مهندسی مکانیک شریف (پاییز ۱۳۹۸)
دوره‌ی ۳-۳۵، شماره‌ی ۲، ص. ۸۹-۹۸

Original Article

بررسی ارتعاشات آزاد صفحات قطاعی حلقوی ساخته شده از مواد تابعی مدرج با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته

فمیدا فلاح رجب زاده * (دانشیار)
امید گرشاسبی (کارشناسی ارشد)
امیرحسین شهدادی (دانشجوی دکترا)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این مقاله ارتعاشات آزاد صفحات قطاعی حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همیلتون، معادلات حرکت که پنج معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و کوپل هستند، استخراج می‌شود. با اعمال روش کانترویچ توسعه یافته بر این معادلات، دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی به دست می‌آید که برای ترکیب شرایط مرزی گیردار و ساده با استفاده از روش فضای حالت و مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته حل شوند، و در یک روند تکراری فرکانس‌های طبیعی سیستم به دست می‌آید. در ادامه نتایج این تحقیق با نتایج مطالعات پیشین مقایسه و صحت‌سنجی می‌شود. سپس اثر پارامترهای گوناگون مانند شرایط مرزی، ثابت ماده و پارامترهای هندسی ورق بر فرکانس‌های طبیعی صفحات قطاعی حلقوی مدرج تابعی بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: ارتعاشات آزاد، صفحات قطاعی حلقوی، مواد مدرج تابعی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول، روش کانترویچ توسعه یافته.

fallah@sharif.ir
omidgarshasbi1990@gmail.com
shahdadi_ah@mech.sharif.ir

۱. مقدمه

کامپوزیت‌های تقویت شده توسط الیاف در بارهای حرارتی بالا مستعد گسستن پیوند بین الیاف و ماتریس هستند. همچنین ترک‌ها اغلب از محل پیوند الیاف و ماتریس شروع می‌شود و به سمت قسمت‌های ضعیف‌تر ماده رشد می‌کند. ضعف دیگر مواد مرکب سنتی، وجود تنش‌های پسماند در این مواد به دلیل اختلاف ضریب انبساط حرارتی مواد تشکیل دهنده است.

یکی از جدیدترین مفاهیم ارائه شده در زمینه‌ی طراحی مواد، مفهوم مواد مدرج تابعی (FGM) [۱] است. این مواد معمولا از دو ماده متفاوت ساخته می‌شوند، به طوری که درصد حجمی مواد تشکیل دهنده و در نتیجه خواص از یک سمت سازه به سمت دیگر به صورت پیوسته تغییر می‌کند. سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی مانند تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها به طور گسترده در بسیاری از سیستم‌های مهندسی استفاده می‌شوند. در این بین ورق‌های دایروی، حلقوی و به ویژه قطاعی به دلیل قابلیت‌هایی از جمله بازدهی بالا، وزن کم، اثربخشی تکنولوژی بالا و ظرفیت حمل بار در گستره وسیعی از شاخه‌های مهندسی مانند کشتی‌ها، هواپیماها، موشک‌ها و سازه‌های هیدرولیکی کاربرد دارند.[۱] از این رو مطالعه رفتار مکانیکی ورق‌های قطاعی ساخته شده از مواد مدرج تابعی، و از جمله رفتار ارتعاشاتی آنها، اهمیت زیادی دارد.

تحقیقات متعددی در زمینه‌ی ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی صورت گرفته است که در ابتدا به آنها اشاره می‌شود. لی و لیو ارتعاش آزاد صفحات قطاعی شکل همگن و همسانگرد را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) [۲] مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول برای مدل‌سازی استفاده شد.[۲] بالالیا و هومت ارتعاش آزاد غیرخطی صفحات قطاعی بیضوی همسانگرد[۳] و هومت ارتعاش آزاد صفحات قطاعی حلقوی کامپوزیتی[۴] را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار دادند. اسحاقی حلی تحلیلی را برای ارتعاشات صفحات ضخیم قطاعی همسانگرد با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه دلخواه در لبه‌های محیطی، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه سوم ارائه کرد.[۵] مک‌گی و همکاران برمبنای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول، حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد صفحات قطاعی همسانگرد با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی ارائه کردند.[۶] در تحقیقات بعدی ارتعاش آزاد ورق قطاعی توپر همسانگرد برای شرایط مرزی متفاوت با استفاده از روش DQ مورد بررسی قرار گرفت.[۷] ژو و همکارانش ارتعاشات ورق قطاعی حلقوی همسانگرد با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را با به کارگیری نظریه‌ی سه‌بعدی الاستیسیته‌ی خطی و روش

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۷/۵/۳، اصلاحیه ۱۳۹۷/۸/۳۰، پذیرش ۱۳۹۷/۹/۲۷.
DOI:10.24200/J40.2018.51173.1471

چبیشف ـ ریتز مطالعه کردند.[۸] یانگ کیانگ و جیان ارتعاش آزاد ورق قطاعی دایروی با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه دلخواه در لبه‌های محیطی را مورد بررسی قرار دادند.[۹] نی و ژونگ ارتعاشات آزاد و اجباری صفحات قطاعی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه دلخواه در لبه‌های دایروی را مطالعه کردند. آنها تغییرات خواص را در راستای ضخامت و به صورت توزیع نمایی فرض کرده، معادلات را بر مبنای نظریه‌ی سه‌بعدی الاستیسیته استخراج و با روش DQ حل کردند.[۱۰] تاهونه و یاس ارتعاشات آزاد صفحات قطاعی حلقوی ضخیم ساخته شده از مواد FG را که بر بستر الاستیک قرار داشته و دارای تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و انواع شرایط مرزی در لبه‌های محیطی بودند، بر اساس نظریه‌ی سه‌بعدی الاستیسیته و با استفاده از روش DQ بررسی کردند.[۱۱] آنها در ادامه این تحقیق را به مواد FG دوبعدی (تغییرات خواص در راستای شعاعی و ضخامت) بسط دادند.[۱۲] سعیدی و همکارانش حل سری فوریه را برای ارتعاشات صفحات قطاعی حلقوی ساخته‌شده از مواد FG با تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه دلخواه در لبه‌های محیطی بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه کردند.[۱۳] هاشمی و همکارانش کمانش و ارتعاش آزاد صفحات قطاعی توپر و حلقوی ساخته شده از مواد FG با ضخامت متغیر در راستای شعاعی بر بستر الاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار در لبه‌های قطاع را با استفاده از روش DQ مطالعه کردند.[۱۴] حسنی و همکاران حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد ورق قطاعی حلقوی نازک ساخته شده از مواد FG را بر بستر الاستیک که دارای تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه دلخواه در لبه‌های محیطی است بر پایه‌ی نظریه‌ی کلاسیک ارائه کردند.[۱۵] بلالیا و هومت ارتعاشات غیرخطی صفحات قطاعی گیردار FG را با به کارگیری روش اجزاء محدود و اجزاء مثلثی مطالعه کردند.[۱۶] وانگ و همکارانش ارتعاشات آزاد ورق‌های دایروی کامل و قطاعی شکل توپر و حلقوی FG را با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف و بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند و در حل معادلات حاکم از روش ریتز استفاده کردند.[۱۷] ظفرمند و کدخدایان نیز رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق ضخیم قطاعی FG را با تغییرات خواص در دو راستای شعاعی و ضخامت برای انواع شرایط مرزی بررسی کردند. در این نوشتار معادلات حاکم بر اساس نظریه‌ی سه‌بعدی الاستیسیته به دست آمد و با استفاده از روش اجزاء محدود حل شد.[۱۸] سو و همکارانش ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی از جنس کامپوزیت و FG را بررسی کردند. در این مطالعه معادلات حرکت با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج و با به کارگیری روش سری فوریه و ریلی ـ ریتز برای انواع شرایط مرزی حل شد.[۱۹] لیانگ و همکارانش ارتعاشات گذرای ورق‌های قطاعی FG را با تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های شعاعی و تکیه‌گاه‌های دلخواه در لبه‌های محیطی با استفاده از روش DQ و لاپلاس معکوس بررسی کردند.[۲۰]

