

# مطالعه‌ی تأثیر عملکرد برخورد با دو زمان آرامش یکتا و چندگانه در روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی گاز-مایع با استفاده از دو روش مختلف اعمال نیرو

اسلام عزت‌نشان\* (استادیار)

رضا گوهری‌مهر (دانشجوی کارشناسی ارشد)

گروه مهندسی هوافضا، دانشکده‌ی مهندسی فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۳۹۹)  
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۸۸-۷۷

در نوشتار حاضر کارایی عملگرهای برخورد در روش شبکه‌ی بولتزمن با دو زمان آرامش یکتا و چندگانه و دو روش اعمال نیرو برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی مطالعه شده است. اندرکنش بین دو فاز گاز و مایع در فصل مشترک با مدل شان - چن شبیه‌سازی شده است. با هدف عدم وابستگی نسبت چگالی به مقدار زمان آرامش و رفع محدودیت روش شان - چن استاندارد، از روش اعمال نیروی اختلاف دقیق استفاده شده است. کارایی و پایداری الگوریتم عددی توسعه یافته با شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی در اعداد وبر و رینولدز مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاکی از آن است که اعمال نیروی اندرکنش بین دو فاز با استفاده از روش اختلاف دقیق سبب استقلال نسبت چگالی از مقدار زمان آرامش می‌شود. همچنین، استفاده از زمان آرامش چندگانه به جای زمان آرامش یکتا اثر مطلوبی در کاهش مقدار سرعت‌های غیرفیزیکی دارد که نتیجه آن افزایش پایداری حل عددی برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی کاربردی در اعداد وبر و رینولدز بالا است.

**واژگان کلیدی:** روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی، مدل شان - چن، زمان آرامش چندگانه، روش اختلاف دقیق.

e.ezzatneshan@sbu.ac.ir  
r.goharimehr@mail.sbu.ac.ir

## ۱. مقدمه

روش شبکه‌ی بولتزمن جذابیت استفاده از آن را برای مطالعه‌ی جریان‌های چندفازی دوچندان کرده است.<sup>[۵-۳]</sup>

به منظور مدل‌سازی جریان‌های چندفازی در روش شبکه‌ی بولتزمن، به طور کلی سه دسته مدل توسعه داده شده است: مدل گرادیان رنگ،<sup>[۶]</sup> انرژی آزاد<sup>[۷]</sup> و روش شان - چن.<sup>[۹و۸]</sup> در میان این سه روش، مدل شان - چن به دلیل قابلیت مدل‌سازی جریان‌های چندفازی چندجزئی و سادگی الگوریتم، کاربرد فراگیر دارد. این روش از یک تابع برخورد، شامل نیروی اندرکنش میان ذرات فازها یا جزءهای مختلف سیال، برای پیش‌بینی مشخصات و الگوی جریان‌های چندفازی استفاده می‌کند.<sup>[۱۰]</sup>

مدل شان - چن در کنار این مزایا، محدودیت‌هایی نیز دارد که از آن جمله می‌توان به ایجاد سرعت‌های غیرفیزیکی در فصل مشترک بین فازهای مختلف سیال اشاره کرد. وجود این جریان‌های غیرفیزیکی سبب ایجاد ناپایداری حل عددی می‌شود و در نتیجه، مدل‌سازی جریان‌های چندفازی با گرادیان‌های شدید، مانند نسبت چگالی بالا، با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن استاندارد ممکن نیست.<sup>[۱۱]</sup> در روش شبکه‌ی بولتزمن استاندارد، از تابع برخورد باتانگار - گروس -

شبکه‌ی بولتزمن (LBM)،<sup>[۱]</sup> یکی از روش‌های کارآمد برای شبیه‌سازی و مطالعه‌ی جریان‌های سیالات شناخته شده است.<sup>[۱۲]</sup> این روش به علت دارا بودن ماهیت مرسوکوپیک و امکان پیش‌بینی دینامیک اندرکنش بین ذرات در سیالات، در تخمین مشخصات جریان‌های پیچیده، مانند جریان‌های چندفازی، توانمندتر از روش‌های ماکروسکوپیک مرسوم بر اساس حل معادلات ناویر - استوکس ظاهر شده است.<sup>[۲]</sup> برخلاف روش‌های ماکروسکوپیک، روش شبکه‌ی بولتزمن دینامیک مرز مشترک بین فازهای مختلف سیال را بدون نیاز به تعقیب یا تسخیر پیش‌بینی می‌کند. اعمال کشش سطحی در این روش با در نظر گرفتن نیروهای اندرکنش ذرات به صورت خودکار در حل عددی اعمال می‌شود و مانند معادلات ناویر - استوکس نیازمند تمهید خاصی برای اعمال آن نیست. سادگی تک‌معادله‌ی خطی روش شبکه‌ی بولتزمن در مقایسه با دستگاه معادلات غیرخطی ناویر - استوکس، موضعی بودن حل عددی معادله حاکم و سادگی توسعه‌ی الگوریتم‌های عددی با هزینه‌ی محاسباتی پایین بر اساس

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۷/۱۲/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۸/۳/۱۱، پذیرش ۱۳۹۸/۴/۱۶.

DOI:10.24200/J40.2019.52912.1505

کروک (BGK)<sup>[۱۲]</sup> استفاده می‌شود. این عملگر دارای زمان آرامش یکتا (SRT)<sup>۲</sup> است که در مقادیر پایین زمان آرامش، به دلیل وجود ناپایداری‌های ذکر شده، دچار واگرایی حل عددی می‌شود.<sup>[۱]</sup> یکی از روش‌های ارائه شده به منظور کنترل ناپایداری عددی در روش زمان آرامش یکتا، روش شبکه‌ی بولتزمن با عملگر برخورد دارای زمان آرامش چندگانه (MRT)<sup>۴</sup> است.<sup>[۱۳، ۱۴]</sup> این روش تابع برخورد را به صورت یک ماتریس اعمال می‌کند که کنترل موضعی مومنتوم و لزجت ممکن می‌سازد.<sup>[۱۵، ۱۶]</sup> در واقع، تابع برخورد با زمان آرامش چندگانه یک ماتریس انتقال از فضای چگالی توزیع ذرات به فضای مومنتومی است و زمان آرامش مختص به هر جهت سرعت در یک شبکه‌ی بولتزمن را به مومنتوم آنها اعمال می‌کند.

پژوهش‌های گسترده‌ی با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن با زمان آرامش چندگانه انجام شده است. مک کرکن و همکاران<sup>[۱]</sup> پایداری روش شبکه‌ی بولتزمن با عملگر برخورد MRT را مورد بررسی قرار داده و دریافته‌اند که این روش در مقایسه با روش استاندارد شبکه‌ی بولتزمن با تابع برخورد BGK در سیالات با لزجت کم‌تر بسیار پایدارتر است. پریمناث و آبرامز<sup>[۱۷]</sup> با استفاده از این روش به مدل‌سازی برخورد دو قطره پرداختند و نشان دادند که با استفاده از روش MRT و بدون افزایش ابعاد شبکه و تحمیل هزینه‌های محاسباتی بالا، می‌توان جریان‌های چندفازی با اعداد رینولدز بالاتری را شبیه‌سازی کرد. کازمین و همکاران<sup>[۱۸]</sup> مزیت‌های تابع برخورد با زمان آرامش یکتا و چندگانه در شبیه‌سازی اثرات موینگی و شکل‌گیری قطرات را بررسی کردند. ژاو و فان<sup>[۱۸]</sup> نیز نشان دادند که می‌توان با تنظیم مقادیر ماتریس زمان آرامش در روش MRT سرعت‌های غیرفیزیکی را تا حد زیادی کاهش داد.

یکی دیگر از محدودیت‌های روش شان - چن برای شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی، وابستگی غیرفیزیکی نسبت چگالی سیال مورد مطالعه به مقدار لزجت آن است. علت این مشکل، اعمال نیروی اندرکنش ذرات در میدان سرعت در روش شان - چن است که سبب تأثیر مستقیم مقدار زمان آرامش بر تغییر نسبت چگالی شده و این دو پارامتر فیزیکی را به هم وابسته می‌کند. این مشکل با استفاده از اعمال یک گسسته‌سازی عددی خاص با عنوان اعمال نیرو به روش اختلاف دقیق (EDM)<sup>۵</sup> حل شده است.<sup>[۱۹]</sup> در این روش، اعمال نیروی اندرکنش بین ذرات به صورت یک نیروی خارجی سبب استقلال نسبت چگالی از مقدار زمان آرامش شده و امکان شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی گاز - مایع در گستره وسیعی از اعداد بی بعد فراهم می‌شود. نتایج حاصل از این روش برای اعمال نیروی اندرکنش بین ذرات در جریان‌های چندفازی با استفاده از مدل شان - چن نشان می‌دهد که حل عددی پایداری بهتری در نسبت چگالی‌های بالا دارد<sup>[۲۰]</sup> و سبب استقلال نسبت چگالی میان دو فاز از مقدار زمان آرامش می‌شود.<sup>[۲۱]</sup> بر اساس بررسی‌های دقیق نویسندگان نوشتار حاضر در منابع و مراجع، ترکیب دو الگوریتم MRT و EDM برای بهبود کارایی روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی در مقایسه با روش SRT ارائه و ارزیابی نشده که در این تحقیق به آن پرداخته می‌شود. بنابراین، نوآوری نوشتار حاضر شامل بررسی دقت و کارایی مدل‌های برخورد SRT و MRT در کنار استفاده از اعمال نیروهای اندرکنش بین ذرات به دو روش جابه‌جایی سرعت و روش EDM در مطالعه‌ی جریان‌های چندفازی با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن است.

در تحقیق حاضر، یک الگوریتم عددی براساس روش شبکه‌ی بولتزمن و مدل شان - چن برای شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی توسعه داده شده است. با هدف عدم وابستگی نسبت چگالی جریان دوفازی به مقدار زمان آرامش و رفع محدودیت روش شان - چن استاندارد، از یک روش اعمال نیروی اختلاف دقیق استفاده شده

است. دقت و کارایی عملگر برخورد ذرات در روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی با دو زمان آرامش یکتا و چندگانه برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی گاز - مایع مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته و صحت و دقت الگوریتم عددی توسعه داده شده با شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی گاز - مایع در اعداد وبر و رینولدز مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. در بخش دوم مقاله، مابانی روش شبکه‌ی بولتزمن و روش چندفازی شان - چن ارائه شده، و عملگرهای برخورد SRT و MRT معرفی می‌شود. در بخش سوم، نتایج حاصل از حل حاضر ارائه شده و مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است. در نهایت، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری حاصل از تحقیق حاضر ارائه شده است.

