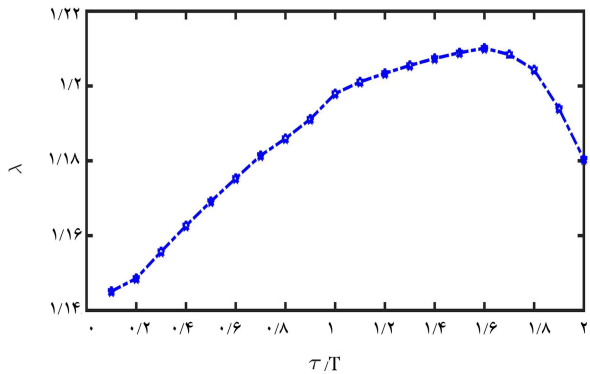
بدیهی است کنترل‌کننده‌ی PI کلاسیک حالت خاصی از کنترل‌کننده‌ی  $PI^{\lambda}$  است (حالت خاص  $\lambda = 1$ ). با توجه به این نکته، نقطه‌ی اولیه‌ی الگوریتم معادل مقادیر پارامترهای بهینه‌ی کنترل‌کننده‌ی PI کلاسیک بر اساس معیار ISE فرض می‌شود. به این منظور در این نوشتار نقطه‌ی شروع الگوریتم بهینه‌سازی بر اساس قوانین تنظیم



شکل ۲. نمودار ضریب تناسبی نرمالیزه شده ( $\bar{k}_p$ ) بهینه برحسب  $\frac{\tau}{T}$ .



شکل ۳. نمودار ضریب انتگرالی نرمالیزه شده ( $\bar{k}_i$ ) بهینه برحسب  $\frac{\tau}{T}$ .



شکل ۴. نمودار مرتبه کسری ( $\lambda$ ) بهینه برحسب  $\frac{\tau}{T}$ .

$$\begin{cases} k_p = \frac{a_p(\frac{\tau}{T})^{b_p} + c_p(\frac{\tau}{T})^{r_p} + d_p}{K} \\ k_i = \frac{a_i(\frac{\tau}{T})^{b_i} + c_i(\frac{\tau}{T})^{r_i} + d_i}{TK} \\ \lambda = P_6(\frac{\tau}{T})^6 + P_5(\frac{\tau}{T})^5 + P_4(\frac{\tau}{T})^4 + P_3(\frac{\tau}{T})^3 \\ + P_2(\frac{\tau}{T})^2 + P_1(\frac{\tau}{T}) + P_0 \end{cases} \quad (28)$$

جدول ۴. مقادیر مربوط به ضرایب چند جمله‌یی در قوانین تنظیم رابطه‌ی ۲۸.

$P_6$	$P_5$	$P_4$	$P_3$	$P_2$	$P_1$	$P_0$	بازه‌ی $\frac{\tau}{T}$
۱٫۲۵۱	-۴٫۱۹۹	۵٫۶۶۹	-۳٫۹۳۳	۱٫۴۵۵	-۰٫۱۹۸۵	۱٫۱۵۴	$0/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 1$
۰٫۵۹۹۶	-۵٫۲۰۴	۱۸٫۴۶	-۳۴٫۳۲	۳۵٫۳	-۱۹٫۰۳	۵٫۳۹۳	$1/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 2$

پارامتری:

$$\begin{aligned} k_p^{ord} &= \frac{a_1}{K} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{b_1}, \\ k_i^{ord} &= \frac{k_p^{ord}}{T^2} (a_2 T + b_2 \tau), \end{aligned} \quad (27)$$

انتخاب شده که ضرایب  $a_i$  و  $b_i$  در جدول ۱ به ازای مقادیر مختلف  $\frac{\tau}{T}$  نشان داده شده است. این قوانین به منظور تنظیم بهینه‌ی پارامترهای کنترل‌کننده‌ی PI کلاسیک برای کنترل فرایندهای FOPDT، با معیار ISE است که با استفاده از روش شبه نیوتن به دست آمده است.<sup>[۱۹]</sup>

