

ضریب شدت تنش برای یک ترک کوچک شعاعی واقع بر لبه‌ی خارجی استوانه‌ی چرخان ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی و توزیع حرارتی

رسول نیک‌پور (دانشجوی کارشناسی ارشد)

حسین مهابدی* (دانشیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۴۰۰)
دوره ۳-۳، شماره ۱، ص. ۲۶-۱۷

در این مقاله ضریب شدت تنش ترک کوچک شعاعی در لبه‌ی خارجی یک استوانه‌ی جدار ضخیم ویسکوالاستیک دوار تحت فشار داخلی و توزیع حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک استوانه، از مدل جامد سه پارامتری زبر بهره گرفته شده است. ابتدا توزیع تنش در استوانه‌ی ویسکوالاستیک بدون ترک تعیین شده است. سپس با استفاده از روش برهم‌نهی و انتخاب ضریب هندسی مناسب، مسئله‌ی استوانه‌ی ترک‌دار بررسی شده است. نهایتاً، اثر پارامترهای مختلف بر روی ضریب شدت تنش بررسی شده است. با حذف اثر ویسکوالاستیک در استوانه، ضریب شدت تنش به دست آمده در مقاله‌ی حاضر با نتایج موجود در سوابق علمی مسئله مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش خواص الاستیک ماده ضریب شدت تنش افزایش و با افزایش خواص ویسکوز ماده ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.

واژگان کلیدی: ضریب شدت تنش، استوانه‌ی ویسکوالاستیک، مدل زبر، فشار داخلی، توزیع حرارتی.

rasoulnikpour@yahoo.com
h_mahbadi@iauctb.ac.ir

۱. مقدمه

از مواد تابعی یا ارتوتروپیک ساخته شده‌اند. الیویرا و همکاران^[۴] ضریب شدت تنش استوانه تحت بارگذاری شوک حرارتی را با تعیین تابع وزن مناسب بررسی کرده‌اند. پاستراما و همکاران^[۵] با تعیین تابع وزن مناسب، ضریب شدت تنش در یک استوانه تحت فشار داخلی را برای ترک در لبه‌ی خارجی استوانه به دست آورده‌اند.

ما و همکاران^[۶] به بررسی ضریب شدت تنش ترک در لبه‌ی خارجی و لبه‌ی داخلی یک استوانه تحت فشار داخلی و فشار خارجی با استفاده از تابع وزن مناسب پرداخته‌اند. آندراسیک^[۷] ضریب شدت تنش در دو ترک واقع بر لبه‌ی خارجی و لبه‌ی داخلی یک استوانه تحت فشار داخلی را با استفاده از تابع وزن مناسب تعیین کردند. دلال و همکاران^[۸] به کمک تابع وزن مناسب، به بررسی ضریب شدت تنش ترک در وسط، لبه‌های خارجی و داخلی یک استوانه تحت فشار داخلی پرداختند. بل و خوپه^[۹] ضریب شدت تنش در استوانه تحت بارگذاری فشار داخلی را به کمک روش اجزای محدود برای چند ترک شعاعی در لبه‌ی داخلی به دست آورده‌اند. ژانگ و همکاران^[۱۰] با استفاده از نظریه‌ی انتقال حرارت تعمیم یافته به بررسی مسئله‌ی شکست حرارتی یک سیلندر توخالی با یک ترک صفحه‌ی برداشته و در نهایت تنش و ضریب شدت تنش را در این مسئله بررسی کرده‌اند. اشراقی و همکاران^[۱۱] ضریب شدت تنش در یک استوانه‌ی جدار ضخیم ساخته شده از مواد تابعی با یک ترک صفحه‌ی برداشته را به کمک روش تابع وزن برای شرایط هندسی، عمق ترک و