در ادامه مطالعات مربوط به ارتعاشات ورق‌ها با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته ارائه می‌شود. جونز و میلن با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی همسان‌گرد با لبه‌های ساده و گیردار را بررسی کردند.[۲۱] دالایی و کر با به کار بستن این روش ارتعاشات ورق‌های اورتوتروپیک را که دارای چهار لبه‌ی گیردار بودند بررسی کردند.[۲۲] شوفرین و آیزنبرگر، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته، حلی نیمه تحلیلی را برای پایداری و ارتعاشات آزاد ورق‌های همسان‌گرد مستطیلی با ضخامت ثابت[۲۳] و ضخامت متغیر[۲۴] با شرایط مرزی مختلف ارائه کردند. ناصریان نیک و طهانی با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته به بررسی ارتعاشات ورق‌های مرکب لایه‌یی مستطیلی با شرایط مرزی دلخواه بر پایه‌ی نظریه‌ی برشی مرتبه اول پرداختند.[۲۵] فلاح و همکارانش با استفاده از این روش ارتعاشات ورق‌های نازک ساخته شده از مواد مرکب با لایه‌چینی متقارن را بررسی کردند.[۲۶] همین نویسندگان در ادامه ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی ساخته شده از مواد FG را با در نظر گرفتن بستر الاستیک بررسی کردند. آنها معادلات حرکت را بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آوردند و با اعمال روش کانترویچ توسعه یافته، دو دسته معادلات دیفرانسیل را با روش سری توانی حل کردند.[۲۷]

با بررسی ادبیات موضوع مشاهده می‌شود که تاکنون بررسی ارتعاشات ورق‌های قطاعی ساخته شده از مواد FG با استفاده از سری فوریه و با محدودیت تکیه‌گاه ساده در لبه‌های شعاعی[۵،۶،۹،۱۳،۱۵ و ۱۹] یا با استفاده از روش DQ[۲،۷،۱۰،۱۱،۱۲،۱۴ و ۲۰] و روش اجزاء محدود[۳،۴،۱۶ و ۱۸] برای انواع شرایط مرزی انجام شده است. در واقع مطالعه‌ی رفتار ارتعاشاتی ورق‌های قطاعی حلقوی، محدود به استفاده از روش‌های عددی همچون اجزاء محدود و یا مربعات دیفرانسیل است. از این رو یکی از اهداف اصلی این مقاله ارائه‌ی روشی غیرعددی برای تحلیل رفتار ارتعاشاتی ورق قطاع حلقوی FG است. با توجه به قابلیت روش کانترویچ توسعه یافته در حل مسائل با انواع شرایط مرزی و همچنین دقت و سرعت هم‌گرایی بالای این روش، این روش نیمه تحلیلی انتخاب شد. از طرف دیگر، این روش تاکنون برای حل ارتعاشات در مختصات قطبی (به عنوان مثال ورق دایروی یا ورق قطاعی) مورد استفاده قرار نگرفته است.

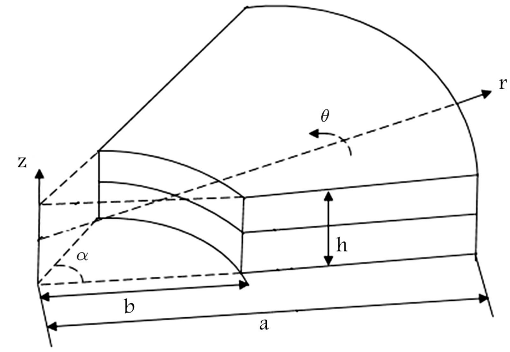
هدف این تحقیق ارائه‌ی یک حل نیمه تحلیلی برای ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی حلقوی ساخته شده از مواد FG با انواع شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار در لبه‌های شعاعی و محیطی با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته است. بدین منظور، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همیلتون، معادلات حرکت ـ شامل پنج معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و کوپل ـ استخراج می‌شود. سپس با اعمال روش کانترویچ توسعه یافته روی این معادلات، دو دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی در دو راستای شعاعی و محیطی به دست می‌آید. دستگاه معادلات در راستای شعاعی با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته و در راستای محیطی با استفاده از روش فضای حالت برای ترکیب شرایط مرزی گیردار و ساده حل خواهد شد و در یک روند تکراری فرکانس‌های طبیعی سیستم به دست می‌آید. در ادامه، نتایج این تحقیق با نتایج مطالعات پیشین مقایسه و صحت آنها بررسی می‌شود.

۲. فرمولاسیون

قطاع حلقوی ساخته شده از مواد تابعی مدرج با شعاع داخلی b، شعاع خارجی a، زاویه‌ی مرکزی α و ضخامت h در نظرگرفته شده است. هندسه‌ی ورق و دستگاه مختصات در شکل ۱ نشان داده شده است.

در اینجا، ماده‌ی FG با ترکیبی از فلز و سرامیک به صورت یک ماده‌ی همسان‌گرد و غیرهمگن با رفتار الاستیک خطی مدل می‌شود که درصد حجمی اجزاء تشکیل دهنده‌ی آن به صورت پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. با استفاده از قانون خطی مخلوط، خواص مکانیکی از جمله مدول یانگ را می‌توان از رابطه‌ی ۱ به دست آورد:[۲۸]

$$E = E_c v_c + E_m v_m \qquad (۱)$$



شکل ۱. هندسه‌ی قطاع حلقوی FG.

که در آن زیرنویس‌های m و c به ترتیب مربوط به فلز و سرامیک و نیز v_m و v_c به ترتیب کسر حجمی فلز و سرامیک است که رابطه‌ی بین آنها چنین بیان می‌شود:

$$v_m + v_c = 1 \tag{۲}$$

در این‌جا فرض می‌شود که کسر حجمی فلز طبق رابطه‌ی توانی ۳ تغییر می‌کند:[۲۹و۳۰]

$$v_m = \left(\frac{h - 2z}{2h}\right)^n \tag{۳}$$

که در آن n ضریب توانی ماده، عددی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. با استفاده از رابطه‌ی ۱ تا ۳ مدول یانگ مؤثر ماده‌ی FG چنین بیان می‌شود:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{h - 2z}{2h}\right)^n \tag{۴}$$

همچنین فرض می‌شود که نسبت پواسون در راستای ضخامت ثابت است. چی و چانگ نشان دادند که تأثیر تغییرات نسبت پواسون در راستای ضخامت روی رفتار مکانیکی ورق‌های FG بسیار کم است و لذا می‌توان آن را ثابت در نظر گرفت.[۳۱و۳۲]

۱.۲. استخراج معادلات حاکم

مؤلفه‌های جابه‌جایی در قالب نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود:[۲۸]

$$\begin{aligned}
u_1(r,\theta,z,t) &= u(r,\theta,t) + z\psi_r(r,\theta,t)\\
u_2(r,\theta,z,t) &= v(r,\theta,t) + z\psi_\theta(r,\theta,t)\\
u_3(r,\theta,z,t) &= w(r,\theta,t)
\end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن u_1، u_2 و u_3 به ترتیب جابه‌جایی‌های یک نقطه‌ی دلخواه و u، v و w جابه‌جایی‌های یک نقطه در صفحه‌ی میانی به ترتیب در راستاهای شعاعی، محیطی و ضخامت است. همچنین ψ_r و ψ_θ دوران‌های یک عمود جانبی به ترتیب حول محورهای r و θ هستند. با جایگذاری روابط ۵ در روابط خطی کرنش ـ جابه‌جایی[۳۰]، مؤلفه‌های کرنش به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \varepsilon_r^\circ + zk_r, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^\circ + zk_\theta, \varepsilon_z = 0\\
&\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}^\circ + zk_{r\theta}, \gamma_{rz} = k_{rz}, \gamma_{\theta z} = k_{\theta z}
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r^\circ = u_{,r}, \varepsilon_\theta^\circ = \frac{1}{r}(u + v_{,\theta}), \gamma_{r\theta}^\circ = \psi_\theta + \frac{1}{r}w_{,\theta}\\
&k_r = \psi_{r,r}, k_\theta = \frac{1}{r}(\psi_r + \psi_{\theta,\theta}), k_{r\theta} = \frac{1}{r}(\psi_{r,\theta} - \psi_\theta) + \psi_{\theta,r}\\
&k_{rz} = \psi_r + w_{,r}, k_{\theta z} = \psi_\theta + \frac{1}{r}(w_{,\theta})
\end{aligned} \tag{۷}$$