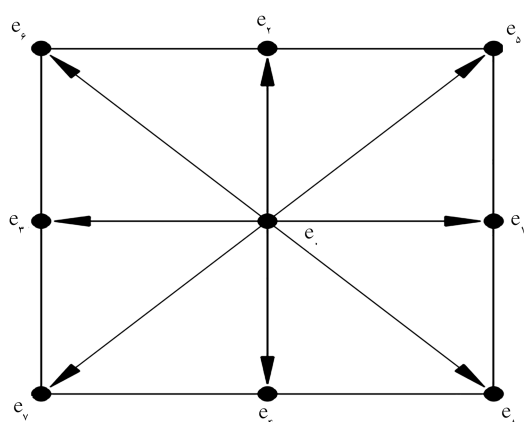
## ۲. معادلات حاکم

در روش شبکه‌ی بولتزمن به منظور تعیین حرکت سیال از یک تابع توزیع ذرات  $f_a(x, t)$  در فضای بردار سرعت میکروسکوپی  $e_a$  در مکان  $x$  و زمان  $t$  استفاده می‌شود. با استفاده از تابع برخورد با زمان آرامش یکتا و با تقریب BGK<sup>[۱۲]</sup> معادله‌ی حاکم با در نظر گرفتن نیروهای خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_a(x + ce_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau_\sigma} [f_a(x, t) - f_a^{eq}(x, t)] + F_B, \quad (۱)$$

که در آن  $c$  سرعت ذرات در مقیاس شبکه،  $\Delta x$  و  $\Delta t$  به ترتیب گام مکانی و زمانی،  $\tau_\sigma$  زمان آرامش بدون بعد و  $f_a^{eq}$  تابع توزیع تعادلی ماکسول بولتزمن در هریک از جهت‌های سرعت  $e_a$  است. سمت چپ معادله‌ی ۱ جمله‌ی پخش ذرات در میدان بوده و سمت راست معادله تابع برخورد ذرات است. عبارت  $F_B$  بیان‌گر نیروهای حجمی وارد بر میدان است که در صورت وجود نیروی خارجی، مانند گرانش، محاسبه می‌شود. بردار سرعت میکروسکوپی  $e_a$  بر اساس مدل سرعت تعیین شده و در مدل‌سازی‌های دوبعدی، معمولاً از شبکه‌ی  $D2Q9$  مانند شکل ۱ استفاده می‌شود. براساس شکل این شبکه،  $e_a$  چنین تعریف می‌شود:

$$e_a = \begin{cases} (0, 0) & i = 0 \\ c[\cos[(i-1)\frac{\pi}{4}], \sin[(i-1)\frac{\pi}{4}]] & i = 1 \sim 4 \\ \sqrt{2}c[\cos[(i-1)\frac{\pi}{4}], \sin[(i-1)\frac{\pi}{4}]] & i = 5 \sim 8 \end{cases}, \quad (۲)$$



شکل ۱. ساختار شبکه‌ی D2Q9 و جهت‌های سرعت.

اندازه  $|e_a|$  خواهد بود.<sup>[۱۰]</sup> در این صورت، می توان معادله ی ۹ را چنین تقریب زد:<sup>[۲۳]</sup>

$$F_{int} \cong -c_s g \psi \nabla \psi, \quad (۱۰)$$

مقدار ضریب  $g$  تعیین کننده ی تک فازی یا دوفازی بودن میدان است. جمله ی  $\nabla \psi^\sigma$  در راستای  $x$  و در شبکه ی  $D2Q9$  مطابق رابطه ی ۱۱ بسط داده می شود:

$$\frac{\partial \psi(i, j)}{\partial x} = c_1 [\psi(i+1, j) - \psi(i-1, j)] + c_2 \left[ \begin{array}{l} \psi(i+1, j+1) + \psi(i+1, j-1) \\ -\psi(i-1, j+1) - \psi(i-1, j-1) \end{array} \right], \quad (۱۱)$$

ضرایب  $c_0, c_1, c_2$  برای شبکه ی  $D2Q9$  به ترتیب ۶،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  است. در نهایت، رابطه ی ۱۰ چنین بازنویسی می شود:

$$F_{int} \cong -c_s g \psi(i, j) \frac{\partial \psi(i, j)}{\partial x} \quad (۱۲)$$

که در آن تابع  $\psi$  عبارت خواهد بود از:

$$\psi = \rho_s \left( 1 - \exp \left( \frac{-\rho}{\rho_s} \right) \right), \quad (۱۳)$$

که در آن  $\rho_s$  ضریب ثابتی است که معمولاً معادل ۱ در نظر گرفته شده و فشار ماکروسکوپی از رابطه ی ۱۴ محاسبه می شود:<sup>[۹۸]</sup>

$$P = c_s^2 \rho + \frac{g}{4} c_s^2 \psi^2 \quad (۱۴)$$

که در آن ضریب  $g$  اثر دما را به صورت رابطه  $T = \frac{1}{g}$  اعمال می کند. نیروی اندرکنش میان سیال و جامد نیز از رابطه ی ۱۵ محاسبه می شود:

$$F_{wall} = -g \psi(i, j) \psi_{wall} \left( \begin{array}{l} c_1 \sum_{a=1 \sim 4} s(x+e_a) + \\ c_2 \sum_{a=5 \sim 8} s(x+e_a) \end{array} \right), \quad (۱۵)$$

$$\psi_{wall} = \rho_s \left( 1 - \exp \left( \frac{-\rho_{wall}}{\rho_s} \right) \right), \quad (۱۶)$$

مشابه قبل،  $c_1$  و  $c_2$  به ترتیب برابر  $\frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{3}$  است.  $s(x+e_a)$  تابعی است که مقادیر آن بین ۱ و صفر تغییر می کند که به ترتیب تعیین کننده ی شرط عدم وجود یا وجود دیوار است. در رابطه ی ۱۶ با تعریف مقدار  $\rho_{wall}$  آب دوستی یا آبگریزی مرز جامد تعیین می شود. اگر چگالی  $\rho_{wall}$  نزدیک به چگالی فاز مایع تعیین شود، تابع اندرکنش مایع - جامد در رابطه ی ۱۵ یک نیروی ربایش میان سطح دیوار و قطره ایجاد کرده و مرز جامد آب دوست می شود. علت آن است که این تابع دیواره را مانند فیلمی از فاز مایع در نظر می گیرد. در مقابل، هر قدر  $\rho_{wall}$  به چگالی فاز گاز نزدیک تر شود، نیروی جدایش میان دو فاز بیشتر شده و سطح آبگریز می شود. در نهایت، مجموع نیروی اندرکنش میان فازهای سیال، نیروی اندرکنش میان سیال و سطح جامد و نیروی خارجی مطابق رابطه ی ۱۷ محاسبه می شود:

$$F_{total}^\sigma = F_{int} + F_{wall} + F_B \quad (۱۷)$$

تابع توزیع تعادلی  $f_a^{eq}$  بر اساس خواص ماکروسکوپی جریان و چنین محاسبه می شود:<sup>[۲۲]</sup>

$$f_a^{eq}(x, t) = w_a \rho \left[ 1 + \frac{e_a \cdot u^{eq}}{c_s^2} + \frac{(e_a \cdot u^{eq})^2}{2c_s^4} - \frac{u^{eq}{}^2}{2c_s^2} \right] \quad (۳)$$

معادله ی ۳ بسط مرتبه ی دوم تابع احتمال توزیع چگالی ماکسول - بولتزمن است<sup>[۱۲]</sup> که در آن،  $w_a$  تابع وزنی است و برای مدل  $D2Q9$  چنین تعریف می شود:

$$w_a = \begin{cases} 4/9 & a = 0 \\ 1/9 & a = 1 \sim 4 \\ 1/36 & a = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (۴)$$

مشخصات ماکروسکوپی جریان شامل چگالی  $\rho$  و سرعت  $u$  از روابط ۵ و ۶ به دست می آید:

$$\rho = \sum f_a, \quad (۵)$$

$$u = \frac{1}{\rho} \sum f_a u_a, \quad (۶)$$

لزجت در روش شبکه ی بولتزمن وابسته به زمان آرامش است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\nu = c_s^2 (\tau - 0.5 \Delta t), \quad (۷)$$

## ۱.۲. مدل چندفازی شان - چن

به منظور شبیه سازی اندرکنش میان چند فاز و یا چند جزء با استفاده از روش شان - چن، نیروهای اندرکنش بین ذرات محاسبه می شود. برای اعمال اندرکنش میان ذرات در یک جزء، شان و چن<sup>[۹۸]</sup> مدل ۸ را ارائه کرده اند:

$$V(X, X') = -G(X, X') \psi(X) \psi(X') (X' - X), \quad (۸)$$

که در آن  $G(X, X') = G(|X - X'|)$  تابع گرین و  $\psi(X)$  تابع جرم مؤثر است که در هر نقطه از میدان حل محاسبه می شود. در معادله ی ۸ میزان نیروی برخورد میان هر ذره با ذرات همسایه ی آن در شبکه ی بولتزمن محاسبه می شود. نیروی برخورد در واقع اثر میان جرم مؤثر در نقطه ی  $X$  و جرم مؤثر در همسایگی آن  $X'$  است. به دلیل آن که نیروی وارد بر همسایگی ذره در طول فرایند برخورد به صورت یک نیروی خارجی به آن اعمال می شود، بقای مومنتوم در محل هر ذره ارضاء نمی شود. اما روش شان - چن بقای مومنتوم در کل میدان حل را ارضاء می کند.<sup>[۸]</sup> برای محاسبه ی نیروی برخورد میان دو ذره در همسایگی یکدیگر، معادله ی نیروی برخورد عبارت است از:

$$F_{int} = -\psi(X) \times \sum_a G(|X - X'|) \psi(X') (X' - X), \quad (۹)$$

برای رعایت ایزوتروپی در شبکه ی بولتزمن، اگر تابع ضریب برخورد  $G(|X - X'|)$  تنها در جهات بردار  $e_a$  در نظر گرفته شود، مقدار این تابع به صورت یک تابع از