میرایی (دمپینگ) پارامتر مهمی برای بررسی ارتعاشات، پایداری مکانیکی، خستگی، مقاومت ضربه و رشد ترک است. در کاربردهای صنعتی از قبیل سازه‌های بزرگ، پره‌های موتورها و ماشین‌آلات که نیازمند کارایی دینامیکی بالا و ارتعاشات کم هستند، مواد ویسکوالاستیک می‌توانند مفید واقع شوند. از طرفی، به دلیل اعمال بارهای چرخه‌ی رشد ترک در سازه‌های استوانه‌ی، بررسی ضریب شدت تنش در استوانه‌های جدار ضخیم ترک‌دار ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک می‌تواند کاربردهای متعددی در صنایع مختلف داشته باشد. به عنوان مثال، استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی می‌تواند برای مدل‌سازی ترک در تیر خودرو و استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی می‌تواند برای مدل‌سازی ترک در یک مخزن تحت فشار در درجه‌ی حرارت بالا به کار گرفته شود.

در خصوص بررسی ضریب شدت تنش در سازه‌های استوانه‌ی ترک‌دار، تحقیقات متعددی صورت گرفته است. مهابدی و همکاران^[۱-۳] از روش تنش متوسط برای تعیین ضریب شدت تنش در یک دیسک و استوانه‌ی دوار توپر یا توخالی ترک‌دار بهره گرفته‌اند. در این مراجع، ترک‌ها در جهت شعاعی و در لبه‌ی خارجی یا داخلی یک دیسک توخالی یا توپر فرض شده‌اند و استوانه یا دیسک

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۲/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۹/۷/۷، پذیرش ۱۳۹۹/۸/۱۸

DOI:10.24200/J40.2020.54689.1539

هندسی مناسب، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ی ویسکوالاستیک تعیین شده است.

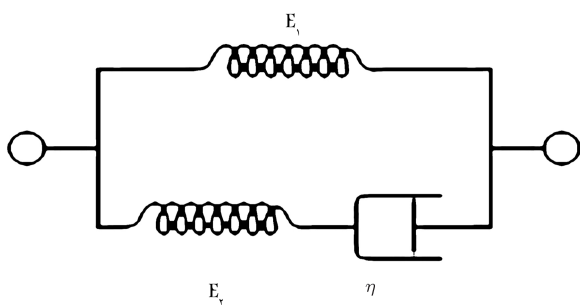
۲. مبانی ریاضی

روش حل مسئله به این صورت است که ابتدا توزیع تنش استوانه در حالت الاستیک به دست آمده است و با استفاده از اصل تناظر، این توزیع تنش برای یک استوانه‌ی ویسکوالاستیک تعیین شده است. استفاده از اصل تناظر منجر به بدست آمدن پاسخ مسئله‌ی ویسکوالاستیک در حوزه‌ی لاپلاس خواهد شد و با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس، پاسخ در حوزه‌ی زمان را می‌توان به دست آورد. در این مقاله برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک از مدل جامد سه پارامتری زینر شکل ۱ بهره گرفته شده است. به منظور تعیین ضریب شدت تنش، از روش برهم‌نهی و فرض کوچک بودن طول ترک بهره گرفته شده است و با به دست آوردن توزیع تنش محیطی متوسط بر روی ترک و استفاده از ضریب هندسی مناسب، ضریب شدت تنش تعیین می‌شود.

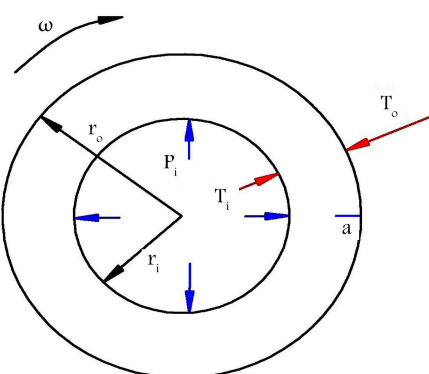
۱.۲. تعیین تنش محیطی استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار تحت