#### ۲.۴. برازش پارامترهای کنترلی بهینه

به منظور تنظیم بهینه‌ی پارامترهای کنترل‌کننده‌ی نرمالیزه شده‌ی رابطه‌ی ۱۱ برای کنترل فرایند نرمالیزه شده‌ی ۹، نسبت  $\frac{\tau}{T}$  در دو بازه‌ی  $[0/1, 1]$  و  $[1/1, 2]$  در نظر گرفته شده و نیز، الگوریتم بهینه‌سازی دوازده مرتبه تکرار شده است. همان‌طور که در نمودارهای میان‌بایی شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود، ابتدا پارامترهای کنترلی نرمالیزه شده‌ی بهینه‌ی  $\bar{k}_i$ ،  $\bar{k}_p$  و  $\lambda$ ، برازش شده و سپس با استفاده از روابط موجود در معادله‌ی ۱۳، به ازای هر فرایند FOPDT مطابق رابطه‌ی ۱، پارامترهای بهینه‌ی کنترل‌کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی مطابق رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود. همان‌طور که نقطه‌ی شروع الگوریتم بهینه‌سازی به ازای دو بازه‌ی  $[0/1, 1]$  و  $[1/1, 2]$  جداگانه محاسبه می‌شود، برای برازش دقیق‌تر منحنی‌های میان‌بایی ۲ تا ۴ نیز همین دو بازه در نظر گرفته می‌شود. بر اساس برازش انجام شده، قوانین تنظیم بهینه‌ی پارامترهای کنترلی بهینه مطابق رابطه‌ی ۲۸ پیشنهاد می‌شود؛ مقادیر مربوط به ضرایب هر یک از این پارامترهای کنترلی بهینه، در جدول‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است.

جدول ۱. مقادیر ضرایب موجود در معادله‌ی ۲۷.

$b_2$	$a_2$	$b_1$	$a_1$	بازه‌ی $\frac{\tau}{T}$
-۰٫۱۵۵	۰٫۹۶۰	-۰٫۸۹۲	۰٫۹۸۰	$0/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 1$
-۰٫۱۴۴	۰٫۶۴۸	-۰٫۵۶۰	۱٫۰۷۲	$1/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 2$

جدول ۲. مقادیر مربوط به ثابت‌های  $a_p$ ،  $b_p$ ،  $c_p$  و  $d_p$  از ضریب تناسبی  $k_p$ .

$d_p$	$c_p$	$b_p$	$a_p$	بازه‌ی $\frac{\tau}{T}$
۰٫۵۶۵۳	۰	-۱٫۰۱۲	۰٫۷۱۵۲	$0/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 1$
۰٫۹۳۱۳	-۰٫۰۲	-۱٫۹۷۵	۰٫۳۷۳۴	$1/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 2$

جدول ۳. مقادیر مربوط به ثابت‌های  $a_i$ ،  $b_i$ ،  $c_i$  و  $d_i$  از ضریب انتگرالی  $k_i$ .

$d_i$	$c_i$	$b_i$	$a_i$	بازه‌ی $\frac{\tau}{T}$
-۰٫۰۳۷۵	۰	-۰٫۹۹۵۶	۰٫۵۲۳	$0/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 1$
-۰٫۲۴۳۸	۰٫۰۰۵۸۷۲	-۰٫۷۲۴۱	۰٫۷۲۲۸	$1/1 \leq \frac{\tau}{T} \leq 2$

## ۵. نتایج شبیه‌سازی و پیاده‌سازی آزمایشگاهی

در این بخش، کارایی قوانین تنظیم پیشنهادی با ارائه سه مثال (دو مثال عددی و یک مثال عملی) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱. تابع تبدیل ۲۹ را که بر اساس پاسخ پله‌ی واحد حلقه‌باز یک تانک کروی به دست آمده، [۲۴] در نظر بگیرید:

$$G_1(s) = \frac{0.32e^{-As}}{19.74s + 1} \quad (29)$$

در این فرایند، مقدار  $\frac{T}{\tau}$  برابر ۰٫۴۰۵۳ است و لذا استفاده از قوانین تنظیم کلاسیک

۲۷ منجر به پارامترهای کنترلی زیر می‌شود (نقطه‌ی شروع الگوریتم بهینه‌سازی):

$$P_1^* = \begin{bmatrix} k_{p1}^* \\ k_{i1}^* \\ \lambda_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.8544 \\ 0.2178 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

همچنین با استفاده از قوانین تنظیم پیشنهادی ۲۸، پارامترهای بهینه‌ی کنترل کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی مطابق رابطه‌ی ۳۱ به دست می‌آید:

$$P_1^* = \begin{bmatrix} k_{p1}^* \\ k_{i1}^* \\ \lambda_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.3415 \\ 0.1975 \\ 1.1633 \end{bmatrix} \quad (31)$$