## ۲.۲. روش اعمال نیروی اختلاف دقیق

روش‌های مختلفی برای اعمال نیروی محاسبه شده در رابطه‌ی ۱۷ به معادله‌ی روش شبکه‌ی بولتزمن وجود دارد؛ در ادامه، روش مرسوم ارائه شده توسط شان - چن و روش بهبود یافته‌ی اختلاف دقیق بررسی شده است. روش شان - چن اصطلاحاً روش سرعت جابه‌جا شده<sup>۶</sup> نیز نامیده می‌شود. در این روش نیروی محاسبه شده در معادله‌ی ۱۷ مستقیماً در عبارت  $f_a^{eq}$  در سمت راست معادله‌ی ۱ اعمال می‌شود. در این روش مقدار سرعت محاسبه شده از رابطه‌ی ۶ با استفاده از این نیرو اصلاح می‌شود. به همین دلیل به آن روش سرعت جابه‌جا شده می‌گویند. مقدار سرعت جابه‌جا شده چنین محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{u}^{eq} = \mathbf{u} + \frac{\tau \Delta t F_{total}}{\rho} \quad (۱۸)$$

که در آن،  $\mathbf{u}$  سرعت محاسبه شده از رابطه‌ی ۶ است و  $\mathbf{u}^{eq}$  بعد از محاسبه، در رابطه‌ی ۳ جایگذاری می‌شود. مقدار سرعت واقعی میدان حل نیز از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_{real} = \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} F_{total} \Delta t \quad (۱۹)$$

چنان‌که اشاره شد، تغییرات مقادیر  $g$  در روش شان - چن استاندارد تأثیر مستقیم بر نسبت چگالی دارد. از سوی دیگر مقدار لزجت سیال بر مقدار  $\tau$  تأثیر می‌گذارد. بنابراین در صورتی که مقادیر لزجت تغییر پیدا کند مقدار نسبت چگالی در یک  $g$  مشخص ثابت نمی‌ماند. برای رفع این مشکل در اعمال نیروی  $F_{total}^{\sigma}$ ، در تحقیق حاضر از روش اختلاف دقیق استفاده شده که با اختصار SRT-EDM<sup>۷</sup> نشان داده می‌شود. در این روش رابطه‌ی ۱ چنین بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t) &= f_a(\mathbf{x}, t) \\ &- \frac{1}{\tau} [f_a(\mathbf{x}, t) - f_a^{eq}(\rho, \mathbf{u})] + f_a^{eq}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) \\ &- f_a^{eq}(\rho, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (۲۰)$$

که در آن سرعت  $\mathbf{u}$  در رابطه‌ی ۲۰، سرعت محاسبه شده از رابطه‌ی ۶ است و  $\Delta \mathbf{u}$  عبارت است از:

$$\Delta \mathbf{u} = F_{total} \Delta t / \rho \quad (۲۱)$$

چنان‌که مشاهده می‌شود، وابستگی مقادیر نیروی اندرکنش به مقدار  $\tau$  از بین رفته است. در نتیجه برخلاف روش استاندارد شان - چن، با تغییر مقدار  $\tau$  نسبت چگالی میان دو جزء تقریباً ثابت می‌ماند. در  $\tau = ۱$  دو روش شان - چن و اختلاف دقیق با یکدیگر تفاوتی نخواهند داشت.

## ۳.۲. عملکرد برخورد با زمان آرامش چندگانه

در رابطه‌ی ۱، معادله‌ی روش شبکه‌ی بولتزمن استاندارد با عملکرد برخورد دارای زمان آرامش یکتا ارائه شد که در نوشتار حاضر برای حل جریان‌های چندفازی با مدل شان - چن با اختصار SRT-SCM<sup>۸</sup> نشان داده می‌شود. یکی از محدودیت‌های این شکل استاندارد، عدم توانایی آن در شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی با اعداد

رینولدز و ویر بالاست. به همین دلیل، در تحقیق حاضر از روش شبکه‌ی بولتزمن با زمان آرامش چندگانه استفاده شده است. در این روش رابطه‌ی ۲۰ چنین بازنویسی می‌شود:<sup>[۱۳]</sup>

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{x} + c\mathbf{e}_a \Delta t, t + \Delta t) &= \mathbf{M}^{-1}(m_a(\mathbf{x}, t) - \\ &\mathbf{S}[m_a(\mathbf{x}, t) - m_a^{eq}(\rho, \mathbf{u}^{eq})] + m_a^{eq}(\rho, \mathbf{u}^{eq} + \Delta \mathbf{u}) \\ &- m_a^{eq}(\rho, \mathbf{u}^{eq})), \end{aligned} \quad (۲۲)$$

که نشان‌گر روش شبکه‌ی بولتزمن با زمان آرامش چندگانه و اعمال نیرو به روش اختلاف دقیق<sup>۹</sup> است. در این رابطه،  $\mathbf{M}$  ماتریس انتقال،  $m$  و  $m^{eq}$  توابع توزیع و  $\mathbf{S}$  ماتریس زمان آرامش است. با استفاده از ماتریس انتقال  $\mathbf{M}$  تابع توزیع ذرات،  $f_a(\mathbf{x}, t)$  و تابع توزیع تعادلی بولتزمن،  $f_a^{eq}(\mathbf{x}, t)$  به صورت  $m = \mathbf{M}f$  و  $m^{eq} = \mathbf{M}f^{eq}$  به فضای مومنومی منتقل می‌شوند. روش محاسبه‌ی ماتریس‌های  $m^{eq}$  و  $\mathbf{S}$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} m^{eq} &= \rho(1, -2 + 3(u_x^x + u_y^y), 1, \\ &-3(u_x^x + u_y^y), u_x, -u_x, u_y, -u_y, u_x^x - u_y^y, u_x u_y)^T, \end{aligned} \quad (۲۳)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}(\tau_\rho^{-1}, \tau_e^{-1}, \tau_\varepsilon^{-1}, \tau_j^{-1}, \tau_q^{-1}, \tau_j^{-1}, \tau_q^{-1}, \tau_\nu^{-1}, \tau_\nu^{-1}) \quad (۲۴)$$

همچنین تعریف ماتریس  $\mathbf{M}$  عبارت است از:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

در نوشتار حاضر، روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی با زمان آرامش چندگانه و اعمال نیروی شان - چن به روش اختلاف دقیق با اختصار MRT-EDM نشان داده می‌شود. کارایی و دقت این روش در مقایسه با SRT-SCM و SRT-EDM مورد بررسی و ارزیابی قرار خواهد گرفت.

## ۳. نتایج عددی

در این بخش نتایج حاصل از الگوریتم توسعه یافته برای بررسی کارایی روش شبکه‌ی بولتزمن با عملکردهای برخورد مختلف ارائه شده و صحت و دقت نتایج برای جریان‌های دوفازی گاز - مایع بررسی و ارزیابی شده است.

### ۱.۳. شبیه‌سازی یک قطره در حالت تعادل

به منظور بررسی صحت مدل توسعه یافته، حالت تعادل یک قطره در محیطی با فاز گاز در یک میدان حل متناوب شبیه‌سازی شده است. طبق قانون لاپلاس<sup>[۱۴]</sup> بعد از

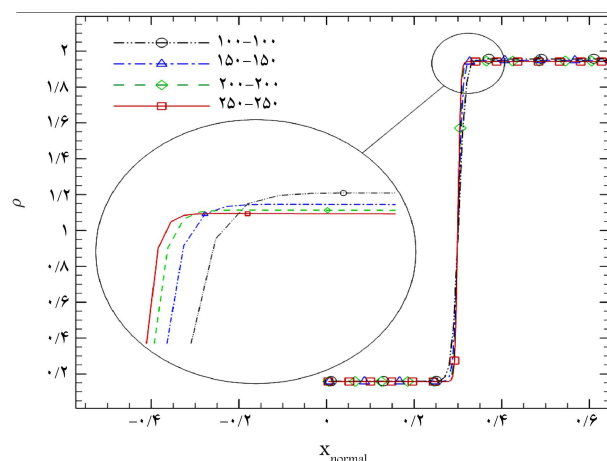
روش SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM به ترتیب معادل  $0.05923$ ،  $0.06442$  و  $0.06292$  به دست آمده است.

چنانکه پیش‌تر اشاره شد، روش شبکه‌ای بولتزمن با سه تابع برخورد SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM که به ترتیب در رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ بیان شده، در استقلال نسبت چگالی از عدد زمان آرامش و بازه‌داری حل عددی تفاوت دارند. در روش SRT-SCM، مقدار زمان آرامش در جمله دوم سمت راست رابطه ۱ اعمال می‌شود. از سوی دیگر نیروی جدایش فاز به دست آمده از روش شان - چن در  $f^{eq}$ ، در همان عبارت سمت راست اعمال می‌شود. در نتیجه تغییر در مقدار زمان آرامش مشابه تغییر در مقدار و اثر این نیرو عمل می‌کند. در روش اعمال نیروی اختلاف دقیق نیروی جدایش فاز به دست آمده از روش شان - چن به صورت یک نیروی خارجی به مرز میان دو فاز اعمال می‌شود. در نتیجه مقدار زمان آرامش مستقیماً در مقدار نیروی جدایش فاز تأثیری ندارد و نسبت چگالی تقریباً ثابت می‌ماند. به صورت مشابه در رابطه ۲ نیز با وجود آن که تمام نیروها در فضای مومنتومی بر یکدیگر اثر می‌گذارند، ماتریس زمان آرامش بر نیروی جدایش فاز تأثیر ندارد. در شکل ۴ نتایج شبیه‌سازی برای یک قطره در حال تعادل با شعاع ۳۵ در یک شبکه  $200 \times 200$  با  $g = -5$  برای زمان‌های آرامش مختلف انجام شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که در هر دو روش SRT-EDM و MRT-EDM با تغییر زمان آرامش (تغییر لزجت)، نسبت چگالی تقریباً ثابت مانده است. در حالی که وابستگی این دو پارامتر فیزیکی در روش SRT-SCM کاملاً مشهود است. علاوه بر آن، با استفاده از روش اختلاف دقیق در اعمال نیروی برهم‌کنش بین دو فاز مایع و گاز در فصل مشترک، محدوده‌ی پایداری حل عددی بهبود یافته است. به طوری که زمان آرامش کمینه برای سه روش SRT-EDM، SRT-SCM و MRT-EDM به ترتیب معادل  $0.06$ ،  $0.0515$  و  $0.0500$  به دست آمده که نشان‌دهنده‌ی پایداری بهتر روش MRT-EDM است. به نظر می‌رسد افزایش پایداری حل و به دنبال آن افزایش بازه زمان آرامش با کاهش مقدار سرعت‌های غیرفیزیکی رابطه‌ی مستقیم دارد. در شکل ۵، بردارهای سرعت در مجاورت مرز مشترک میان فاز مایع و گاز برای هر سه تابع برخورد مشاهده می‌شود. با استفاده از تابع برخورد MRT-EDM، بردارهای سرعت منظم‌ترند و مقدار کم‌تری دارند. سرعت بیشینه‌ی غیرفیزیکی برای سه روش SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM اعمال شده در نوشتار حاضر در زمان آرامش  $0.06$  به ترتیب برابر  $0.0663$ ،  $0.0177$  و  $0.0078$  به دست آمده که در روش آخر کاهش قابل ملاحظه‌ی نشان می‌دهد. تحقیقات زیادی برای