فشار داخلی و بارگذاری حرارتی با ترک شعاعی

یک استوانه‌ی طولی با ترکی شعاعی به طول a واقع بر لبه‌ی بیرونی، شعاع داخلی r_i و شعاع بیرونی r_o مطابق با شکل ۲ را در نظر بگیرید که سرعت زاویه‌ی ω فشار داخلی p_i و گرادیان حرارتی در مبدأ زمانی به آن اعمال می‌شود. گرادیان حرارتی $T(r)$ در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است و با حل معادله‌ی جفت نشده انتقال حرارت فوری و بر اساس شرایط مرزی حرارتی T_i و T_o لبه‌های داخل و



شکل ۱. نمایش مدل زینر.



شکل ۲. استوانه‌ی ویسکوالاستیک توخالی دوار تحت توزیع حرارتی و فشار داخلی با ترک شعاعی در لبه‌ی خارجی استوانه.

جنس مواد مختلف تعیین کرده‌اند. وان و همکاران^[۱۲] ضریب شدت تنش در یک ورق ویسکوالاستیک با حفره‌ی بیضوی را به دست آورده‌اند؛ برای این منظور مسئله به وسیله اصل تناظر در حوزه‌ی لاپلاس و سپس با استفاده تبدیل معکوس لاپلاس در حوزه‌ی زمان تحلیل شده است. یانگ و همکاران^[۱۳] به وسیله‌ی روش اجزای محدود توسعه یافته مسائل سه بعدی ترک در مواد الاستیک و مواد ویسکوالاستیک را بررسی کردند، ضریب شدت تنش در مواد ویسکوالاستیک با استفاده اصل تناظر و توسعه‌ی این روش به دست آمده است. دوروکان و همکاران^[۱۴] ضریب شدت تنش در یک استوانه‌ی همسان‌گرد با ترک صفحه‌ی را با استفاده از حل معادلات نویر به دست آورده‌اند.

ژیانگ لی و همکاران^[۱۵] ترک در یک صفحه‌ی ویسکوالاستیک را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند و با محاسبه‌ی نرخ آزادسازی انرژی، ضریب شدت تنش در ترک واقع بر صفحه‌ی ویسکوالاستیک را محاسبه کردند. در این مرجع از اصل تناظر برای تعیین ضریب شدت تنش استفاده شده است. ونزی و همکاران^[۱۶] به بررسی ترک در مواد ویسکوالاستیک تحت شوک حرارتی پرداختند. ایشان از روش اجزای محدود برای تعیین ضریب شدت تنش بهره گرفتند و ضریب شدت تنش مواد الاستیک را با ضریب شدت تنش در مواد ویسکوالاستیک مقایسه کردند. ژائو و همکاران^[۱۷] به صورت تجربی و با استفاده از آزمایش‌های خزش و آسودگی تنش به بررسی معادلات ساختاری مواد ویسکوالاستیک پرداختند و سپس شکست مواد ویسکوالاستیک را تحت تأثیر این دو آزمایش تحلیل کردند.

با توجه به بررسی سوابق علمی پژوهش، ملاحظه می‌شود که تاکنون ضریب شدت تنش در استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک شعاعی بررسی نشده است. از این رو، تحقیق حاضر به تعیین ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک می‌پردازد. بررسی سوابق علمی مسئله نشان می‌دهد که در اغلب موارد، ضریب شدت تنش در مواد ویسکوالاستیک با استفاده از روش‌های عددی بررسی شده است. در مقاله‌ی حاضر از روش تنش متوسط برای به دست آوردن ضریب شدت تنش بهره‌گرفته شده است. استفاده از این روش امکان به دست آوردن روابط ریاضی برای تعیین ضریب شدت تنش در ترک‌های شعاعی واقع بر یک استوانه‌ی ویسکوالاستیک را فراهم کرده است. با توجه به این‌که تاکنون در سوابق علمی، روابطی برای تعیین ضریب شدت تنش در استوانه‌های ویسکوالاستیک ارائه نشده است، نوآوری پژوهش حاضر در به دست آوردن این روابط است.