در شکل ۵، نمودارهای مربوط به سیگنال خروجی  $(y(t))$  و سیگنال کنترلی  $(u(t))$  با فرض ورودی مرجع به صورت سیگنال پله‌ی واحد در هنگام استفاده از کنترل کننده‌های PI تنظیم شده با پارامترهای ۳۰ و  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی تنظیم شده با پارامترهای ۳۱ رسم شده است. مقادیر بهینه‌ی ISE حاصل از اعمال این روش‌های کنترلی به ترتیب زیر است:

$$ISE_1^* = 11.7660,$$

$$ISE_1^* = 11.4876$$

که نشان‌دهنده‌ی کاهش مقدار ISE در هنگام استفاده از کنترل کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی در مقایسه با کنترل کننده‌ی PI بهینه است.

مثال ۲. در این قسمت یک فرایند فرضی به صورت رابطه‌ی ۳۲ در نظر گرفته شده است:

$$G_2(s) = \frac{5.7e^{-6 \times 10^{-2}s}}{46.9s + 1} \quad (32)$$

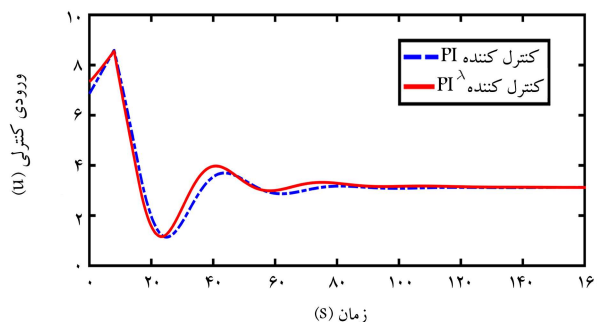
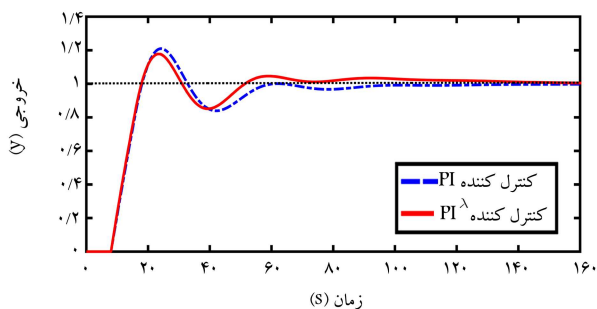
همانند مثال قبل، ابتدا مقدار  $\frac{T}{\tau}$  که در این جا ۱٫۲۸ است، به دست آمده و سپس با توجه به جدول‌های ۲ تا ۴ و قوانین تنظیم ۲۸، پارامترهای کنترلی بهینه‌ی کنترل کننده‌ی  $PI$  مرتبه کسری قابل پیاده‌سازی در معادله‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$P_2^* = \begin{bmatrix} k_{p2}^* \\ k_{i2}^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1963 \\ 0.0014 \\ 1.2053 \end{bmatrix}$$

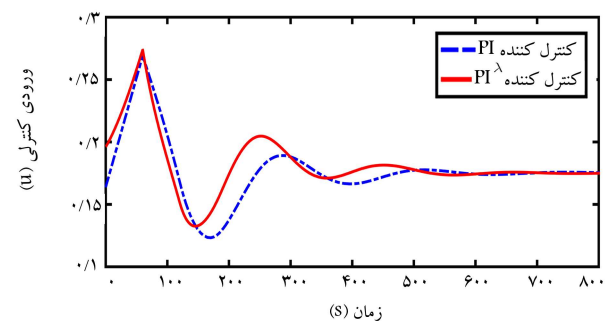
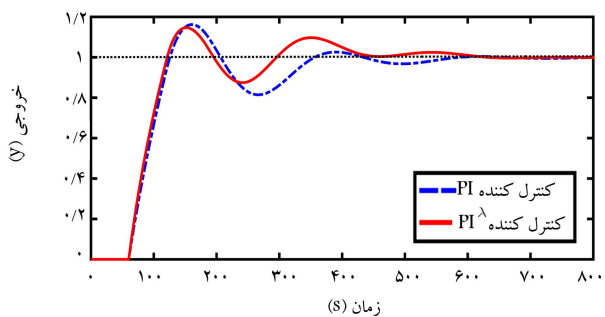
در این مثال، مقادیر بهینه‌ی ISE حاصل از اعمال روش‌های کنترلی  $PI$  و  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی به ترتیب زیر است:

$$ISE_2^* = 82.7742,$$

$$ISE_2^* = 79.3023$$



شکل ۵. سیگنال‌های خروجی و کنترلی مربوط به کنترل سیستم تانک کروی (۲۹) به ازای ورودی مرجع پله واحد.