بر اساس روابط ۶ و ۷ و نیز با به کارگیری اصل همیلتون[۲۸]، معادلات حرکت مطابق معادلات ۸ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\delta u: N_{r,r} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \frac{1}{r}N_{r\theta,\theta} = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\psi}_r\\
&\delta v: N_{r\theta,r} + \frac{1}{r}N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r}N_{r\theta} = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\psi}_\theta\\
&\delta\psi_r: M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) + \frac{1}{r}M_{r\theta,\theta} - Q_r = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\psi}_r\\
&\delta\psi_\theta: M_{r\theta,r} + \frac{1}{r}M_{\theta,\theta} + \frac{2}{r}M_{r\theta} - Q_\theta = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\psi}_\theta\\
&\delta w: rQ_{r,r} + Q_{\theta,\theta} + Q_r = I_0\ddot{w}
\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن منتجه‌های تنش و ممان و نیز ممان‌های اینرسی چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&(N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_r, Q_\theta) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z})dz\\
&(M_r, M_\theta, M_{r\theta}) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta})zdz\\
&(I_0, I_1, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)(1, z, z^2)dz
\end{aligned} \tag{۹}$$

شرایط مرزی برای تکیه‌گاه‌های گیردار (C) و ساده (S) در لبه‌های شعاعی و محیطی عبارت است از: در لبه‌های شعاعی $(\theta = 0, \theta = \alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}: u = 0, v = 0, \psi_r = 0, \psi_\theta = 0, w = 0\\
&\mathbf{S}: u = 0, v = 0, \psi_r = 0, M_\theta = 0, w = 0
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

در لبه‌های محیطی $(r = b, a)$:

$$\begin{aligned}
&C: u = 0, v = 0, \psi_r = 0, \psi_\theta = 0, w = 0\\
&S: u = 0, v = 0, M_r = 0, \psi_\theta = 0, w = 0
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

طبق قانون هوک، روابط خطی تنش ـ کرنش در حالت تنش صفحه‌یی عبارت است از:[۲۸]

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{r\theta}\end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1 - v^2}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}\\
&\begin{Bmatrix}\sigma_{\theta z}\\ \sigma_{rz}\end{Bmatrix} = K_s\frac{E(z)}{2(1 + v)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{\theta z}\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن ν، $E(z)$ و K_s به ترتیب ضریب پواسون، مدول یانگ و ضریب تصحیح برش هستند. با جایگذاری کرنش‌ها (رابطه‌ی ۶) در رابطه‌ی ۱۲ و جایگذاری نتیجه‌ی

حاصله در رابطه‌ی ۹، منتجه‌های تنش و ممان برحسب مؤلفه‌های کرنش به دست می‌آید:

$$N_r = A_1\varepsilon_r^o + (A_1 - 2A_2)\varepsilon_\theta^o + B_1k_r + (B_1 - 2B_2)k_\theta$$
$$N_\theta = (A_1 - 2A_2)\varepsilon_r^o + A_1\varepsilon_\theta^o + (B_1 - 2B_2)k_r + B_1k_\theta$$
$$N_{r\theta} = A_2\gamma_{r\theta}^{\circ} + B_2k_r\theta$$
$$M_r = B_1\varepsilon_r^o + (B_1 - 2B_2)\varepsilon_\theta^o + D_1k_r + (D_1 - 2D_2)k_\theta$$
$$M_\theta = (B_1 - 2B_2)\varepsilon_r^o + B_1\varepsilon_\theta^{\circ} + (D_1 - 2D_2)k_r + D_1k_\theta$$
$$M_{r\theta} = B_2\gamma_{r\theta}^o + D_2k_{r\theta}, Q_\theta = k_sA_2k_{\theta z}, Q_r = k_sA_2k_{rz} \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی ۱۳، ضرایب سفتی ماده چنین تعریف می‌شود:

$$(A_1, B_1, D_1) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2}(1, z, z^2)$$

$$(A_2, B_2, D_2) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)}(1, z, z^2) \qquad (۱۴)$$

در نهایت با جایگذاری روابط ۷ در روابط ۱۳، و جایگذاری نتیجه‌ی حاصله در روابط ۸، معادلات حرکت برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به دست می‌آید:

$$\delta u : A_1(u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2}\frac{v_{,\theta}}{r^2} + \frac{v_{,r\theta}}{r}) + A_2(\frac{u_{,\theta\theta}}{r^2} - \frac{v_{,r\theta}}{r} - \frac{v_{,\theta}}{r^2})$$
$$+B_1(\psi_{r,rr} + \frac{\psi_{r,r}}{r} - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,r\theta}}{r})$$
$$+B_2(\frac{\psi_{r,\theta\theta}}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,r\theta}}{r} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2}) = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\psi}_r$$
$$\delta v : A_1(\frac{u_{,\theta}}{r^2} + \frac{u_{,r\theta}}{r} + \frac{v_{,\theta}\theta^2}{r}) +$$
$$A_2(-\frac{u_{,r\theta}}{r^2} - v_{,rr} + \frac{u_{,\theta}}{r^2} + \frac{v_{,r}}{r} - \frac{v}{r})$$
$$+B_1(\frac{\psi_{r,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{r,r\theta}}{r})$$
$$+B_2(-\frac{\psi_{r,r\theta}}{r} + \psi_{\theta,rr}\frac{\psi_{r,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,r}}{r} - \frac{\psi_\theta}{r^2}) = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\psi}_\theta$$
$$\delta\psi_r : B_1(u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} - \frac{v_{,\theta}}{r^2} + \frac{v_{,r\theta}}{r}) +$$
$$B_2(\frac{u_{,\theta\theta}}{r^2} - \frac{v_{,r\theta}}{r} - \frac{v_{,\theta}}{r^2})$$
$$+D_1(\psi_{r,rr} + \frac{\psi_{r,r}}{r} - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,r\theta}}{r})$$
$$+D_2(\frac{\psi_{r,\theta\theta}}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,r\theta}}{r} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2}) - k_sA_2(\psi_r + w_{,r}) = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\psi}_r$$
$$\delta\psi_\theta : B_1(\frac{u_{,\theta}}{r^2} + \frac{u_{,r\theta}}{r} + \frac{v_{,\theta\theta}}{r^2})$$
$$+B_2(-\frac{u_{,r\theta}}{r^2} - v_{,rr} + \frac{u_{,\theta}}{r^2} + \frac{v_{,r}}{r} - \frac{v}{r})$$
$$+D_1(\frac{\psi_{r,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{r,r\theta}}{r})$$
$$+D_2(-\frac{\psi_{r,r\theta}}{r} + \psi_{\theta,rr}\frac{\psi_{r,\theta}}{r^2} + \frac{\psi_{\theta,r}}{r} - \frac{\psi_\theta}{r^2})$$
$$-k_sA_2(\psi_\theta + w_{,\theta}) = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\psi}_\theta$$
$$\delta w : k_sA_2(w_{,rr} + \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \psi_{r,r} + \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r} + \frac{\psi_r}{r}) = I_0\ddot{w}$$
$$-k_sA_2(\psi_\theta + w_{,\theta}) = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\psi}_\theta \qquad (۱۵)$$

۳. روند حل

در این‌جا ابتدا با اعمال روش کانترویچ توسعه یافته دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله در معادلات ۱۵ به دو دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. در مسائل کمانش و ارتعاشات معادلات به دست آمده از نوع مقدار ویژه هستند. سپس دستگاه معادلات به دست آمده در راستای r به روش مربعات دیفرانسیلی و دستگاه معادلات در راستای θ به روش فضای حالت حل خواهد شد.

۱.۳. اعمال روش کانترویچ توسعه یافته

بر اساس روش کانترویچ توسعه یافته، ابتدا فرم انتگرال وزنی معادلات ۱۵ به دست می‌آید. بدین منظور معادلات ۱۵ به ترتیب در δu، δv، $\delta\psi_r$، $\delta\psi_\theta$ و δw ضرب و سپس روی مساحت قطاع حلقوی ($0 \leq \theta \leq \alpha, b \leq r \leq a$) انتگرال‌گیری می‌شود. برای خلاصه‌نویسی، روند کار فقط برای معادله‌ی اول نشان داده می‌شود.

$$\int_b^a \int_0^\alpha \begin{pmatrix} A_1(u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} - \frac{v_{,\theta}}{r^2} + \frac{v_{,r\theta}}{r}) \\ +A_2(\frac{u_{,\theta\theta}}{r^{22}} - \frac{v_{,r\theta}}{r} - \frac{v_{,\theta}}{r_2}) \\ +B_1(\psi_{r,rr} + \frac{\psi_{r,r}}{r} - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2} + \frac{\psi\theta_{,r\theta}}{r}) \\ +B_2(\frac{\psi_{r,\theta\theta}}{r^2} - \frac{\psi_{\theta,r\theta}}{r} - \frac{\psi_{\theta,\theta}}{r^2}) - (I_0\ddot{u}I_1\ddot{\psi}_r) \end{pmatrix} \delta u r dr d\theta = 0$$

(۱۶)