با توجه به این‌که مدل‌های کلونین و ماکسول مدل‌هایی پایه‌ی برای پیش‌بینی رفتار ویسکوالاستیک هستند، ترکیب زنجیره‌های کلونین و ماکسول می‌تواند منجر به مدل‌هایی با امکان پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار ویسکوالاستیک ماده شود. مدل زینر، یک مدل ویسکوالاستیک است که می‌تواند رفتار مواد ویسکوالاستیک شبه‌جامد را مدل‌سازی کند. از طرفی به دلیل داشتن یک جزء فنر بیشتر نسبت به مدل کلونین، امکان مدل‌سازی پاسخ الاستیک اولیه‌ی سازه را نیز دارد. بنابراین انتظار می‌رود این مدل بتواند ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک را با دقت بیشتری نسبت به مدل جامد کلونین پیش‌بینی کند. برای تعیین ضریب شدت تنش در این تحقیق، ابتدا معادلات حاکم بر استوانه‌ی الاستیک تعیین شده است. سپس با استفاده از اصل تناظر، تنش‌ها در استوانه‌ی ویسکوالاستیک در حوزه‌ی لاپلاس تعیین شده‌اند. نهایتاً با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس، توزیع تنش‌ها در حوزه‌ی زمان برای استوانه‌ی جدارضخیم ویسکوالاستیک به دست آمده‌اند. برای تعیین ضریب شدت تنش، از فرض کوچک بودن طول ترک بهره گرفته شده است و سپس با استفاده از روش تنش متوسط و انتگرال‌گیری از تنش محیطی و انتخاب ضریب

با حل این معادله دیفرانسیل و جانشانی آن در معادلات ۳ و ۴، توزیع تنش محیطی و شعاعی در استوانه‌ی الاستیک عبارت است از:

$$\sigma_{\theta} = \frac{r_0^2 - r^2}{r(1-\nu)} (r_0^2 + r_i^2) + \left(\frac{r_0^2 + r_i^2}{r^2}\right) \left[\frac{r_0^2 - r^2}{r(1-\nu)} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} \right] - \frac{1}{\lambda} \frac{1+\nu}{r(1+\nu)} \rho \omega^2 r^2 + \left[\frac{p_i r_i}{r_0^2 - r_i^2} \frac{r}{r} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \right] + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_0^2 - r_i^2} \left(\frac{r_0^2 + r_i^2}{r^2}\right) \int_{r_i}^{r_0} T r dr + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr - T \right] \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{r_0^2 - r^2}{r(1-\nu)} (r_0^2 + r_i^2) + \left(\frac{r_0^2 + r_i^2}{r^2}\right) \left[\frac{r_0^2 - r^2}{r(1-\nu)} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} \right] - \frac{1}{\lambda} \frac{r_0^2 - r^2}{r(1-\nu)} \rho \omega^2 r^2 + \left[\frac{p_i r_i}{r_0^2 - r_i^2} \frac{r}{r} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \right] + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\frac{1}{r_0^2 - r_i^2} \left(\frac{r_0^2 + r_i^2}{r^2}\right) \int_{r_i}^{r_0} T r dr - \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T r dr \right] \quad (6)$$

با توجه به این‌که فقط مؤلفه‌ی تنش محیطی در گشودگی ترک مؤثر است، از آن برای تحلیل ضریب شدت تنش استوانه بهره گرفته می‌شود. جانشانی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون بر حسب پارامترهای زیر، منجر به تعیین توزیع تنش‌ها در حوزه‌ی لاپلاس برای استوانه‌ی ویسکوالاستیک متناظر با مسئله‌ی الاستیک می‌شود:

$$E = \frac{3Q'Q''}{2P'P'' + Q'P''}, \quad \nu = \frac{P'Q'' - Q'P''}{2P'Q'' + Q'P''} \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق، مقادیر P', P'', Q', Q'' پارامترهای مدل ویسکوالاستیک به کار گرفته شده برای تحلیل سازه هستند. برای حالت ویسکوالاستیک سرعت زاویه‌ی ω ، فشار داخلی p_i و اختلاف درجه‌ی حرارت سطوح داخلی و خارج استوانه $T_d = T_i - T_o$ به صورت تابع پله‌ی در نظر گرفته و تبدیل لاپلاس آنها به صورت زیر تعیین می‌شود:

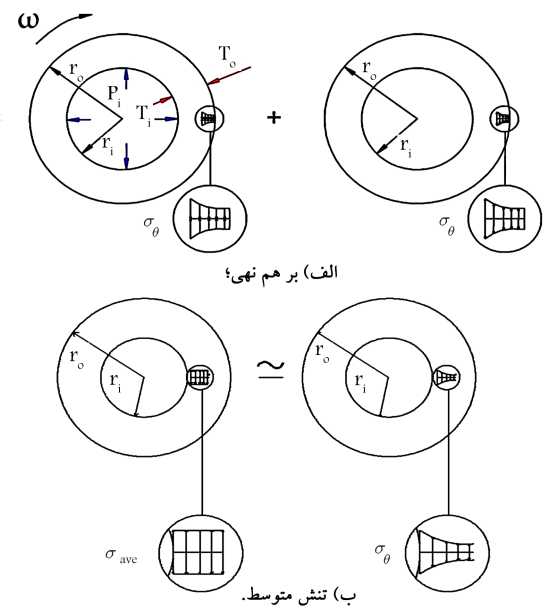
$$\omega = \omega \Delta(t) \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{\omega}{s} \\ T_d = T_d \Delta(t) \Rightarrow \bar{T}_d = \frac{T_d}{s} \\ p_i = p_i \Delta(t) \Rightarrow \bar{p}_i = \frac{p_i}{s} \quad (8)$$

که در آن $\Delta(t)$ تابع پله‌ی واحد است. برای مدل جامد سه پارامتری زلز، پارامترهای ویسکوالاستیک عبارت‌اند از:

$$P''(s) = 1 \quad Q''(s) = 3k \\ P'(s) = 1 + P_1 s \quad Q'(s) = q_0 + q_1 s \quad (9)$$

که در آن، پارامترهای مربوط به خواص مکانیکی مدل ویسکوالاستیک زلز و $K = \frac{E}{r(1-\nu)}$ مدول بالک است. با جایگذاری معادله‌ی ۹ و اعمال مدل زلز در معادله‌ی تنش محیطی ۳، این مؤلفه‌ی تنش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک در حوزه‌ی لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\sigma}(\theta, s) = \frac{12k + 5q_0 + (12kp_1 + 5q_1)s}{(3k + 4q_0)s + (3kp_1 + 4q_1)s^2} \\ (r_0^2 + r_i^2) \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} + \frac{r_0^2 + r_i^2}{r^2} \left[\frac{12k + 5q_0 + (12kp_1 + 5q_1)s}{(3k + 4q_0)s + (3kp_1 + 4q_1)s^2} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} \right] - \frac{1}{\lambda} \frac{12k - q_0 + (12kp_1 - q_1)s}{s(3k + 4q_0) + (3kp_1 + 4q_1)s^2} \rho \omega^2 r^2$$



شکل ۳. استفاده از روش برهم‌نهی به همراه تنش متوسط برای به دست آوردن ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک.

خارج استوانه تعیین می‌شود. با توجه به طول بودن استوانه، شرایط کرنش صفحه‌ی برای مسئله فرض شده است.