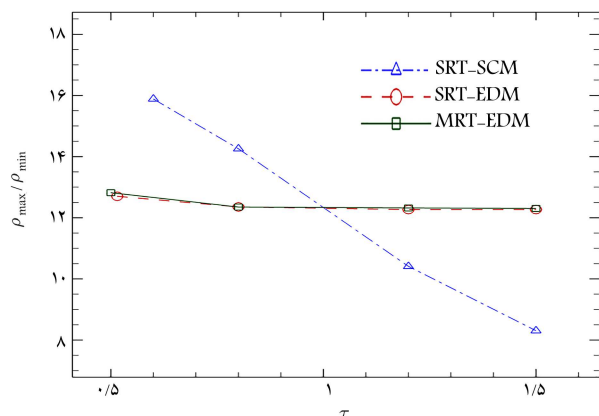
رسیدن قطره به حالت تعادل، کشش سطحی قطره سبب ایجاد اختلاف فشار بین درون و بیرون قطره می‌شود که مقدار آن چنین محاسبه می‌شود:

$$\Delta p = p_{in} - p_{out} = \frac{\sigma}{R} \quad (26)$$

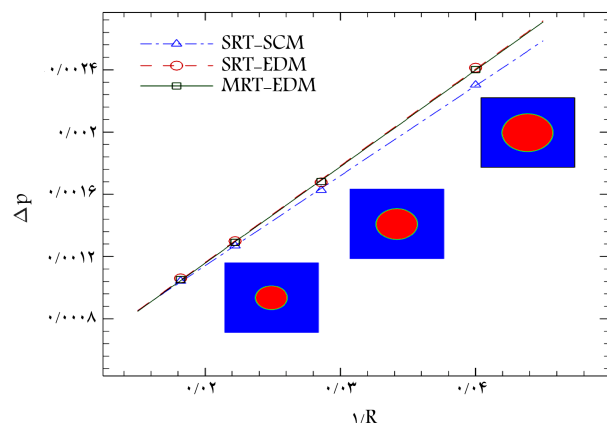
در این رابطه،  $\sigma$  کشش سطحی قطره،  $R$  شعاع قطره و  $\Delta p$  اختلاف فشار بین داخل و بیرون قطره است. برای اطمینان از عدم وابستگی حل عددی به اندازه‌ی شبکه، ابتدا شبیه‌سازی عددی با استفاده از چند شبکه‌ی مختلف انجام شده است. نتایج به دست آمده برای پروفیل چگالی در خط مرکزی میدان حل دوبعدی در شکل ۲ نشان داده شده است. چنانکه مشاهده می‌شود، در نتایج به دست آمده با استفاده از دو شبکه‌ی  $200 \times 200$  و  $250 \times 250$ ، چگالی بیشینه و شعاع قطره تقریباً یکسان است. در نتیجه، شبکه با اندازه‌ی  $200 \times 200$  به عنوان شبکه‌ی مناسب برای این مسئله‌ی دوفازی انتخاب شده است. نتایج بررسی قانون لاپلاس برای شعاع‌های مختلف قطره در شکل ۳ ارائه شده است. در این مطالعه، از سه روش SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM برای شبیه‌سازی تعادل قطره در میدان حل دوفازی متناوب استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که هر سه روش به خوبی از قانون لاپلاس تبعیت می‌کنند و این مؤید صحت و دقت الگوریتم‌های توسعه یافته بر اساس روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی در نوشتار حاضر است. در حل حاضر، مقدار کشش سطحی در  $g = -5$  برای سه



شکل ۲. مقایسه‌ی دقت شبکه‌های مختلف در شبیه‌سازی یک قطره در یک میدان متناوب.



شکل ۴. بررسی وابستگی مقدار زمان آرامش با نسبت چگالی برای سه روش SRT-EDM، SRT-SCM و MRT-EDM.



شکل ۳. بررسی قانون لاپلاس در هر سه روش SRT-EDM، SRT-SCM و MRT-EDM.



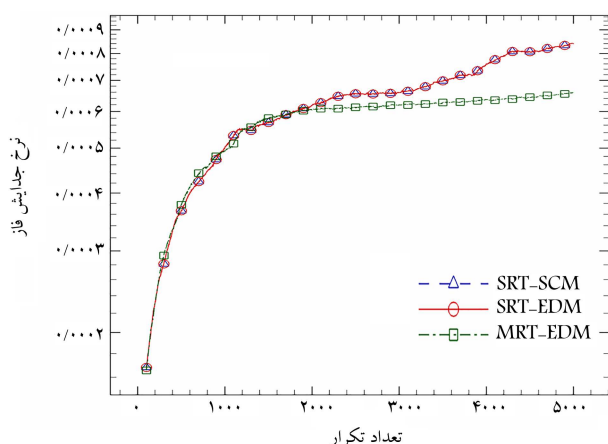
کاهش این سرعت‌های غیرفیزیکی در ناحیه‌ی فصل مشترک انجام شده [۲۵-۲۷] و همچنان این تحقیقات ادامه دارد.

### ۲.۳. شبیه‌سازی جدایش فازها در یک سیستم بخار - مایع

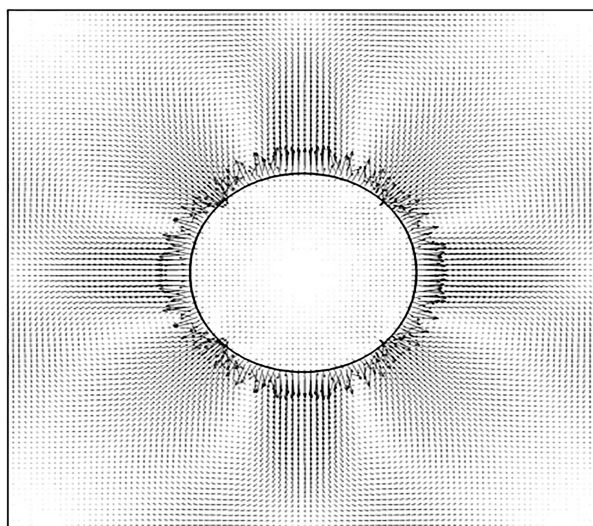
هنگامی که دمای یک سیستم همگن دارای بخار اشباع به کم‌تر از دمای بحرانی برسد، فاز بخار ناپایدار شده و به آرامی بخش‌هایی از آن چگالیده می‌شود. چگالش بخار حول هسته‌هایی از قطرات بسیار ریز معلق در بخار انجام می‌شود و قطرات قابل مشاهده را تشکیل می‌دهد؛ این قطرات به نوبه خود به هم می‌پیوندند و قطرات بزرگ‌تری را تشکیل می‌دهند. این فرایند تا جایی ادامه می‌یابد که غلظت هر دو فاز بخار و مایع موجود در سیستم در شرایط دمایی جدید به تعادل برسد. برای توضیح این فرایند از دیدگاه ترمودینامیکی، می‌توان گفت که با کاهش دما در یک فرایند حجم ثابت، انرژی جنبشی مولکول‌ها کاهش می‌یابد و نیروهای بین مولکولی در میدان غالب می‌شوند که سبب به هم پیوستن و تشکیل قطرات می‌شود. [۲۷] این پدیده‌ی فیزیکی در طبیعت برای تشکیل قطرات باران و در صنایع دارای سیستم‌های حرارتی به‌وفور اتفاق می‌افتد. شبیه‌سازی عددی این پدیده‌ی پیچیده‌ی فیزیکی با استفاده از روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی دشوار است، اما روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی به خوبی توانایی پیش‌بینی فرایند تشکیل قطرات حاصل از جدایش فازها را دارد.

در این بخش، توان‌مندی الگوریتم توسعه یافته براساس روش شبکه‌ی بولتزمن با سه عملکرد SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM برای شبیه‌سازی و مطالعه‌ی فرایند جدایش فازها در یک سیستم دوفازی بخار - مایع مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است. به این منظور، یک میدان حل متناوب با استفاده از شبکه‌ی  $200 \times 200$  گسسته‌سازی شده است. شرایط اولیه‌ی میدان حل شامل توزیع تصادفی قطرات بسیار ریز (هسته‌های اولیه) در بخار اشباع مایع در نظر گرفته شده که با استفاده از تابع تصادفی بین مقادیر  $1/94$  و  $1/15$  محاسبه شده است. نسبت چگالی بین بخار و مایع در این مطالعه برابر  $12/93$  در نظر گرفته شده و سیستم در  $g = -5$  مطالعه شده است.

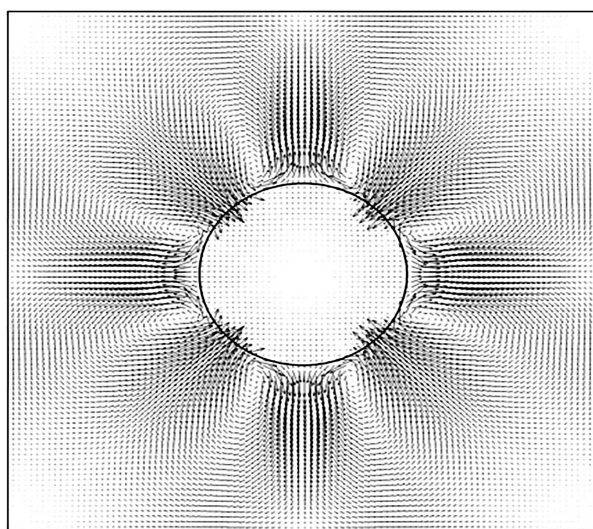
در شکل ۶ نمودار نرخ جدایش فازها براساس تعداد تکرارهای حل عددی نشان داده شده است. نرخ تغییرات نشان می‌دهد که با آغاز شبیه‌سازی، قطرات ریزتر با سرعت زیاد به یکدیگر می‌پیوندند. با بزرگ‌تر شدن قطرات نرخ جدایش فاز



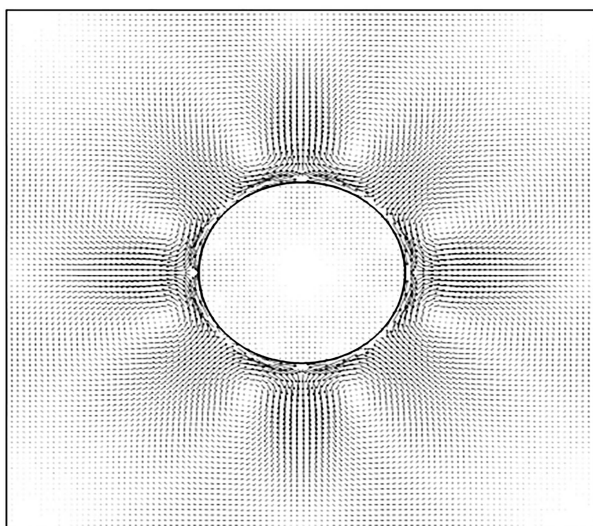
شکل ۶. مقایسه‌ی نرخ جدایش فازها براساس تعداد تکرار برای یک سیستم دوفازی بخار - مایع حاصل از سه روش SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM.