در ادامه، جابه‌جایی‌ها و دوران‌ها به صورت حاصل ضرب دو تابع مجزا در دو راستای شعاعی و محیطی، و ترم زمان به صورت هارمونیک در نظر گرفته می‌شود:

$$u = \hat{u}(r)\bar{u}(\theta)e^{i\omega t}$$
$$v = \hat{v}(r)\bar{v}(\theta)e^{i\omega t}$$
$$\psi_r = \hat{\psi}_r(r)\bar{\psi}_r(\theta)e^{i\omega t}$$
$$\psi_\theta = \hat{\psi}_\theta(r)\bar{\psi}_\theta(\theta)e^{i\omega t}$$
$$w = \hat{w}(r)\bar{w}(\theta)e^{i\omega t} \qquad (۱۷)$$

که در آن توابع $\hat{u}$، $\hat{v}$، $\hat{\psi}$، $\hat{\psi}$ و $\hat{w}$ توابعی مجهول برحسب r، توابع $\bar{u}$، $\bar{v}$، $\bar{\psi}$، $\bar{\psi}$ و $\bar{w}$ توابعی مجهول برحسب θ و ω فرکانس ارتعاش ورق است که در روند حل به دست می‌آید. اگر فرض شود که توابع در راستای θ ($\bar{u}$، $\bar{v}$، $\bar{\psi}$،$\bar{\psi}$ و $\bar{w}$) معلوم هستند، با جایگذاری روابط ۱۷ به همراه فرم تغییراتی آنها (یعنی $\delta u = \delta\hat{u}(r)\bar{u}(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta v = \delta\hat{v}(r)\bar{v}(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta\psi_r = \delta\hat{\psi}_r(r)\bar{\psi}_r(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta\psi_\theta = \delta\hat{\psi}_\theta(r)\bar{\psi}_\theta(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta w = \delta\hat{w}(r)\bar{w}(\theta)e^{i\omega t}$) در فرم انتگرال وزنی روابط ۱۵ (مشابه رابطه‌ی ۱۶)، و با توجه به فرض معلوم بودن توابع در راستای θ و انتگرال‌گیری در این راستا، پنج معادله‌ی دیفرانسیل معمولی برحسب توابع مجهول در راستای شعاعی حاصل می‌شود:

$$\delta\hat{u} : c_1\hat{u}'' + \frac{c_1}{r}\hat{u}' + \frac{c_2}{r^2}\hat{u} + \frac{c_3}{r}\hat{v}' + \frac{c_4}{r^2}\hat{v} + c_5\hat{\psi}_r'' + \frac{c_5}{r}\hat{\psi}_r'$$
$$+\frac{c_6}{r^2}\hat{\psi}_r + \frac{c_7}{r}\hat{\psi}_\theta' + \frac{c_8}{r^2}\hat{\psi}_\theta = -I_0S_1\omega^2\hat{u} - I_1S_2\omega^2\hat{\psi}_r$$
$$\delta\hat{v} : -\frac{c_3}{r}\hat{u}' + \frac{c_4}{r^2}\hat{u}c_9\hat{v}'' + \frac{c_9}{r}\hat{v}' + \frac{c_{10}}{r^2}\hat{v} + \frac{c_{11}}{r}\hat{\psi}_r' + \frac{c_{12}}{r^2}\hat{\psi}_r$$
$$+c_{13}\hat{\psi}_\theta'' + \frac{c_{13}}{r}\hat{\psi}_\theta' + \frac{c_{14}}{r^2}\hat{\psi}_\theta'' = -I_0S_7\omega^2\hat{v} - I_1S_8\omega^2\hat{\psi}_\theta$$

$$\delta\hat{\psi}_r : c_5\hat{u}'' + \frac{c_5}{r}\hat{u}'\frac{c_{20}}{r}\hat{u} - \frac{c_{11}}{r}\hat{v}' + \frac{c_{12}}{r^2}\hat{v} + c_{21}\hat{w}$$
$$+c_{22}\hat{\psi}_r'' + \frac{c_{22}}{r}\hat{\psi}_r'(\frac{c_{23}}{r^2} + c_{24})\hat{\psi}_r + \frac{c_{25}}{r}\hat{\psi}_\theta'$$
$$\frac{c_{26}}{r^2}\hat{\psi}_\theta = -I_1S_2\omega^2\hat{u} - I_2S_5\omega^2\hat{\psi}_r$$
$$\delta\hat{\psi}_\theta : -\frac{c_7}{r}\hat{u}'\frac{c_8}{r^2}\hat{u} + c_{13}\hat{v}'' + \frac{c_{13}}{r}\hat{v}'\frac{c_{27}}{r^2}\hat{v} + \frac{c_{28}}{r}\hat{w}$$
$$+\frac{c_{25}}{r}\hat{\psi}_r' + \frac{c_{26}}{r^2}\hat{\psi}_r + c_{29}\hat{\psi}_\theta'' + \frac{c_{29}}{r}\hat{\psi}_\theta$$
$$+(\frac{c_{30}}{r^2} + c_{31})\hat{\psi}_\theta = -I_1S_8\omega^2\hat{v} - I_2S_{11}\omega^2\hat{\psi}_\theta$$
$$\delta\hat{w} : c_{15}\hat{w}' + \frac{c_{15}}{r}\hat{w}' + \frac{c_{16}}{r^2}\hat{w} + c_{17}\hat{\psi}_r' + \frac{c_{17}}{r}\hat{\psi}_r + \frac{c_{18}}{r}\hat{\psi}_\theta =$$
$$-I_0S_{13}\omega^2\hat{w} \qquad (۱۸)$$

که ضرایب c_i در پیوست آورده شده‌است. ازطرف دیگر، چنان‌چه توابع در راستای شعاعی $\bar{u}$، $\bar{v}$، $\bar{\psi}$، $\bar{\psi}$ و $\bar{w}$ معلوم فرض شوند، با جایگذاری روابط ۱۷ به همراه فرم تغییراتی آنها (یعنی $\delta u = \hat{u}(r)\delta\bar{u}(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta v = \hat{v}(r)\delta\bar{v}(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta\psi_r = \hat{\psi}_r(r)\delta\bar{\psi}_r(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta\psi_\theta = \hat{\psi}_\theta(r)\delta\bar{\psi}_\theta(\theta)e^{i\omega t}$، $\delta w = \hat{w}(r)\delta\bar{w}(\theta)e^{i\omega t}$) در فرم انتگرال وزنی روابط ۱۵ (مشابه رابطه‌ی ۱۶)، و با توجه به معلوم بودن توابع در راستای r و انتگرال‌گیری در این راستا، پنج معادله‌ی دیفرانسیل معمولی برحسب توابع مجهول در راستای محیطی حاصل می‌شود:

$$\delta\bar{u} : d_1\bar{u}'' + d_2\bar{u} + d_3\bar{v}' + d_4\bar{\psi}_r'' + d_5\bar{\psi}_r$$
$$+d_6\bar{\psi}_\theta' = -I_0S_3\omega^2\bar{u} - I_1S_4\omega^2\bar{\psi}_r$$
$$\delta\bar{v} : -d_3\bar{u}' + d_7\bar{v}'' + d_8\bar{v} + d_9\bar{\psi}_r' + d_{10}\bar{\psi}_\theta''$$
$$+d_{11}\bar{\psi}_\theta = -I_0S_9\omega^2\bar{v} - I_1S_{10}\omega^2\bar{\psi}_\theta$$
$$\delta\hat{\psi}_r : d_4\bar{u}'' + d_{17}\bar{u} - d_9\bar{v}' + d_{18}\bar{w} + d_{19}\bar{\psi}_r''$$
$$+d_{20}\bar{\psi}_r + d_{21}\bar{\psi}_\theta' = -I_1S_4\omega^2\bar{u} - I_2S_6\omega^2\bar{\psi}_r$$
$$\delta\hat{\psi}_\theta : -d_6\bar{u}' + d_{10}\bar{v}'' + d_{22}\bar{v} + d_{23}\bar{w}' - d_{21}\bar{\psi}_r'$$
$$+d_{24}\bar{\psi}_\theta'' + d_{25}\bar{\psi}_\theta = -I_1S_{10}\omega^2\bar{v} - I_2S_{12}\omega^2\bar{\psi}_\theta$$
$$\delta\hat{w} : d_{12}\bar{w}'' + d_{13}\bar{w} + d_{14}\bar{\psi}_r + d_{15}\bar{\psi}_\theta' = -I_0S_{13}\omega^2\bar{w} \qquad (۱۹)$$

که ضرایب d_i در پیوست آورده شده است.