اعمال بارگذاری‌ها، منجر به توزیع تنش‌های محیطی، شعاعی و محوری در استوانه می‌شود که از این میان، فقط تنش محیطی منجر به گشودگی ترک در حالت اول شکست می‌شود. مطابق با شکل ۳، می‌توان مسئله‌ی استوانه‌ی ترک‌دار را به برهم‌نهی یک مسئله‌ی استوانه بدون ترک تحت بارگذاری‌های ترمومکانیکی و یک مسئله‌ی استوانه‌ی ترک‌دار با توزیع تنش عمودی تبدیل کرد. حال با توجه به کوچک بودن طول ترک، توزیع تنش محیطی بر روی لبه‌ی ترک، با مقدار متوسط این تنش جایگزین می‌شود. معادله‌ی تعادل در مختصات قطبی با توجه به این‌که مسئله دارای تقارن محوری است، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = -\rho \omega^2 r \quad (1)$$

در معادله‌ی بالا σ_r و σ_{θ} ، به ترتیب تنش شعاعی و محیطی هستند. میدان جابه‌جایی در راستای محور θ و z صفر در نظر گرفته شده است و میدان جابه‌جایی در راستای شعاع با $T(r)$ نمایش داده می‌شود. در این صورت مؤلفه‌های غیرصفر میدان کرنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{U}{r} \quad (2)$$

با توجه به قانون هوک، معادله‌ی تنش کرنش برای جامد الاستیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \varepsilon_r - (1+\nu) \alpha T \right] \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \varepsilon_r + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha T \right] \quad (4)$$

که در آن ν و E ضریب پواسون و مدول یانگ هستند. با جایگذاری روابط تنش در معادله‌ی تعادل، معادله‌ی حاکم بر استوانه بر حسب میدان جابه‌جایی تعیین می‌شود.

$$\left[\frac{(ar_i^\nu(a - 2r_o) \ln \frac{r_o}{r_i})}{(d - r_o)(r_i - r_o)(r_i + b) + (-a + r_o)(\ln \frac{r_o}{-a+r_o})} \right] \frac{1}{a}$$

۴. تعیین ضریب شدت تنش

ضریب شدت تنش برای حالت اول شکست در یک ترک که توزیع تنش یکنواخت σ بر لبه‌ی آن اعمال می‌شود، بر اساس رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$K_I = \sigma F_c \sqrt{\pi d} \quad (14)$$

که در آن، F_c تابع هندسی است. تابع هندسی برای ترک شعاعی واقع بر لبه‌ی خارجی در یک استوانه‌ی جدارضخیم عبارت است از: [۱]

$$F_c = \frac{\sqrt{\gamma}}{\pi} + \frac{1}{\gamma} A^1(a, W) + \frac{1}{\delta} A^2(a, W) \quad (15)$$

$$A^1(a, W) = \sum_{m=1}^{\delta} \sum_{n=1}^{\delta} C_{mn}^i \left(\frac{a}{1-W} \right) W^{m-1}$$

$$i = 1, 2, W = \frac{r_i}{r_o}$$

که در آن $a_o = a/(r_o - r_i)$ ، طول ترک بی‌بعد شده است. ضرایب C_{mn}^i مربوط به تابع وزن هستند و با توجه به هندسه و موقعیت ترک تعیین می‌شوند. [۱] ضرایب هندسی C_{mn}^1 و C_{mn}^2 برای استوانه‌ی تو خالی با ترک شعاعی واقع بر لبه‌ی خارجی استوانه در جدول ۱ و ۲ فهرست شده‌اند. که تمام مقادیر از مرجع [۱] گرفته شده است.

۵. صحت‌سنجی

به‌منظور صحت‌سنجی، ابتدا نتایج مربوط به استوانه‌ی ویسکوالاستیک به استوانه‌ی الاستیک ساده‌سازی شده و سپس ضریب شدت تنش به دست آمده از این تحقیق با داده‌های موجود در سوابق علمی برای استوانه‌ی الاستیک مقایسه شده است. با توجه به معادله‌ی ساختاری بر اساس مدل زنگره در ادامه آورده شده است، ملاحظه می‌شود که با صفر قرار دادن p_1 و q_1 می‌توان به معادلات حالت الاستیک رسید. در جدول ۳ خواص مواد به‌کار رفته در استوانه‌ی ویسکوالاستیک بر اساس مدل زنگره برای رسم نمودارها به کارگرفته شده است، نشان داده شده‌اند. این مقادیر برای ماده‌ی PVC از مرجع [۱۵] اقتباس شده است.