شکل ۶. سیگنال‌های خروجی و کنترلی مربوط به کنترل فرایند (۳۲) به ازای ورودی مرجع پله واحد.

که حاکی از بهینه بودن کنترل کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی نسبت به کنترل کننده‌ی PI با توجه به معیار کارایی ISE است. در شکل ۶ نمودارهای مربوط به پاسخ پله واحد سیستم حلقه‌بسته در هنگام استفاده از کنترل کننده‌های بهینه‌ی  $PI$  و  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی رسم شده است.

مثال ۳. در این بخش به منظور نشان دادن کارایی قوانین تنظیم پیشنهادی در کاربردهای عملی، از آنها در کنترل فرایند آزمایشگاهی کوره‌ی حرارتی<sup>۱۲</sup> بهره گرفته

$$P_r^* = \begin{bmatrix} k_{pr}^* \\ k_{ir}^* \\ \lambda_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1492 \\ 0,0099 \\ 1,1675 \end{bmatrix}$$

نتایج عملی استفاده از یک کنترل‌کننده PI مرتبه کسری با پارامترهای فوق در مقایسه با کنترل‌کننده PI بهینه در کنترل دمای کوره (تنظیم دمای کوره روی مقدار مطلوب ۵۰ درجه سانتی‌گراد) در شکل ۸ مشاهده می‌شود. در این حالت، مقادیر انتگرال مجذور خطا در صورت استفاده از کنترل‌کننده‌های PI کلاسیک و مرتبه کسری به ترتیب دارای مقادیر

$$ISE_r^0 = 361,8$$

$$ISE_r^* = 333,2,$$

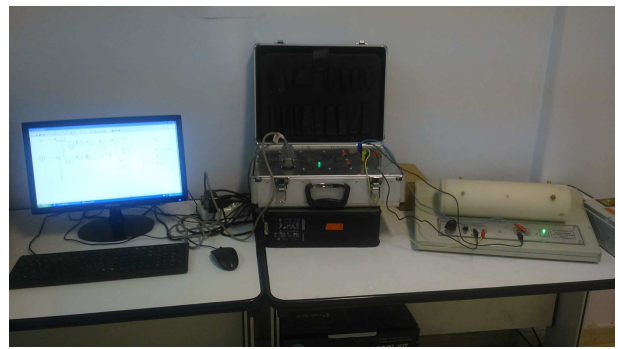
است که نشان‌گر کاهش مقدار آن در روش کنترلی پیشنهاد شده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

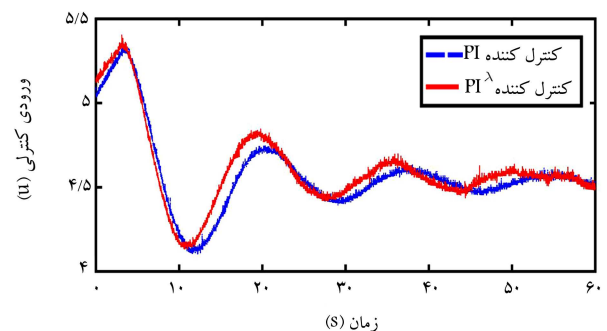
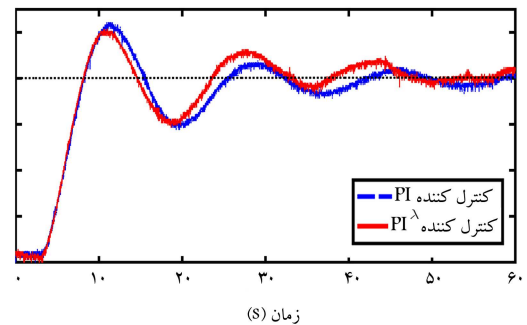
در نوشتار حاضر، تنظیم بهینه‌ی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری قابل پیاده‌سازی  $PI^\lambda$  برای استفاده در کنترل فرایندهای مرتبه اول با تأخیر زمانی، بر اساس معیار انتگرال مجذور خطا مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از اهداف اصلی این تحقیق، بهینه‌سازی بر اساس محاسبه‌ی تابع هزینه‌ی ISE به صورت تحلیلی بود که در آن از هیچ نوع تقریبی استفاده نشده باشد. به این منظور نشان داده شد که با استفاده از روش انتگرال مانده‌ها برای محاسبه‌ی ISE، حل جبری یک معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۴ ضرورت دارد. شایان ذکر است که در این روش از تقریب مرتبه صحیح ترم تأخیری  $e^{-Ts}$  در تبدیل لاپلاس تابع خطا استفاده نشده است که این مسئله دقت محاسبه‌ی ISE در روش به کار رفته را افزایش می‌دهد.