۲.۳. اعمال روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته و روش فضای حالت

به منظور حل معادلات ۱۸ و ۱۹، پاسخ‌ها در راستای r یا θ به عنوان تقریب اول فرض می‌شود. در اینجا، یک حدس اولیه و دلخواه برای توابع در راستای θ به صورت زیر فرض شده است:

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{\psi}_r = \bar{\psi}_\theta = \bar{w} = 1 - \theta^3 \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری روابط ۲۰ در روابط پ ۱ در «پیوست»، ضرایب ثابت c_i که در معادلات ۱۸ ظاهر می‌شود، به دست می‌آید. سپس معادلات ۱۸ که پنج معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر هستند، با استفاده از روش DQ حل شده و توابع $\hat{u}$، $\hat{v}$، $\hat{\psi}$، $\hat{\psi}$ و $\hat{w}$ به دست می‌آید. در نهایت با اعمال شرایط مرزی ساده و گیردار در شعاع‌های داخلی و خارجی ورق و حل یک مسئله‌ی مقدار ویژه، تقریب اول برای فرکانس طبیعی ورق حاصل خواهد شد.

در مرحله‌ی بعد، پاسخ‌های به دست آمده برای توابع $\hat{u}$، $\hat{v}$، $\hat{\psi}$ ، $\hat{\psi}$ و $\hat{w}$ در روابط پ ۲ در «پیوست» جایگذاری می‌شود تا ضرایب ثابت d_1 که در معادلات ۱۹ ظاهر می‌شود، به دست آید. معادلات ۱۹ که پنج معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت را شامل می‌شود با استفاده از روش فضای حالت حل شده و پاسخ عمومی برای $\bar{u}$، $\bar{v}$، $\bar{\psi}$، $\bar{\psi}$ و $\bar{w}$ به دست می‌آید. با اعمال شرایط مرزی دلخواه ساده و گیردار در لبه‌های مستقیم ورق ($\theta = 0, \theta = \alpha$) و حل یک مسئله‌ی مقدار ویژه، تقریب دوم برای فرکانس طبیعی ورق حاصل می‌شود. این روند ادامه می‌یابد تا پاسخ‌های به دست آمده برای فرکانس طبیعی ورق همگرا شوند.

۴. نتایج عددی

۱.۴. صحت‌سنجی

در این قسمت، نتایج عددی به دست آمده در پژوهش حاضر برای فرکانس‌های طبیعی قطاع حلقوی همگن و همسانگرد و قطاع حلقوی FG با مقایسه با نتایج موجود صحت‌سنجی می‌شود. یادآور می‌شود برای نمایش شرایط مرزی، ابتدا شرایط مرزی در لبه‌های مستقیم به ترتیب در $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$ و سپس در لبه‌های محیطی به ترتیب در $r = b$ و $r = a$ بیان می‌شود. برای مثال $SCSC$، به این معناست که شرایط مرزی در $\theta = 0$ ساده، در $\theta = \alpha$ گیردار، در $r = b$ ساده و در $r = a$ گیردار است.

مثال اول: دو فرکانس طبیعی اول یک ورق حلقوی همگن و همسانگرد با $\alpha = 60$ و $\frac{h}{a} = 0/1$، برای شرایط مرزی و نسبت‌های مختلف $\frac{b}{a}$ در جدول ۱ ارائه و با نتایج مرجع[۲] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد. در این مثال فرکانس بی‌بعد چنین تعریف شده است:

$$\bar{\omega} = \omega a^2\sqrt{\frac{\rho_m h}{D}}, D = \frac{E_m h^3}{12(1 - \upsilon^2)} \qquad (۲۱)$$

مثال دوم: دو فرکانس طبیعی اول یک ورق حلقوی FG با شرایط مرزی و هندسه‌های مختلف در جدول ۲ ارائه و با نتایج مرجع[۱۰] مقایسه شده است. همان‌طور

جدول ۱. فرکانس‌های بی‌بعد قطاع حلقوی همگن و همسانگرد.

شرایط مرزی	$\frac{b}{a}$	شکل مود	مطالعه‌ی حاظر	مرجع[۲]
$CCCC$	۰/۱	۱	۶۲/۶۵۷۵	۶۲/۴۱۲
		۲	۱۰۹/۴۸۱۲	۱۰۸/۳۵۵
	۰/۵	۱	۸۲/۴۱۹۷	۸۲/۱۶۴
		۲	۱۱۷/۰۵۲۷	۱۱۶/۶۲۴
$SSSS$	۰/۱	۱	۳۷/۴۳۴۸	۳۷/۳۶۶
		۲	۸۳/۰۸۲۱	۸۱/۹۳۷
	۰/۵	۱	۵۱/۰۵۸۳	۵۰/۹۸۲
		۲	۸۹/۱۷۴۸	۸۸/۴۸۶
$SSCC$	۰/۱	۱	۴۵/۷۶۵۲	۴۵/۴۸۰
		۲	۹۲/۲۲۰۳	۹۱/۷۶۴
	۰/۵	۱	۷۶/۹۵۲	۷۶/۹۰۲
		۲	۱۰۴/۵۱۷۹	۱۰۳/۶۸۲

جدول ۲. فرکانس‌های بی‌بعد قطاع حلقوی FG.

شرایط مرزی	$\frac{b}{a}$	شکل مود	مطالعه‌ی حاضر	مرجع[10]
$SSCC$	۰/۱	۱	۰/۰۶۱۴	۰/۰۶۱۹
		۲	۰/۰۷۱۶	۰/۰۷۶۶
	۰/۳	۱	۰/۰۹۷۲	۰/۰۹۷۸
		۲	۰/۱۰۳۳	۰/۱۰۲۷
$SSCS$	۰/۱	۱	۰/۰۴۰۴	۰/۰۴۰۹
		۲	۰/۰۵۲۶	۰/۰۵۲۹
	۰/۳	۱	۰/۰۶۷۸	۰/۰۶۷۸
		۲	۰/۰۷۳۰	۰/۰۷۳۶

جدول ۳. خواص ماده فلز و سرامیک برای مدل‌سازی ماده FG.

ماده	$E(GPa)$	v	$\rho(Kg/m^3)$
Al_2O_3	۳۸۰	۰/۳	۳۸۰۰
$Aluminum$	۷۰	۰/۳	۲۷۰۷

که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد. در این مثال فرکانس بی‌بعد چنین تعریف شده است:

$$\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\rho_c}{E_c(1-\upsilon)}} \qquad (22)$$

که در آن زیرنویس c مربوط به جنس سرامیک با خواص مکانیکی $\rho_c = 3800\,Kg/m^3$ و $E_c = 380\,GPa$ است. مشخصات جنس فلز نیز $\rho_m = 2707\,Kg/m^3$ و $E_m = 70\,GPa$ است. لازم به ذکر است که در نتایج ارائه شده در جدول ۲، $\alpha = 210$ ، $\frac{h}{a} = 0/1$ و $n = 2$ در نظر گرفته شده است.

۲.۴. مطالعات پارامتری

در این قسمت، اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی قطاع حلقوی FG با شرایط مرزی مختلف بررسی می‌شود. به منظور ارائه‌ی نتایج عددی، ماده FG به صورت ترکیبی از آلومینا و آلومینیوم با خواص ارائه شده در جدول ۳ در نظر گرفته شده است.

همچنین در ارائه‌ی نتایج عددی، فرکانس طبیعی طبق رابطه‌ی ۲۱ و با در نظر گرفتن خواص فاز فلز (یعنی آلومینیوم) بی‌بعد شده و ضریب تصحیح برش برابر ۰/۸۳۳ در نظر گرفته شده است.[33]

در جدول ۴ تعداد تکرار لازم برای هم‌گرایی فرکانس طبیعی ورق قطاعی FG مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج مرجع[10]مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، هم‌گرایی فرکانس طبیعی ورق در تکرار سوم نشان‌دهنده‌ی دقت و سرعت هم‌گرایی روش است. نتایج ارائه شده در جدول ۴ مربوط به قطاع حلقوی شکل $SSCC$ با مشخصات هندسی $\alpha = 210$، $\frac{h}{a} = 0/1$ و $\frac{b}{a} = 0/1$ است.