SRT-SCM

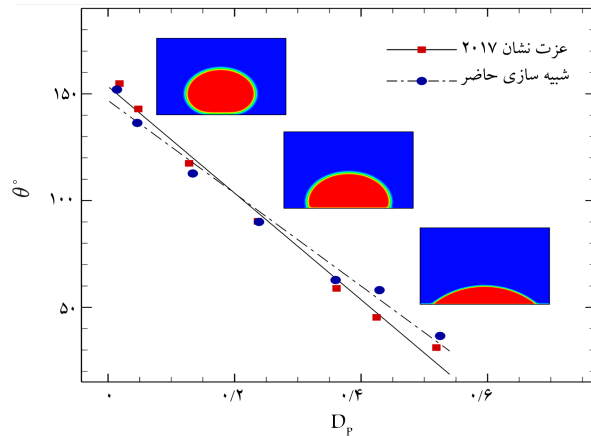


SRT-EDM



MRT-EDM

شکل ۵. بردارهای سرعت غیرفیزیکی حول یک قطره در حالت تعادل حاصل از سه روش SRT-SCM، SRT-EDM و MRT-EDM.



شکل ۸. مقایسه‌ی زاویه‌ی تماس براساس چگالی نرمال برای یک قطره روی دیواره‌ی حاصل از حل حاضر با نتایج مطالعات پیشین.<sup>[۲۸]</sup>

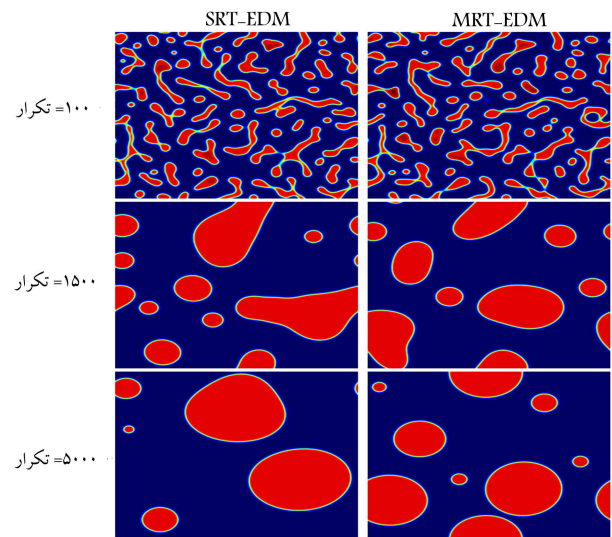
در این حالت زاویه‌ی تماسی بین قطره با سطح جامد شکل می‌گیرد که مقدار آن به مشخصات سطح، مانند آب‌دوستی یا آب‌گریزی آن بستگی دارد. پیش‌بینی مقدار این زاویه‌ی تماس با استفاده از نتایج حاصل از الگوریتم عددی حاضر آزمون خوبی برای بررسی توان‌مندی و دقت آن است. به این منظور، یک میدان حل دوبعدی با اندازه شبکه‌ی  $200 \times 200$  در نظر گرفته شده که مرزهای چپ و راست آن متناوب و مرزهای بالا و پایین آن دیواره است. یک قطره با نسبت چگالی  $12.93$  در  $g = -5$  روی دیواره‌ی پایین قرار گرفته است. سپس، با در نظر گرفتن شرایط مختلف آب‌دوستی و آب‌گریزی برای دیواره‌ها، مقدار زاویه‌ی تماس اندازه‌گیری و مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این مطالعه، پارامتری بعد چگالی نرمال  $D_\rho$  براساس چگالی دیوار  $\rho_{wall}$ ، چگالی فاز گاز  $\rho_v$  و چگالی فاز مایع  $\rho_l$  چنین تعریف شده است:

$$D_\rho = \frac{\rho_{wall} - \rho_v}{\rho_l - \rho_v} \quad (27)$$

که در آن با تعریف مقدار  $\rho_{wall}$  آب‌دوستی یا آب‌گریزی مرز جامد تعیین می‌شود. اگر چگالی  $\rho_{wall}$  نزدیک به چگالی فاز مایع تعیین شود، مرز جامد آب‌دوست و اگر به چگالی فاز گاز نزدیک‌تر شود، سطح آب‌گریز می‌شود.

در شکل ۸، مقایسه‌ی مقادیر زاویه‌ی تماس بر اساس چگالی نرمال برای یک قطره‌ی روی دیواره حاصل از حل حاضر با استفاده از روش MRT-EDM را با نتایج ارائه شده از مطالعات پیشین<sup>[۲۸]</sup> نشان می‌دهد. چنانکه مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی نرمال دیواره، سطح خاصیت آب‌دوستی به خود گرفته و زاویه‌ی تماس بین قطره و سطح جامد کاهش یافته است. نتایج حاصل از حل حاضر نشان‌دهنده‌ی تغییرات خطی مقدار زاویه‌ی تماس بر اساس چگالی نرمال است که با نتایج گزارش شده در مطالعات مختلف<sup>[۲۷-۲۹]</sup> مطابقت دارد.

به منظور بررسی تأثیر روش EDM بر مقدار زاویه‌ی تماس در مقایسه با روش استاندارد جابه‌جایی سرعت، شبیه‌سازی قطره روی دیواره با استفاده از دو روش اعمال نیرو SRT-EDM و SRT-SCM در دو زاویه‌ی تماس  $90^\circ$  و  $149^\circ$  درجه انجام شده است. شرایط اولیه مانند حالت قبل در نسبت چگالی  $12.93$  و  $g = -5$  اعمال شده و برای میدان حل یک شبکه‌ی  $200 \times 200$  در نظر گرفته شده است. در شکل ۹ نتایج این مطالعه به ازای زمان آرامش  $\tau = 1$  نشان داده شده است. چنانکه در این شکل مشاهده می‌شود، در زمان آرامش  $\tau = 1$ ، نحوه‌ی اعمال نیروی اندرکنش بین فازها در معادله‌ی روش شبکه‌ی بولتزمن تأثیری بر دقت نتایج حل عددی ندارد. ولی چنانکه قبلاً نیز به آن اشاره شد، با کاهش مقدار زمان آرامش، حل



شکل ۷. مقایسه‌ی خطوط هم‌تراز چگالی جدایش فازها در یک سیستم دوفازی بخار-مایع حاصل از دو روش SRT-EDM و MRT-EDM.

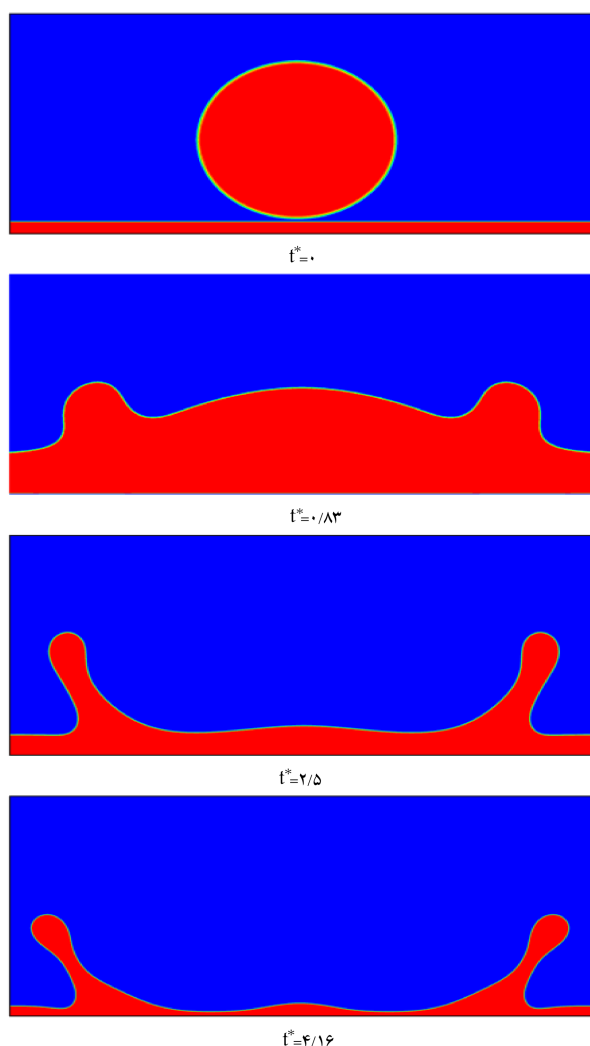
و به هم پیوستن قطرات کاهش می‌یابد. علت این رویداد آن است که قطرات ریزتر ناپایدارترند و تمایل بیشتری به پیوستن به سایر قطرات دارند. با گذشت زمان و تشکیل قطرات بزرگ‌تر و نیز با نزدیک شدن سیستم به حالت تعادل در شرایط جدید، نرخ جدایش فازها روند کاهشی به خود می‌گیرد. چنانکه در این شکل مشهود است، منحنی حاصل از دو روش SRT-EDM و SRT-SCM بر هم منطبق‌اند، اما نتایج روش MRT-EDM در تکرارهای آخر مقادیر متفاوتی را برای نرخ جدایش پیش‌بینی کرده است. علت آن را می‌توان در پایداری بیشتر این روش در شبیه‌سازی قطرات کوچک‌تر جست‌وجو کرد که سبب تولید سرعت‌های غیرفیزیکی کم‌تر شده و نرخ جدایش را با دقت بهتری پیش‌بینی می‌کند.