برای تنظیم بهینه‌ی پارامترهای آزاد کنترل‌کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی از رویکرد تقریب مرتبه صحیح کنترل‌کننده‌ی  $PI^\lambda$  و سپس تنظیم بهینه‌ی پارامترهای آزاد موجود در آن استفاده شده است. در واقع با استفاده از این رویکرد، عدم تطابق بین رفتار نظری سیستم حلقه‌بسته و آنچه که در عمل پیاده‌سازی می‌شود تا حد زیادی برطرف می‌شود.

برای بهینه‌سازی پارامترهای آزاد کنترلی، از الگوریتم Steepest descent استفاده شد که در هر مرحله از اجرای آن، یک بهینه‌سازی یک‌بعدی برحسب طول گام نیز انجام شده است. با شروع از پارامترهای بهینه‌ی مربوط به کنترل‌کننده‌ی PI کلاسیک (قوانین تنظیم ۲۷)، بر اساس روند ذکر شده قوانین تنظیم ۲۸ تعیین پارامترهای آزاد کنترل‌کننده‌ی  $PI^\lambda$  قابل پیاده‌سازی پیشنهاد شدند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج آزمایشگاهی تأیید می‌کند که استفاده از این قوانین در مقایسه با قوانین تنظیم بهینه پارامترهای کنترل‌کننده PI موجب دست‌یابی به مشخصه‌ی کارایی ISE بهتر در سیستم حلقه‌بسته می‌شود.



شکل ۷. سیستم آزمایشگاهی کنترل دمای کوره.



شکل ۸. سیگنال‌های خروجی و خطای مربوط به کنترل عملی کوره حرارتی.

شده است (شکل ۷). از این رو، ابتدا مدل FOPDT سیستم مذکور با استفاده از روش Ziegler-Nichols به دست آمده است.<sup>[۲۵]</sup>

$$G_r(s) = \frac{14/105 e^{-2/6s}}{7/675s + 1}, \quad (33)$$

سپس قوانین تنظیم پیشنهادی ۲۸، پارامترهای آزاد کنترلی را برای کنترل فرایند ۳۳ مشخص کرده‌اند:

## پانویس‌ها

1. integral absolute error
2. integral square error
3. artificial bee colony
4. genetic algorithm

5. particle swarm optimization
6. integral time absolute error
7. first order plus dead time
8. power series expansion
9. continued fraction expansion
10. parseval's theorem.