در جدول ۵ تأثیر توابع حدس اولیه روابط ۲۰ بر نتایج نهایی مورد بررسی قرار گرفته است. پنج تابع مجهول راستای θ ($\bar{u}(\theta)$، $\bar{v}(\theta)$ ، $\bar{\phi}(\theta)$، $\bar{\psi}(\theta)$ و $\bar{w}(\theta)$) مساوی تابع F ارائه شده در این جدول در نظر گرفته شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج نهایی کاملاً مستقل از توابع حدس اولیه است و در نتیجه توابعی که به عنوان تقریب اول انتخاب می‌شوند می‌توانند کاملاً دلخواه باشند. نتایج جدول ۵ برای قطاع حلقوی $SSCC$ با مشخصات هندسی $\alpha = 210$ و $\frac{h}{a} = 0/1$ ارائه شده است.

جدول ۴. بررسی تعداد تکرار لازم برای هم‌گرایی فرکانس طبیعی ورق قطاعی FG.

n	دفعات تکرار در روش کانترویچ توسعه یافته					مرجع[10]
	۱	۲	۳	۴	۵	
۱	۰/۰۹۱۸	۰/۰۶۳۸	۰/۰۶۵۱	۰/۰۶۵۱	۰/۰۶۵۱	۰/۰۶۵۹
۲	۰/۰۸۹۱	۰/۰۶۵۵	۰/۰۶۱۴	۰/۰۶۱۴	۰/۰۶۱۴	۰/۰۶۱۹
۳	۰/۰۸۵۳	۰/۰۶۱۵	۰/۵۶۲	۰/۰۵۶۲	۰/۰۵۶۲	۰/۰۵۶۳
۴	۰/۰۸۱۱	۰/۰۵۷۳	۰/۰۵۰۱	۰/۰۵۰۱	۰/۰۵۰۱	۰/۰۵۰۲

جدول ۵. فرکانس اول بی بعد قطاع حلقوی FG.

تابع حدس اولیه	n	$\frac{b}{a} = 0/1$	$\frac{b}{a} = 0/3$
$F = 1 - \theta^3$		۰/۰۶۵۱	۰/۱۰۲۶
$F = 1 - (\frac{\theta}{\alpha})$		۰/۰۶۵۱	۰/۱۰۲۶
$F = cos(\frac{\theta}{\alpha})$	۱	۰/۰۶۵۱	۰/۱۰۲۶
$F = exp(-\frac{\theta}{\alpha})sin(\frac{\theta}{\alpha})$		۰/۰۶۵۱	۰/۱۰۲۶
مرجع[10]		۰/۰۶۵۹	۰/۱۰۳۹
$F = 1 - \theta^3$		۰/۰۶۱۴	۰/۰۹۷۲
$F = 1 - (\frac{\theta}{\alpha})$		۰/۰۶۱۴	۰/۰۹۷۲
$F = cos(\frac{\theta}{\alpha})$	۲	۰/۰۶۱۴	۰/۰۹۷۲
$F = exp(-\frac{\theta}{\alpha})sin(\frac{\theta}{\alpha})$		۰/۰۶۱۴	۰/۰۹۷۲
مرجع[10]		۰/۰۶۱۹	۰/۰۹۷۸

جدول ۶. فرکانس‌های بی‌بعد قطاع حلقوی FG با شرایط مرزی و نسبت ضخامت به شعاع خارجی متفاوت.

شرایط مرزی	$\frac{h}{a}$	شماره شکل مود ۱	شماره شکل مود ۲
$CCCC$	۰/۰۵	۷۱/۱۲۳۷	۱۳۴/۶۶۰۰
	۰/۱	۶۱/۴۷۴۳	۱۰۹/۳۷۷۴
$SSSS$	۰/۰۵	۳۹/۰۵۶۴	۹۲/۹۷۲۲
	۰/۱	۳۶/۶۱۰۴	۸۱/۵۴۸۶
$SSCC$	۰/۰۵	۴۸/۴۸۷۶	۱۰۴/۵۴۰۶
	۰/۱	۴۴/۸۲۱۳	۸۹/۶۷۸۰
$CCSS$	۰/۰۵	۵۸/۶۶۳۴	۱۱۹/۶۱۵۳
	۰/۱	۵۲/۱۳۸۵	۱۰۰/۲۱۸۷

در جدول ۶، دو فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی FG با ضخامت‌های مختلف و شرایط مرزی گوناگون ارائه شده است. نتایج برای قطاع حلقوی با $\alpha = 60$ ، ضریب توان ماده $n = 1$ و $\frac{b}{a} = 0/1$ بیان شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت ورق (افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی $\frac{h}{a}$)، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش می‌یابد که علت آن، وجود پارامتر ضخامت در بی‌بعدسازی انجام

جدول ۷. فرکانس‌های بی‌بعد قطاع حلقوی FG برای زوایای مختلف قطاع و شرایط مرزی مختلف.

شرایط مرزی	زاویه‌ی قطاع حلقوی FG	شماره شکل مود ۱	شماره شکل مود ۲
$CCCC$	۶۰	۶۱٫۴۷۴۳	۱۰۹٫۳۷۷۴
	۱۲۰	۳۳٫۶۲۰۴	۵۳٫۱۳۶۴
	۲۱۰	۲۶٫۱۲۹۸	۳۳٫۱۱۶۴
	۳۰۰	۲۴٫۸۱۹۳	۲۷٫۵۷۰۹
$SSSS$	۶۰	۳۶٫۶۱۰۴	۸۱٫۵۴۸۶
	۱۲۰	۱۹٫۲۵۷۹	۳۶٫۵۲۳۸
	۲۱۰	۱۵٫۰۸۳	۲۱٫۲۰۳۲
	۳۰۰	۱۴٫۲۳۷۲	۱۶٫۹۲۱۴
$SSCC$	۶۰	۴۴٫۸۲۱۳	۸۹٫۶۷۸۰
	۱۲۰	۲۷٫۹۸۳۴	۴۴٫۷۵۰۶
	۲۱۰	۲۴٫۹۶۱۹	۲۹٫۶۳۸۳
	۳۰۰	۲۴٫۴۷۲۷	۲۶٫۱۸۵۹
$CCSS$	۶۰	۵۲٫۱۳۸۵	۱۰۰٫۲۱۸۷
	۱۲۰	۲۵٫۲۳۶۵	۴۴٫۳۶۵۹
	۲۱۰	۱۶٫۷۳۳۶	۲۴٫۸۳۰۳
	۳۰۰	۱۴٫۸۱۳۲	۱۸٫۶۶۷۶

شده است؛ این درحالی است که فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد. در ضمن نتایج نشان می‌دهد که تغییر ضخامت بر مودهای بالاتر نسبت به مودهای پایین‌تر اثر بیشتری دارد. برای مثال برای شرایط مرزی $CCCC$ با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی از ۰٫۰۵ به ۰٫۱، فرکانس بی‌بعد دوم ۱۸٫۷۵ درصد و فرکانس بی‌بعد اول ۱۳٫۵۶ درصد کاهش می یابد. برای شرایط مرزی $SSSS$ نیز با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی از ۰٫۰۵ به ۰٫۱، فرکانس بی‌بعد دوم ۱۲٫۲۸ درصد و فرکانس بی‌بعد اول ۶٫۲۶ درصد کاهش می‌یابد.

در جدول ۷ دو فرکانس طبیعی اول قطاع حلقوی FG با زوایای مختلف و شرایط مرزی گوناگون ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه‌ی قطاع، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش می‌یابد. در نتایج ارائه شده در این جدول، ثابت ماده و سایر پارامترهای هندسی به ترتیب عبارت‌اند از $n = ۱$ ، $\frac{h}{a} = ۰/۱$ و $\frac{b}{a} = ۰/۱$.

در نهایت اثر ضریب توانی ماده مدرج تابعی بر فرکانس‌های طبیعی در جدول ۸ مورد بررسی قرار گرفته است. در این جدول دو فرکانس طبیعی اول قطاع حلقوی تابعی مدرج با ضرایب توانی مختلف و شرایط مرزی گوناگون برای $\alpha = ۶۰$، $\frac{h}{a} = ۰/۱$ و $\frac{b}{a} = ۰/۱$ ارائه شده است. مطابق انتظار، با افزایش ضریب توانی ماده و درنتیجه افزایش فاز فلز، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش می‌یابد.

جدول ۸. فرکانس‌های بی‌بعد قطاع حلقوی FG برای ثوابت مختلف ماده وشرایط مرزی گوناگون.