در شکل ۷ مقایسه‌ی خطوط هم‌تراز چگالی حاصل از دو روش SRT-EDM و MRT-EDM را برای جدایش فازها و تشکیل قطرات در سیستم مورد مطالعه نشان می‌دهد. چنانکه مشاهده می‌شود به دلیل تفاوت این دو روش در پیش‌بینی مقادیر سرعت‌های غیرفیزیکی در فصل مشترک دو فاز مایع و بخار، دینامیک به هم پیوستن قطرات حاصل از آنها در این شکل متفاوت است. در زمان  $t = 5000$ ، قطرات حاصل از روش MRT-EDM تقریباً شکل دایروی به خود گرفته که نشانه‌ی رسیدن سیستم به حالت تعادل است. در همین زمان، قطرات حاصل از شبیه‌سازی به روش SRT-EDM همچنان دینامیک پویایی دارند که این نتایج مؤید منحنی افزایشی نرخ جدایش این روش در شکل ۶ است.

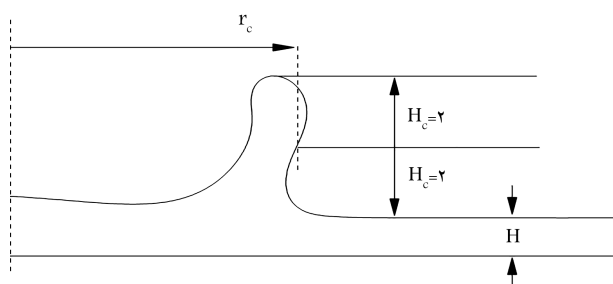
### ۳.۳. شبیه‌سازی زاویه‌ی تماس یک قطره با دیواره

مسئله‌های شبیه‌سازی شده در دو بخش قبل در میدان حل با مرزهای متناوب انجام شد. اعمال مرز دیواره برای جریان‌های چندفازی نیازمند در نظر گرفتن اندرکنش میان فازهای مختلف سیال با مرز جامد است. در الگوریتم حاضر براساس روش شبکه‌ی بولتزمن، این اندرکنش با محاسبه‌ی نیروی  $f_{wall}$  در رابطه‌ی ۱۵ در نظر گرفته شده و شرط عدم لغزش روی دیواره‌ی جامد نیز با استفاده از شرط مرزی بازگشتی<sup>۱۰</sup> اعمال شده است.

در این بخش، صحت و دقت اعمال شرط مرزی جامد با شبیه‌سازی تعادل یک قطره روی یک سطح صاف مورد بررسی قرار گرفته است. از دیدگاه فیزیکی،



شکل ۱۰. خطوط هم‌تراز چگالی برای دینامیک برخورد قطره به فیلم مایع در عدد وبر ۳۳۳/۶۲ و رینولدز ۲۱۶.

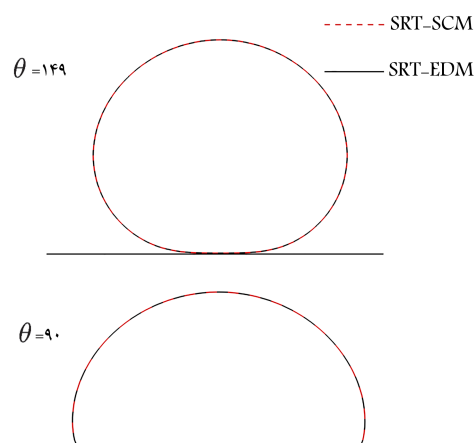


شکل ۱۱. پارامترهای هندسی بعد از برخورد قطره به فیلم مایع.

چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{r_c}{D} = 1.29(t^*)^{0.5} \quad (30)$$

که در آن شعاع بی‌بعد تاج و  $r_c$  به‌صورت فاصله‌ی نصف ارتفاع عمودی تاج با مرکز برخورد تعریف می‌شود. زمان بی‌بعد دینامیک برخورد به‌صورت  $t^* = \frac{t v}{D}$  تعریف شده است. منحنی این رابطه‌ی تحلیلی به‌خوبی با نتایج تجربی مطابقت



شکل ۹. مقایسه‌ی نتایج شکل یک قطره روی سطح با استفاده از دو روش SRT-EDM و SRT-SCM در زمان آرامش.

عددی حاصل از روش جابه‌جایی سرعت ناپایدار می‌شود، در حالی که با استفاده از روش EDM، امکان شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی در این شرایط فراهم است.

### ۴.۳. شبیه‌سازی برخورد یک قطره به دیواره

بعد از اطمینان از صحت و دقت اعمال شرط مرزی دیواره در الگوریتم توسعه یافته بر اساس روش شبکه‌ی بولتزمن، مسئله‌ی فیزیکی و پرکاربرد برخورد قطره به یک دیواره‌ی پوشیده شده با فیلمی از مایع شبیه‌سازی شده است. به این منظور، یک میدان حل دوبعدی با دقت شبکه‌ی  $400 \times 1200$  در نظر گرفته شده که شرط مرزی بازگشتی برای دیواره‌ی بالا و پایین و شرط مرزی متناوب برای دیواره‌ی سمت چپ و راست آن اعمال شده است.

ابتدا، صحت الگوریتم عددی حاضر برای شبیه‌سازی برخورد قطره به فیلم مایع روی دیواره با استفاده از روش MRT-EDM مورد بررسی قرار گرفته است. یک قطره به قطر  $D = 120$  در داخل میدان حل و نزدیک فیلم مایع روی دیواره‌ی پایین قرار داده شده، به طوری که ضخامت بی‌بعد فیلم مایع برابر  $H^* = \frac{H}{D} = 0.25$  است. نسبت چگالی بین دو فاز گاز و مایع در این مسئله برابر  $12/93$ ، کشش سطحی  $\sigma = 0.06292$  و لزجت سینماتیک سیال  $\nu = 0.1667$  در نظر گرفته شده است. سرعت قطره به سمت فیلم مایع در لحظه‌ی برخورد برابر  $V = 0.3$  مقداردهی شده که با در نظر گرفتن تعریف‌های اعداد بی‌بعد وبر و رینولدز مطابق رابطه‌های ۲۸ و ۲۹، مقادیر آنها به ترتیب برابر  $333/62$  و  $216$  به دست می‌آید:

$$We = \frac{\rho_l v^2 d}{\sigma} \quad (28)$$

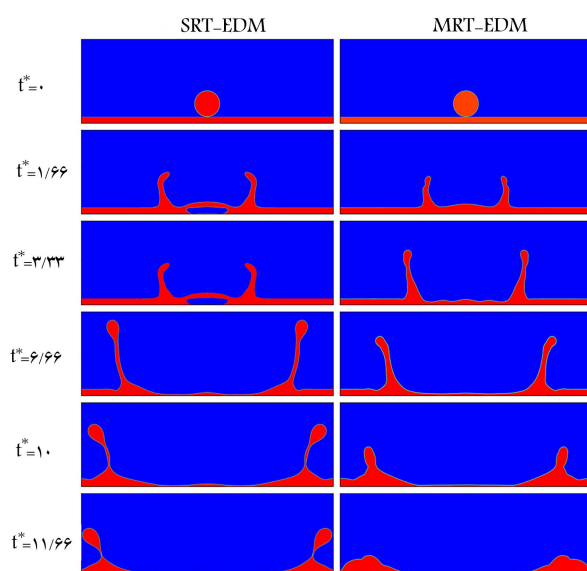
$$Re = \frac{v d}{\nu} \quad (29)$$

چنان‌که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، پس از برخورد قطره با سطح فیلم مایع روی دیواره، سیال از دو طرف محل برخورد شروع به بالا آمدن می‌کند که اصطلاحاً به آنها تاج گفته می‌شود. در ابتدای فرایند برخورد، قطر، ارتفاع و شعاع تاج‌ها افزایش می‌یابد. با گذشت زمان و به دلیل وجود کشش سطحی، تاج‌ها جمع شده و به فیلم مایع می‌پیوندند. در اعداد وبر و رینولدز بالا، احتمال جدا شدن دو قطره‌ی ایجاد شده در دو سر تاج از آنها وجود دارد. افزایش شعاع تاج‌ها از یک منحنی توانی تبعیت می‌کند که بر اساس پارامترهای هندسی دینامیک بعد از برخورد (شکل ۱۱)،



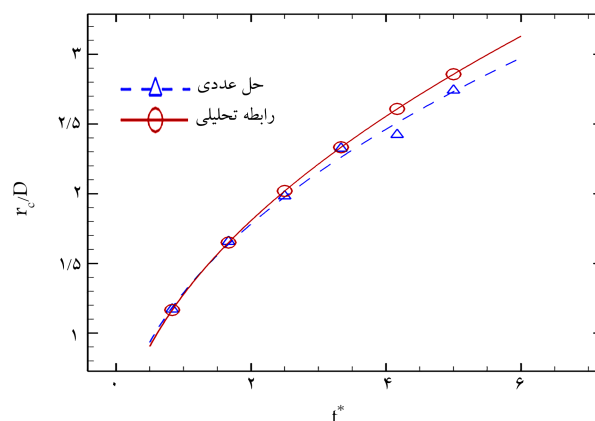
جدول ۱. مقایسه‌ی مقادیر اعداد وبر و رینولدز در دو تابع برخورد SRT-EDM و MRT-EDM.

SRT - EDM			MRT - EDM		
سرعت	وبر	لرزش	رینولدز	لرزش	رینولدز
۰٫۱	۱۹	۰٫۰۳۳	۱۸۰	$3/3 \times 10^{-6}$	$5/4 \times 10^6$
۰٫۲	۷۵	۰٫۰۶۶	۱۸۱	۰٫۰۰۳۳	۵۴۵۴
۰٫۳	۱۶۷	۰٫۱	۱۸۰	۰٫۰۰۶۶	۲۷۲۷
۰٫۴	۲۹۷	۰٫۱۶	۱۵۰	۰٫۰۳۳	۷۲۰



شکل ۱۳. مقایسه برخورد قطره به سطح با فیلم مایع با دو عملکرد MRT-EDM و SRT-EDM در عدد وبر ۱۴۸ و عدد رینولدز ۷۲۷۲/۷۲ در روش MRT-EDM و ۳۶۳/۶۳ در روش SRT-EDM.