11. line search algorithm.
12. thermal furnace

### منابع (References)

1. Kesarkar, A. and Selvagesan, N. "Tuning of optimal fractional-order PID controller using an artificial bee colony algorithm", *Systems Science & Control Engineering*, **3**(1), pp. 99-105 (2015).
2. Karaboga, D. and Akay, B. "A comparative study of artificial bee colony algorithm", *Applied Mathematics and Computation*, **214**(1), pp. 108-132 (2009).
3. Chang, L.Y. and Chen, H.C. "Tuning of fractional PID controllers using adaptive genetic algorithm for active magnetic bearing system", *WSEAS Transactions on Systems*, **8**(1), pp. 158-167 (2009).
4. Padula, F. and Visioli, A. "Optimal tuning rules for proportional-integral-derivative and fractional-order proportional-integral-derivative controllers for integral and unstable processes", *IET Control Theory Appl*, **6**(6), pp. 776-786 (2012).
5. Cao, J.Y. and Cao, B.G. "Design of fractional-order controller based on particle swarm optimization", *International Journal of Control, Automation and Systems*, **4**(6), pp. 775-781 (2006).
6. Tavazoei, M.S. and Haeri, M. "Rational approximations in the simulation and implementation of fractional-order dynamics", *Automatica*, **46**(1), pp. 94-100 (2010).
7. Rahimian, M.A. and Tavazoei, M.S. "Optimal tuning for fractional-order controllers: an integer-order approximating filter approach", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **135**(2), 021017(1-11). DOI: 10.1115/1.4023066 (2013).
8. Rahimian, M.A. and Tavazoei, M.S. "Improving integral square error performance with implementable fractional-order PI controllers", *Optimal Control Applications and Methods*, **35**(3), pp. 303-323 (2014).
9. Li, H.S., Luo, Y. and Chen, Y.Q. "A fractional-order proportional and derivative (FOPD) motion controller: tuning rule and experiments", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **18**(2), pp. 516-520 (2010).
10. Barbosa, R., Tenreiro Machado, J.A. and Jesus, I.S. "On the fractional PID control of a laboratory servo system", *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pp. 15273-15279 (2008).
11. Tajjudin, M., Arshad, N.M. and Adnan, R. "A design of fractional-order PI controller with error compensation", *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, **7**(6), pp. 727-735 (2013).
12. Roy, P. and Roy, B.K. "Fractional order PI control applied to level control in coupled two tank MIMO system with experimental validation", *Control Engineering Practice*, **48**, pp. 119-135 (2016).
13. Tenreiro Machado, J.A. "Analysis and design of fractional-order digital control systems", *Systems Analysis Modeling Simulation*, **27**(2-3), pp. 107-122 (1997).
14. Tenreiro Machado, J.A. "Delay approximation of fractional integrals", *Asian Journal of Control*, **15**(3), pp. 713-722 (2013).
15. Podlubny, I., Petras, I., Vinagre, B.M. and et al. "Analogue realization of fractional-order controllers", *Nonlinear Dynamics*, **29**(1), pp. 281-296 (2002).
16. Vinagre, B.M., Podlubny, I., Hernandez, I. and et al. "Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **3**(3), pp. 231-248 (2000).
17. Valerio, D. and Costa, J.S. "Tuning of fractional PID controllers with ziegler-nichols type rules", *Signal Processing*, **86**(10), pp. 2771-2784 (2006).
18. Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall PTR, 5th Edition (2009).
19. Zhuang, M. and Atherton, D.P. "Automatic tuning of optimum PID controllers", *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, **140**(3), pp. 216-224 (1993).
20. Walton, K. and Marshall, J.E. "Closed form solution for time delay systems' cost functionals", *International Journal of Control*, **39**(5), pp.1063-1071 (1984).
21. Faucette, W.M. "A geometric interpretation of the solution of the general quartic polynomial", *The American Mathematical Monthly*, **103**(1), pp. 51-57 (1996).
22. Shmakov, S.L. "A universal method of solving quadratic equations", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **71**(2), pp. 251-259 (2011).
23. Nocedal, J. and Wright, S.J. "Numerical Optimization", *Springer Science*, **35**(67-68), pp.22 (1999).
24. Sundaravadivu, K., Arun, B. and Saravanan, K. "Design of fractional order PID controller for liquid level control of spherical tank", *IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering*, Malaysia, pp. 261-295 (2011).
25. Kinney, T.B. "Tuning process controllers", *Chemical Engineering*, **90**(19), pp. 67-72 (1983).

### پیوست

حل جبری معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۴

$$x = y - \frac{a_{11}}{4}, \quad (34)$$

با جایگذاری متغیر معادله ی ۳۴ در چندجمله‌یی ۲۴، معادله‌ی ۳۵ به دست می‌آید:

$$y^4 + b_{12}y^2 + c_{12}y + d_{12} = 0 \quad (35)$$

برای حل جبری چندجمله‌یی درجه ۴ در معادله‌ی ۲۴، ابتدا با استفاده از تغییر متغیر

زیر، ضریب ترم  $x^3$  صفر می‌شود:



ریشه‌های این معادله‌ی چندجمله‌یی درجه سوم عبارت است از:

$$\begin{aligned} z_1 &= A + B - \frac{b_{rr}}{3}, \\ z_2 &= -\frac{1}{3}(A + B) + j\frac{\sqrt{3}}{3}(A + B) - \frac{b_{rr}}{3}, \\ z_3 &= -\frac{1}{3}(A + B) - j\frac{\sqrt{3}}{3}(A + B) - \frac{b_{rr}}{3} \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^2, \\ A = \sqrt[3]{-\frac{q}{3} + \sqrt{\Delta}}, \\ B = \sqrt[3]{-\frac{q}{3} - \sqrt{\Delta}}, \\ p = -\frac{b_{rr}^2}{3} + c_{rr}, \\ q = \frac{2b_{rr}^3}{27} - \frac{c_{rr}b_{rr}}{3} + d_{rr}, \end{cases}$$