شرایط مرزی	n	شماره شکل مود ۱	شماره شکل مود ۲
$CCCC$	۰	۶۲٫۶۵۷۵	۱۱۱٫۴۸۱۲
	۰٫۵	۶۲٫۲۷۱۱	۱۱۰٫۸۲۲۹
	۱	۶۱٫۴۷۴۳	۱۰۹٫۳۷۷۴
	۲	۵۹٫۵۵۲۱	۱۰۴٫۸۸۹۹
$SSSS$	۰	۳۷٫۴۳۴۸	۸۳٫۰۸۲۱
	۰٫۵	۳۷٫۲۰۶۶	۸۲٫۶۱۷۵
	۱	۳۶٫۶۱۰۴	۸۱٫۵۴۸۶
	۲	۳۴٫۴۱۰۱	۷۷٫۵۰۰۵
$SSCC$	۰	۴۵٫۷۶۵۲	۹۲٫۲۲۰۳
	۰٫۵	۴۵٫۵۱۲۸	۷۸٫۴۵۵۶
	۱	۴۴٫۸۲۱۳	۸۹٫۶۷۸۰
	۲	۴۲٫۳۳۴۳	۸۵٫۶۹۱۶
CCSS	۰	۵۳٫۱۱۹۹	۱۰۱٫۸۰۲۴
	۰٫۵	۵۲٫۸۷۱۶	۱۰۱٫۴۰۲۶
	۱	۵۲٫۱۳۸۵	۱۰۰٫۲۱۸۷
	۲	۴۹٫۳۹۹۳	۹۵٫۷۲۸۷

۵. نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق ارائه‌ی حل نیمه‌تحلیلی برای ارتعاشات آزاد ورق قطاعی FG تحت انواع شرایط مرزی ساده و گیردار بوده است. تحلیل بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته انجام شد. مقایسه‌ی نتایج با نتایج موجود نشان داد که روش کانترویچ توسعه یافته در مختصات قطبی نیز، همچون مختصات دکارتی، دارای دقت و همگرایی بالایی در تحلیل ارتعاشات است. همچنین نشان داده شد که حدس اولیه به عنوان تقریب اول اثری بر نتایج نهایی ندارد. در این تحقیق فرکانس طبیعی قطاع FG با هندسه‌های مختلف و ثوابت ماده‌ی گوناگون برای انواع شرایط مرزی ساده و گیردار در لبه‌های شعاعی و محیطی ارائه شد که می‌توان از آنها برای صحت‌سنجی نتایج تحلیل‌های عددی بهره جست. همچنین نشان داده شد که افزایش ضخامت ورق، که باعث افزایش فرکانس طبیعی ورق (کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده در نوشتار حاضر) می‌شود، بر مودهای بالاتر نسبت به مودهای پایین‌تر اثر بیشتری دارد. در نهایت نشان داده شد که افزایش زاویه‌ی قطاع باعث کاهش فرکانس طبیعی ورق می‌شود.

پانوشت‌ها

1. functionally graded material (FGM)
2. differential quadrature method (DQM)

منابع (References)

1. Jha, D.K., Kant, T. and Singh R.K. "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Composite Structures*, **96**, pp. 833-849 (2013).
2. Liew, K.M. and Liu, F.L. "Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates", *Journal of Sound and vibration*, **230**(2), pp. 335-356 (2000).
3. Belalia, S. and Houmat, A. "Non-linear free vibration of elliptic sector plates by a curved triangular p-element", *Thin-Walled Structures*, **48**(4-5), pp. 316-326 (2010).
4. Houmat, A. "Large amplitude free vibration of shear deformable laminated composite annular sector plates by a sector p-element", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **43**(9), pp. 834-843 (2008).
5. Es'haghi, M. "Accurate approach implementation in vibration analysis of thick sector plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, **79**, pp. 1-14 (2014).
6. McGee, O. G., Hung, C. S. and Leissa, A.W. "Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges", *International Journal of Mechanical Sciences*, **37**(5), pp. 537-566 (1995).
7. Wang, X. and Wang, Y. "Free vibration analyses of thin sector plates by the new version of differential quadrature method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(36-38), pp. 3957-3971 (2004).
8. Zhou, D., Lo, S.H. and Cheung, Y.K. "3-D vibration analysis of annular sector plates using the Chebyshev–Ritz method", *Journal of Sound and vibration*, **320**(1-2), pp. 421-437 (2009).
9. Yongqiang, L. and Jian, L. "Free vibration analysis of circular and annular sectorial thin plates using curve strip Fourier p-element", *Journal of Sound and Vibration*, **350**(3), pp. 457-466 (2007).
10. Nie, G.J. and Zhong, Z. "Vibration analysis of functionally graded annular sectorial plates with simply supported radial edges", *Composite Structures*, **84**(2), pp. 167-176 2008).
11. Tahouneh, V. and Yas, M.H. "3-D free vibration analysis of thick functionally graded annular sector plates on Pasternak elastic foundation via 2-D differential quadrature method", *Acta Mechanica*, **223**(9), pp. 1879-1897 (2012).
12. Tahouneh, V. and Yas, M.H. "Semianalytical solution for three-dimensional vibration analysis of thick multidirectional functionally graded annular sector plates under various boundary conditions", *Journal of Engineering Mechanics*, **140**(1), pp. 31-46 (2013).
13. Saidi, A.R., Hasani Baferani, A. and Jomehzadeh, E. "Benchmark solution for free vibration of functionally graded moderately thick annular sector plates", *Acta Mechanica*, **219**(3-4), pp. 309-335 (2011).
14. Hosseini-Hashemi, Sh., Akhavan, H., Rokni Damavandi Taher, H., and et al. "Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation", *Materials and Design*, **31**(4), pp. 1871-1880 (2010).
15. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R., and Jomehzadeh, E. "Exact analytical solution for free vibration of functionally graded thin annular sector plates resting on elastic foundation", Journal of Vibration and Control, 18 (2), pp.246-267 (2012).
16. Belalia, S.A. and Houmat, A. "Nonlinear free vibration of functionally graded shear deformable sector plates by a curved triangular p-element", *European Journal of Mechanics A/Solids*, **35**, pp. 1-9 (2012).
17. Wang, Q., Shi, D. and Liang, Q. "A unified solution for vibration analysis of functionally graded circular, annular and sector plates with general boundary conditions", *Composites Part B: Engineering*, **88**, pp. 264-296 (2016).
18. Zafarmand H. and Kadkhodayan M. "Three dimensional elasticity solution for static and dynamic analysis of multi-directional functionally graded thick sector plates with general boundary conditions", *Composites Part B: Engineering*, **69**, pp. 592-602 (2015).
19. Su, Z., Jin, G. and Wang, X. "Free vibration analysis of laminated composite and functionally graded sector plates with general boundary condition", *Composite structures*, **132**, pp. 720-736 (2015).
20. Liang, X., Kou, H.L., Wang, L. and et al. "Three-dimensional transient analysis of functionally graded material annular sector plate under various boundary conditions", *Composite structures*, **132**, pp. 584-596 (2015).
21. Jones, R. and Milne, B., "Application of the extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **45**(3), pp. 309-316 (1976).
22. Dalaei, D. and Kerr, A. "Natural vibration analysis of clamped rectangular orthotropic plates", *Journal of sound and vibration*, **189**(3), pp. 399-406 (1996).
23. Shufrin, I. and Eisenberger, M. "Stability and vibration of shear deformable plates - first order and higher order analyses", *International journal of solids and structures*, **42**(3-4), pp. 1225-1251 (2005).
24. Shufrin, I. and Eisenberger, M. "vibration of shear deformable plates with variable thickness - first order and higher order analyses", *Journal of sound and vibration*, **290**(1-2), pp. 465-489 (2006).
25. Naserian-Nik, A.M. and Tahani, M. "Free vibration analysis of moderately thick rectangular laminated compos-

ite plates with arbitrary boundary", *Structural Engineering and Mechanics*, **35** (2), pp. 217-240 (2010).

26. Fallah, A., Kargarnovin, M.H. and Aghdam, M.M. "Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method", *Key Engineering Materials*, **471**, pp. 739-744 (2011).

27. Fallah, A., Aghdam, M.M. and Kargarnovin, M.H. "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method", *Archive of Applied Mechanics*, **83**(2), pp. 177-191 (2013).

28. Reddy, J.N. and Chin, C.N. "Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of thermal Stresses*, **21** (6), pp. 593-626 (1998).

29. Reddy, J.N., Wang, C.M. and Kitipornchai, S. "Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates", European *Journal of Mechanics-A/Solids*, **18**(2), pp. 185-199 (1999).

30. Fung, Y.C. and Tong, P. "Classical and Computational Solid Mechanics", World Scientific, New Jersey (2001).

31. Chi, C.H. and Chung, Y.L. "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - part I: Analysis", *International Journal of solids and structures*, **43**(13), pp. 3657-3674 (2006).