در شکل ۱۳ نتایج حاصل از حل حاضر با دو روش SRT-EDM و MRT-EDM برای فرایند برخورد یک قطره به فیلم مایع نشان داده شده است. در این مطالعه، دقت شبکه برابر  $400 \times 1200$ ، قطر قطره  $D = 120$  و ضخامت فیلم مایع  $H = 30$  واحد در مقیاس شبکه در نظر گرفته شده است. سرعت برخورد قطره برابر  $V = 0.2$  مقداردهی شده که براساس آن، عدد وبر (رینولدز) برای دو روش SRT-EDM و MRT-EDM به ترتیب  $(363/63)$  و  $(7272/72)$  و  $148/27$  است. به دلیل عدد رینولدز پایین (مقدار لرزش بالا) در شبیه‌سازی به روش SRT-EDM، فیلم مایع انرژی جنبشی قطره را کم‌تر مضمحل می‌کند. در نتیجه، فیلم مایع در محل برخورد قطره به دو قسمت تقسیم شده و از سطح جدا می‌شود. اما در شبیه‌سازی به روش MRT-EDM که عدد رینولدز بالاست (لرزش کم‌تر است)، انرژی جنبشی قطره بعد از برخورد توسط فیلم مایع با تشکیل موج‌ها روی لایه‌ی سطحی مضمحل می‌شود. بنابراین، حالت پاشش قطره بعد از برخورد برای این شبیه‌سازی دیده نمی‌شود. در شکل ۱۳ کاملاً مشهود است که ارتفاع تاج‌ها در روش MRT-EDM به دلیل بالاتر بودن رینولدز و اضمحلال انرژی جنبشی قطره کم‌تر است. نتایج ارائه شده در این شکل تا زمان بی‌بعد  $5/83$  گزارش شده که مدت زمان شبیه‌سازی با استفاده از دو روش SRT-EDM و MRT-EDM به ترتیب برابر  $356/41$  و  $412/41$



شکل ۱۲. مقایسه‌ی منحنی تغییرات زمانی شعاع بی‌بعد تاج حاصل از حل عددی حاضر با رابطه‌ی تحلیلی.

دارد. [۳۲] با تعریف  $D = 120$  و  $H = 30$  منحنی توانی زیر به دست می‌آید: [۳۲]

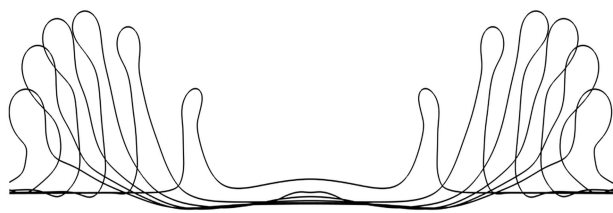
$$\frac{r_c}{D} = \left( \frac{2D}{3H} \right)^{1/5} (t^*)^{0.5} \quad (31)$$

و در نتیجه برای پارامترهای هندسی حل حاضر، رابطه‌ی تحلیلی مطابق معادله‌ی ۳۲ محاسبه می‌شود:

$$\frac{r_c}{D} = 1.27778 (t^*)^{0.5} \quad (32)$$

در شکل ۱۲ مقایسه‌ی منحنی حاصل از حل تحلیلی و شبیه‌سازی عددی حاضر برای تغییرات زمانی شعاع بی‌بعد تاج نشان داده شده است. در چهارگام زمانی اولیه، حل حاضر با دقت بسیار خوبی بر نتایج تحلیلی منطبق است. در ادامه، مشاهده می‌شود که مقدار پیش‌بینی شده برای  $\frac{r_c}{D}$  حاصل از شبیه‌سازی عددی با حل تحلیلی اندکی اختلاف دارد. علت این اختلاف را می‌توان ناشی از غالب بودن نیروی اینرسی وارد شده به سیال نسبت به نیروی‌های مختلف - مانند کشش سطحی و جاذبه - در مراحل اولیه‌ی برخورد و رفتار سیال تابع آن دانست. در نتیجه نتایج شبیه‌سازی با حل تحلیلی که به نوعی مستقل از آثار کشش سطحی است، مطابقت خوبی نشان می‌دهد. اما با گذشت زمان، اثر اینرسی در دینامیک تاج تشکیل شده کاهش یافته و تأثیر نیروهای کشش سطحی و جاذبه غالب می‌شود. این نیروها تاج‌های تشکیل شده را به سمت فیلم مایع جذب کرده و از افزایش شعاع و ارتفاع آن جلوگیری می‌کند. در این شبیه‌سازی از اثر نیروی جاذبه صرف‌نظر شده است.

کارایی و پایداری دو روش SRT-EDM و MRT-EDM برای شبیه‌سازی مسئله‌ی دوفازی برخورد قطره به فیلم مایع برای دست‌یابی به اعداد وبر و رینولدز بالاتر مورد ارزیابی قرار گرفته است. در این مطالعه، قطر قطره برابر  $D = 60$  در نظر گرفته شده که با سرعت‌های مختلف به فیلم مایع به ارتفاع  $H = 15$  واحد در مقیاس شبکه برخورد می‌کند. میدان حل با دقت شبکه‌ی  $200 \times 200$  گسسته شده و سیال دوفازی در  $g = -5$  و نسبت چگالی  $12/93$  مطالعه شده است. در جدول ۱ نتایج حاصل از حل عددی حاضر برای دو روش مورد مطالعه مشاهده می‌شود؛ براین اساس، به ازای یک عدد وبر مشخص، روش MRT-EDM قابلیت شبیه‌سازی برخورد قطره به فیلم مایع در نسبت لرزش بالاتر (اعداد رینولدز بیشتر) داراست. علت آن را می‌توان پایداری عددی روش MRT-EDM نسبت به روش SRT-EDM عنوان کرد که حاصل از مقادیر سرعت غیرفیزیکی کم‌تر در این روش است.



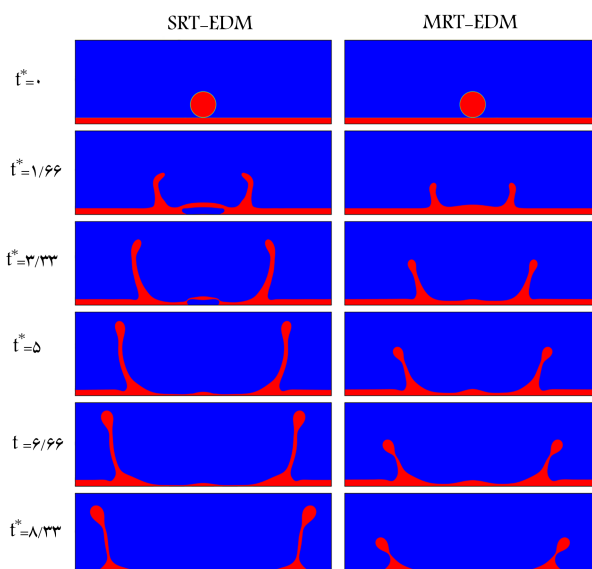
شکل ۱۵. نتایج شبیه‌سازی برخورد قطره به فیلم مایع در اعداد وبر، رینولدز و آنسرج به ترتیب برابر ۱۴۸/۲۷، ۷۶۳/۸۹ و ۱۵۹۴/۰.

تقریباً برابر آزمایش تجربی است. چنان‌که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود پس از برخورد قطره به سطح، دو تاج در دو سوی محل برخورد تشکیل می‌شود و در خلاف جهت نقطه‌ی برخورد به سمت بیرون حرکت می‌کند که این ساختار جریان با نتایج آزمایش‌های تجربی<sup>[۲۳]</sup> تطابق بسیار خوبی دارد و نشان‌دهنده‌ی دقت قابل قبول الگوریتم عددی حاضر در پیش‌بینی الگوی جریان‌های چندفازی است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، یک الگوریتم عددی بر اساس روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی با مدل شان - چن به منظور مطالعه‌ی دینامیک جریان‌های دوفازی گاز - مایع توسعه داده شده است. برای بررسی توانایی‌ها و محدودیت‌های الگوریتم‌های استاندارد و بهبود یافته‌ی مدل شان - چن در دقت نتایج و پایداری حل عددی، سه الگوریتم با عملگرهای مختلف در محاسبه‌ی تابع برخورد و اعمال نیروی اندرکنش بین ذرات شامل SRT-EDM، SRT-SCM و MRT-EDM ارائه و ارزیابی شده است. صحت و کارایی الگوریتم عددی توسعه یافته بر اساس این سه روش با حل مسائل دوفازی مختلف در میدان حل متناوب و دارای مرز دیواره مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل از الگوریتم حاضر نشان می‌دهد که اعمال نیروی اندرکنش بین ذرات با استفاده از روش اختلاف دقیق EDM سبب استقلال نسبت چگالی از مقدار زمان آرامش شده و امکان شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی کاربردی را فراهم می‌سازد. همچنین، تابع برخورد با زمان آرامش چندگانه نسبت به زمان آرامش یکتا مشخصات پایداری بهتری دارد.

مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی حاضر برای شبیه‌سازی قطره در حال تعادل، تخمین زاویه‌ی تماس یک قطره روی دیواره همچنین مقایسه‌ی دینامیک برخورد یک قطره به سطح جامد با یک فیلم مایع با نتایج تحلیلی و مطابقت خوب آنها نشان می‌دهد که هر سه روش SRT-EDM، SRT-SCM و MRT-EDM در محدوده‌ی مشخص از اعداد بی‌بعد وبر و رینولدز دقت مناسبی دارند، اما ارزیابی این روش‌ها در حل عددی جریان‌های دوفازی با گرا دیان‌های شدیدتر در اعداد وبر و رینولدز بالاتر نشان می‌دهد که روش MRT-EDM به علت تولید جریان‌های غیرفیزیکی کم‌تر در فصل مشترک بین دو فاز گاز و مایع، دارای پایداری بهتری نسبت به دو روش SRT-EDM و SRT-SCM است. بنابراین، با وجود بالا بودن هرچند اندک هزینه‌ی محاسباتی روش MRT-EDM نسبت به دو روش دیگر، پایداری و کارایی آن سبب می‌شود که برای حل مسائل کاربردی جذابیت داشته باشد. توسعه‌ی این الگوریتم برای حل جریان‌های چندفازی چندجزئی در اعداد وبر و رینولدز بالا مد نظر است که در مقاله‌های آتی ارائه خواهد شد.



شکل ۱۴. نتایج شبیه‌سازی برخورد قطره به سطح با دو عملگر SRT-EDM و MRT-EDM در شرایط یکسان با اعداد وبر و رینولدز به ترتیب برابر ۱۴۸/۲۷ و ۳۶۳/۶۳.

ثانیه بوده است. این مقایسه نشان می‌دهد که با وجود دقت و پایداری مناسب روش MRT-EDM، هزینه‌ی محاسباتی آن نسبت به روش SRT-EDM بالاتر است.

در شکل ۱۴ نتایج شبیه‌سازی برای هر دو روش SRT-EDM و MRT-EDM در شرایط جریان دوفازی یکسان با اعداد وبر و رینولدز به ترتیب برابر ۱۴۸/۲۷ و ۳۶۳/۶۳ نشان داده شده است. در این مطالعه نیز مشخصات جریان برابر  $D = 120$ ،  $H = 30$  و  $V = 0.2$  تعیین شده است. پایین‌تر بودن عدد رینولدز در نتایج شکل ۱۴ نسبت به حالت قبلی در روش MRT-EDM، باعث تغییر در شکل قطرات تشکیل شده در دو سر تاج شده است. علت تفاوت ایجاد شده در شبیه‌سازی با استفاده از دو روش، بالاتر بودن اثر جریان‌های غیرفیزیکی در روش SRT-EDM است. اثرات این جریان‌ها موجب ناپایداری در مرز مشترک دو فاز شده و باعث جدایش جریان از سطح با استفاده از روش SRT-EDM می‌شود.