حال می‌توان مقدار  $c_{r1}$  را با استفاده از یکی مقادیر موجود در معادله‌ی ۴۱ به دست آورد. با معلوم بودن  $c_{r1}$ ، براساس روابط (۳۸) مقدار  $d_{r1}$  محاسبه می‌شود. با جایگذاری مقادیر  $c_{r1}$  و  $d_{r1}$  در معادله‌ی ۳۷، ریشه‌های چندجمله‌یی ۲۳ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-c_{r1} + \sqrt{c_{r1}^2 - 4d_{r1}}}{2} - \frac{a_{11}}{4}, \\ x_2 &= \frac{-c_{r1} - \sqrt{c_{r1}^2 - 4d_{r1}}}{2} - \frac{a_{11}}{4}, \\ x_3 &= \frac{c_{r1} + \sqrt{c_{r1}^2 - 4\left(\frac{d_{1r}}{d_{r1}}\right)}}{2} - \frac{a_{11}}{4}, \\ x_4 &= \frac{c_{r1} - \sqrt{c_{r1}^2 - 4\left(\frac{d_{1r}}{d_{r1}}\right)}}{2} - \frac{a_{11}}{4}. \end{aligned} \quad (42)$$

بنابراین ریشه‌های چندجمله‌یی درجه ۸ در معادله‌ی ۲۱ نیز با استفاده از چهار ریشه‌ی به دست آمده در معادله‌ی ۴۲، به صورت جبری قابل محاسبه است.

که در آن ضرایب  $b_{1r}$ ،  $c_{1r}$  و  $d_{1r}$  دارای روابطی با ضرایب چندجمله‌یی اولیه‌ی ۲۴ است:

$$\begin{cases} b_{1r} = b_{11} - \frac{2a_{11}^2}{\lambda}, \\ c_{1r} = \frac{a_{11}^2}{\lambda} - \frac{a_{11}b_{11}}{3} + c_{11}, \\ d_{1r} = d_{11} + \frac{a_{11}^2b_{11}}{16} - \frac{a_{11}c_{11}}{4} - \frac{2a_{11}^3}{256}. \end{cases} \quad (36)$$

بنابراین با حل معادله‌ی ۳۶ می‌توان معادله‌ی ۲۴ و در نتیجه معادله‌ی ۲۱ را نیز حل کرد. حال با تجزیه‌ی چندجمله‌یی ۳۶ به صورت حاصل ضرب دو چندجمله‌یی مرتبه دوم، می‌توان آن را چنین نوشت: [۲۲]

$$\begin{aligned} y^2 + b_{1r}y + c_{1r}y + d_{1r} \\ = (y^2 + c_{r1}y + d_{r1})\left(y^2 - c_{r1}y + \frac{d_{1r}}{d_{r1}}\right), \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن ضرایب جدید  $c_{r1}$  و  $d_{r1}$  با استفاده از معادلات ۳۸ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} b_{1r} = \frac{d_{1r}}{d_{r1}} - c_{r1}^2 + d_{r1}, \\ c_{1r} = \frac{c_{r1}d_{1r}}{d_{r1}} - c_{r1}d_{r1}. \end{cases} \quad (38)$$

اکنون با ضرب دو طرف رابطه‌ی ۳۸، یک معادله‌ی چندجمله‌یی درجه ۶ برحسب ضریب  $c_{1r}$  به دست می‌آید:

$$c_{r1}^6 + 2b_{1r}c_{r1}^4 + \left(b_{1r}^2 - 4d_{1r}\right)c_{r1}^2c_{1r}^2 = 0 \quad (39)$$

برای حل چندجمله‌یی درجه ۶ در معادله‌ی ۳۹ با توجه به این که ریشه‌های آن متقارن است می‌توان از تغییر متغیر  $z = c_{r1}^2$  استفاده کرد و یک معادله‌ی درجه ۳ به دست آورد:

$$\begin{aligned} z^3 + b_{2r}z^2 + c_{2r}z + d_{2r} = 0 \\ \begin{cases} b_{2r} = 2b_{1r}, \\ c_{2r} = b_{1r}^2 - 4d_{1r}, \\ d_{2r} = -c_{1r}^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