32. Chi, C.H. and Chung, Y.L. "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load - part II: Numerical results", *International Journal of solids and structures*, **43**(13), pp. 3675-3691 (2006).

33. Nosier, A. and Fallah F., "Reformulation of Mindlin-Reissner governing equations of functionally graded circular plates", *Acta Mechanica*, **198**(3-4), pp. 209-233, (2008).

پیوست

ضرایب c_i و d_i در روابط ۱۸ و ۱۹ عبارت‌اند از:

$$C_1 = A_1 \int_0^\alpha \hat{u}^2 d\theta, C_2 = A_2 \int_0^\alpha \hat{u}'' \hat{u} d\theta - A_1 \int_0^\alpha \hat{u}\hat{u} d\theta,$$

$$c_3 = (A_1 - A_2) \int_0^\alpha \hat{v}' \hat{u} d\theta,$$

$$c_4 = -(A_1 + A_2) \int_0^\alpha \hat{v}' \hat{u} d\theta, c_5 = B_1 \int_0^\alpha \hat{u} \hat{\psi}_r d\theta,$$

$$c_6 = B_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r'' \hat{u} d\theta - B_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r \hat{u} d\theta, c_7 =$$

$$(B_1 - B_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta' \hat{u} d\theta,$$

$$c_8 = -(B_1 + B_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta' \hat{u} d\theta, c_9 = A_2 \int_0^\alpha \hat{v}^2 d\theta,$$

$$c_{10} = A_1 \int_0^\alpha \hat{u}'' \hat{u} d\theta - A_2 \int_0^\alpha \hat{u} u \hat{d}\theta, c_{11} =$$

$$(B_1 - B_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}'_r v \hat{d}\theta,$$

$$c_{12} = (B_1 + B_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}_r' \hat{v} d\theta$$

$$c_{13} = B_2 \int_0^\alpha \hat{v} \hat{\psi}_\theta d\theta, c_{14} = B_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}''_\theta v \hat{d}\theta -$$

$$\hat{\psi}_\theta \hat{v} d\theta B_2 \int_0^\alpha p\hat{s}i_\theta \hat{\nu} d\theta$$

$$c_{15} = A_2 \int_0^\alpha \hat{w}^2 d\theta, c_{16} = A_2 \int_0^\alpha \hat{w}'' \hat{w} d\theta, c_{17} = A_2 \int_0^\alpha \hat{w} \hat{\psi}_r d\theta,$$

$$c_{18} = -A_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta' \hat{w} d\theta, c_{19} = \int_0^\alpha \frac{\hat{w}}{ks} d\theta,$$

$$c_{20} = B_2 \int_0^\alpha \hat{u}'' \hat{\psi}_r d\theta - B_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r \hat{u} d\theta,$$

$$c_{21} = -ksA_2 \int_0^\alpha \hat{w} \hat{\psi}_r d\theta, c_{22} = D_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r^2 d\theta,$$

$$c_{23} = -D_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r'' \hat{\psi}_r d\theta - D_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r \hat{\psi}_r d\theta,$$

$$c_{24} = -ksA_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_r^2 d\theta, c_{25} = (D_1 - D_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta' \hat{\psi}_r d\theta,$$

$$c_{26} = -(D_1 + D_2) \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta' \hat{\psi}_r d\theta, c_{27} = -B_2 \int_0^\alpha \hat{v} \hat{\psi}_\theta d\theta$$

$$-B_1 \int_0^\alpha \hat{v}' \hat{\psi}_\theta' d\theta,$$

$$c_{28} = -ksA_2 \int_0^\alpha \hat{w}' \hat{\psi}_\theta d\theta, c_{29} = D_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta^2 d\theta,$$

$$c_{30} = D_1 \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta'' \hat{\psi}_\theta d\theta - D_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta \hat{\psi}_\theta d\theta, C_{31} =$$

$$-ksA_2 \int_0^\alpha \hat{\psi}_\theta \hat{\psi}_\theta d\theta$$

(پ-۱)

$$d_1 = A_2 \int_b^a \frac{\bar{u}^2}{r} dr, d_2 = A_1 \int_b^a r \bar{u}'' \bar{u} dr + A_1 \int_b^a \bar{u}' \bar{u} dr$$

$$-A_1 \int_b^a \frac{\bar{u}\bar{u}}{r} dr,$$

$$d_3 = -(A_1 + A_2) \int_b^a \frac{\bar{v}\bar{u}}{r} dr + (A_1 - A_2) \int_b^a \bar{v}' \bar{u} dr, ,$$

$$d_4 = B_2 \int_b^a \frac{\bar{u}\bar{\psi}_r}{r} dr,$$

$$d_5 = B_1 \int_b^a r \bar{\psi}_r'' \bar{u} dr + B_1 \int_b^a \bar{\psi}_r' \bar{u} dr - B_1 \int_b^a \frac{\bar{\psi}_r \bar{u}}{r} dr,$$

$$d_6 = -(B_1 + B_2) \int_b^a \frac{\bar{\psi}_\theta \bar{u}}{r} dr + (B_1 - B_2) \int_b^a \bar{\psi}_\theta' \bar{u} dr,$$

$$d_7 = A_1 \int_b^a \frac{\bar{v}^2}{r} dr, d_8 = A_2 \int_b^a r \bar{v}'' \bar{v} dr$$

$$+A_2 \int_b^a \bar{v}' \bar{v} dr - A_2 \int_b^a \frac{\bar{v}\bar{v}}{r} dr,$$

$$d_{9}=(B_{1}-B_{2})\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{r}'\bar{v}dr+(B_{1}+B_{2})\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{r}\bar{v}}{r}dr,d_{10}=B_{1}\int_{b}^{a}\frac{\bar{v}\bar{\psi}_{\theta}}{r}dr,$$

$$d_{11}=2\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{\theta}''\bar{v}dr+B_{2}\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{\theta}'\bar{v}dr-B_{2}\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{\theta}\bar{v}}{r}dr,$$

$$d_{12}=A_{2}\int_{b}^{a}\frac{\bar{w}^{2}}{r}dr,d_{13}=2\int_{b}^{a}r\bar{w}''\bar{w}dr+A_{2}\int_{b}^{a}\bar{w}'\bar{w}dr,$$

$$d_{14}=A_{2}\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{r}'\bar{w}dr+A_{2}\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{r}\bar{w}dr,$$

$$d_{15}=A_{2}\int_{b}^{a}\bar{w}\bar{\psi}_{\theta}dr,d_{16}=\int_{b}^{a}rP\bar{w}ksdr,$$

$$d_{17}=B_{1}\int_{b}^{a}r\bar{u}''\bar{\psi}_{r}dr+B_{1}\int_{b}^{a}\bar{u}'\bar{\psi}_{r}dr-B_{1}\int_{b}^{a}\frac{\bar{u}\bar{\psi}_{r}}{r}dr,$$

$$d_{18}=-ksA_{2}\int_{b}^{a}r\bar{w}'\bar{\psi}_{r}dr,d_{19}=D_{2}\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{r}^{2}}{r}dr,$$

$$d_{20}=-D_{1}\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{r}''\bar{\psi}_{r}dr+D_{1}\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{r}'\bar{\psi}_{r}dr$$

$$-D_{1}\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{r}\bar{\psi}_{r}}{r}dr-ksA_{2}\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{r}\bar{\psi}_{r}dr,$$

$$d_{21}=(D_{1}-D_{2})\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{\theta}'\bar{\psi}_{r}dr-(D_{1}+D_{2})\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{\theta}\bar{\psi}_{r}}{r}dr,$$

$$d_{22}=B_{2}\int_{b}^{a}r\bar{v}''\bar{\psi}_{\theta}dr+B_{2}\int_{b}^{a}\bar{v}\bar{\psi}_{\theta}dr-B_{2}\int_{b}^{a}\frac{\bar{v}\bar{\psi}_{\theta}}{r}dr,$$

$$d_{23}=-ksA_{22}\int_{b}^{a}\bar{w}\bar{\psi}_{\theta}dr,d_{24}=D_{22}\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{\theta}^{2}}{r}dr,$$

$$d_{25}=D_{2}\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{\theta}''\bar{\psi}_{\theta}dr+D_{2}\int_{b}^{a}\bar{\psi}_{\theta}'\bar{\psi}_{\theta}dr-D_{2}\int_{b}^{a}\frac{\bar{\psi}_{\theta}\bar{\psi}_{\theta}}{r}dr-ksD_{2}\int_{b}^{a}r\bar{\psi}_{\theta}\bar{\psi}_{\theta}dr$$

(پ-۲)