به منظور مقایسه‌ی ساختار جریان دوفازی برخورد یک قطره با فیلم مایع حاصل از حل عددی حاضر بر اساس روش شبکه‌ی بولتزمن چندفازی با داده‌های تجربی<sup>[۲۳]</sup> سعی شد که شرایط جریان با استفاده از اعداد بی‌بعد رینولدز، وبر و آنسرج  $Oh = \sqrt{We}/Re$  یکسان‌سازی شود. به این ترتیب، یک آزمایش تجربی انتخاب شد<sup>[۲۳]</sup> که در آن یک قطره اتانول با سرعت  $V = 10 (m/s)$  و قطر  $D = 312 (\mu m)$  به سطح برخورد می‌کند که اعداد بی‌بعد وبر، رینولدز و آنسرج آن به ترتیب ۱۰۹۹، ۲۰۸۰ و ۱۵۹۴/۰ است. با توجه به محدودیت‌های روش عددی حاضر در شبیه‌سازی جریان دوفازی با اعداد وبر و رینولدز بالا (برابر مقدار آنها در آزمایش تجربی)، مطالعه‌ی حاضر با دقت شبکه‌ی  $400 \times 1200$ ، قطر قطره  $D = 120$  و ضخامت فیلم مایع  $H = 30$  انجام شده که در آن سرعت برخورد قطره برابر  $V = 0.2$  و لزجت سینماتیک  $\nu = 0.31419$  در نظر گرفته شده است. به این ترتیب، اعداد بی‌بعد وبر، رینولدز و آنسرج شبیه‌سازی عددی حاضر به ترتیب برابر ۱۴۸/۲۷، ۷۶۳/۸۹ و ۱۵۹۴/۰ محاسبه شده که مقدار آنسرج آن

1. lattice boltzmann method
2. bhatnagar-groos-krook
3. single relaxation time
4. multi relaxation time
5. exact deference method
6. velocity shifted method
7. single relaxation time shan chen method
8. single relaxation time velocity shifted method
9. multi relaxation time exact deference method
10. bounce back

## منابع (References)

1. Chen, S. and Doolen, G.D. "Lattice boltzmann method for fluid flows", *Annu Rev Fluid Mech* 1998;30:329-64. DOI:10.1146/annurev.fluid.30.1.329.
2. McCracken, M.E. and Abraham, J. "Multiple-relaxation-time lattice-boltzmann model for multiphase flow", *Phys Rev E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys*, **71**, pp.036701 (2005). DOI:10.1103/PhysRevE.71.036701.
3. Qian, Y.H., D'Humières, D. and Lallemand, P. "Lattice bgk models for navier-stokes equation", *Epl*, **17**, pp. 479-484 (1992). DOI:10.1209/0295-5075/17/6/001.
4. Benzi, R., Succi, S. and Vergassola, M. "The lattice boltzmann equation: theory and applications", *Phys Rep*, **222**(3), pp. 145-197 (1992). DOI:10.1016/0370-1573(92)90090-M.
5. Succi, S., Benzi, R. and Higuera, F. "The lattice boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics", *Phys D Nonlinear Phenom*, **47**(1-2), pp. 219-230 (1991). DOI:10.1016/0167-2789(91)90292-H.
6. Gunstensen, A.K., Rothman, D.H. and Zaleski, S. and et al. "Lattice boltzmann model of immiscible fluids", *Phys Rev A*, **43**, pp. 4320-4327 (1991). DOI:10.1103/PhysRevA.43.4320.
7. Swift, M.R., Orlandini, E., Osborn, W.R. and et al. "Lattice boltzmann simulations of liquid-gas and binary fluid systems", *Phys Rev E - Stat Physics, Plasmas, Fluids, Relat Interdiscip Top*, **54**, pp. 5041-5052 (1996). DOI:10.1103/PhysRevE.54.5041.
8. Shan, X. and Chen, H. "Lattice boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components", *Phys Rev E*, **47**, pp. 1815-1819 (1993). DOI:10.1103/PhysRevE.47.1815.
9. Shan, X. and Chen, H. "Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation", *Phys Rev E*, **49**, pp. 2941-2948 (1994).
10. Chen, L., Kang, Q., Mu, Y. and et al. "A critical review of the pseudopotential multiphase lattice boltzmann model: methods and applications", *Int J Heat Mass Transf*, **76**, pp. 210-236 (2014). DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.032.
11. Kuzmin, A., Mohamad, A.A. and SUCCI, S. "Multi-relaxation time lattice boltzmann model for multiphase flows", *Int J Mod Phys C*, **19**(6), pp. 875-902 (2008). DOI:10.1142/S0129183108012571.
12. Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M. "A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems", *Phys Rev*, **94**, pp. 511-525 (1954). DOI:10.1103/PhysRev.94.511.
13. Lallemand, P. and Luo, L.S. "Theory of the lattice boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability", *Phys Rev E - Stat Physics, Plasmas, Fluids, Relat Interdiscip Top*, **61**, pp. 6546-6562 (2000). DOI:10.1103/PhysRevE.61.6546.
14. Lallemand, P. and Luo, L.S. "Theory of the lattice Boltzmann method: acoustic and thermal properties in two and three dimensions", *Phys Rev E - Stat Physics, Plasmas, Fluids, Relat Interdiscip Top*, **68**, pp.036706 (2003). DOI:10.1103/PhysRevE.68.036706.
15. D'Humières, D. "Generalized lattice boltzmann equations", *Prog Aeronaut Astronaut*, **159**, pp. 450-458 (1992).
16. D'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M. and et al. "Multiple-relaxation-time lattice boltzmann models in three dimensions", *Philos Trans R Soc A Math Phys Eng Sci*, **360**, pp. 437-451 (2002). DOI:10.1098/rsta.2001.0955.
17. Premnath, K.N. and Abraham, J. "Simulations of binary drop collisions with a multiple-relaxation-time lattice-Boltzmann model", *Phys Fluids*, **17**, pp. 1-21 (2005). DOI:10.1063/1.2148987.
18. Yu, Z. and Fan, L. "Defamation and medical journals", *Br Med J*, **2**, pp.046708 (1975). DOI:10.1103/PhysRevE.82.046708.
19. Kuperstokh, A.L. "New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation", *Proceedings 5th Int EDH Work*, pp. 241-246 (2004).
20. Krivovichev, G.V. "Stability analysis of body force action models used in the single-relaxation-time single-phase lattice boltzmann method", *Appl Math Comput*, **348**, pp. 25-41 (2019). DOI:10.1016/j.amc.2018.11.056.
21. Kupershtokh, A.L., Medvedev, D.A. and Karpov, D.I. "On equations of state in a lattice Boltzmann method", *Computers and Mathematics with Applications*, **58**, pp. 965-974 (2009). DOI:10.1016/j.camwa.2009.02.024.
22. He, X. and Luo, L.S. "A priori derivation of the lattice boltzmann equation", *Phys Rev E - Stat Physics, Plasmas, Fluids, Relat Interdiscip Top*, **55**(6), pp.R6333-R6336 (1997). DOI:10.1103/PhysRevE.55.R6333.
23. Cristea, A. "Equations of state in a finite difference lattice boltzmann model", *Proc Rom Acad Ser A - Math Phys Tech Sci Inf Sci*, **12**(1), pp. 71-77 (2011). DOI:10.1063/1.2187070.
24. Weil, K.G., Rowlinson, J.S. and Widom, B., *Molecular Theory of Capillarity*, Clarendon Press Oxford 1982. 327 Seiten, Preis: £ 30,-. Berichte Der Bunsengesellschaft Für Phys Chemie **88**, pp. 586-586 (1984). DOI:10.1002/bbpc.19840880621.
25. Cristea, A. and Sofonea, V. "Reduction of spurious velocity in finite difference lattice boltzmann models for liquid-vapor systems", *Int J Mod Phys C*, **14**, pp. 1251-1266 (2004). DOI:10.1142/s0129183103005388.

26. GONG, J., OSHIMA, N. and TABE, Y. "Reduction of spurious velocity in the free-energy-based lattice boltzmann method for large density ratio", *J Therm Sci Technol*, **10**(1), JTST0004-JTST0004 (2015). DOI:10.1299/jtst.2015jtst0004.
27. Hejranfar, K. and Ezzatneshan, E. "Simulation of two-phase liquid-vapor flows using a high-order compact finite-difference lattice boltzmann method", *Phys Rev E - Stat Nonlinear, Soft Matter Phys*, **92**, pp. 1-23 (2015). DOI:10.1103/PhysRevE.92.053305.
28. Ezzatneshan, E. "Study of surface wettability effect on cavitation inception by implementation of the lattice boltzmann method", *Phys Fluids*, **29**, pp.113304 (2017). DOI:10.1063/1.4990876.
29. Ezzatneshan, E. "Comparative study of the lattice boltzmann collision models for simulation of incompressible fluid flows", *Math Comput Simul*, **156**, pp. 158-177 (2019). DOI:10.1016/j.matcom.2018.07.013.
30. Yiotis, A.G., Psihogios, J., Kainourgiakis, M.E. and et al. "A lattice boltzmann study of viscous coupling effects in immiscible two-phase flow in porous media", *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, **300**(1-2), pp. 35-49 (2007). DOI:10.1016/j.colsurfa.2006.12.045.
31. Lin, C.L, Videla, A.R. and Miller, J.D. "Advanced three-dimensional multiphase flow simulation in porous media reconstructed from x-ray microtomography using the He-Chen-Zhang lattice boltzmann model", *Flow Meas Instrum*, **21**, pp. 255-261 (2010) . DOI:10.1016/j.flowmeasinst.2010.02.008.
32. Fallah, Kharmiani, S., Passandideh-Fard, M. and Niazmand, H. "Simulation of a single droplet impact onto a thin liquid film using the lattice boltzmann method", *J Mol Liq*, **222**, pp. 1172-1182 (2016) . DOI:10.1016/j.molliq.2016.07.092.
33. Yarin, A.L. and Weiss, D.A. "Impact of drops on solid surfaces: self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity", *J Fluid Mech*, **283**, pp. 141-173 (1995). DOI:10.1017/S0022112095002266.