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (16)$$

در رابطه‌ی ۱۶، ضرایب q_1 ، p_1 و q_0 که مربوط به مدل زنگره هستند بر حسب ضریب دمپر و مدول یانگ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$p_0 = 1, p_1 = \frac{\eta}{E_2}, q_0 = E_1, q_1 = \frac{(E_1 + E_2)}{E_2} \quad (17)$$

۱.۵. صحت‌سنجی برای بارگذاری دورانی

برای به دست آوردن ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری دوران باید اثر بارگذاری‌های فشار و حرارت صفر در نظر گرفته شود. در نتیجه ضریب شدت تنش برای بارگذاری دورانی در استوانه‌ی ویسکوالاستیک به‌صورت معادله‌ی ۱۸ به دست می‌آید. شکل ۴ نتایج کار حاضر را برای یک استوانه‌ی الاستیک

$$+ \frac{9kq_0 + 9kq_1 s}{\varepsilon k + \varepsilon q_0 + (\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1) s} \frac{\alpha T_d}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \quad (10)$$

$$\left[1 - \ln \frac{r_o}{r} - \frac{r_i^\nu}{r_o^\nu - r_i^\nu} \left(1 + \frac{r_o^\nu}{r^\nu} \right) \ln \frac{r_o}{r_i} \right]$$

$$+ \frac{p_i r_i^\nu}{r_o^\nu - r_i^\nu} \left(1 + \frac{r_o^\nu}{r^\nu} \right)$$

با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس در معادله‌ی ۱۰، توزیع تنش محیطی عبارت است از:

$$L^{-1} \{ \bar{\sigma}(\theta, s) \} = \sigma(\theta, t)$$

$$\sigma(\theta, t) = \left[\left(r_o^\nu + r_i^\nu \right) + \frac{r_o^\nu r_i^\nu}{r^\nu} \right] \frac{12k + \Delta q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \frac{\rho \omega^\nu}{\nu} \Delta t$$

$$+ \left[\left(r_o^\nu + r_i^\nu \right) + \frac{r_o^\nu r_i^\nu}{r^\nu} \right] \left(\frac{12k p_1 + \Delta q_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} - \frac{12k + \Delta q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \right)$$

$$\exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \frac{\rho \omega^\nu}{\nu}$$

$$- \frac{\rho \omega^\nu r^\nu}{\nu} \frac{12k - q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \Delta t + \left[\frac{12k p_1 - q_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} + \frac{12k - q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \right]$$

$$\exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \frac{\rho \omega^\nu r^\nu}{\nu} + \frac{9q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \Delta(t)$$

$$+ \exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \left(\frac{9kq_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} + \frac{9kq_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} \right) \frac{\alpha T_d}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \quad (11)$$

معادله‌ی ۱۱ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی تو خالی دوار تحت بارگذاری حرارتی با فشار داخلی و ترک شعاعی واقع بر لبه‌ی خارجی استوانه را تعیین می‌کند.

۳. تعیین تنش محیطی متوسط

حال با توجه به کوچک بودن طول ترک، مقدار متوسط تنش محیطی بر روی لبه‌ی ترک جایگزین می‌شود. این ساده‌سازی، امکان استفاده از تابع وزن مناسب برای تعیین ضریب شدت تنش را فراهم می‌سازد. اعمال روش تنش متوسط برای ترک‌های بزرگ منجر به افزایش خطا در تعیین ضریب شدت تنش می‌شود. توزیع تنش متوسط با استفاده از انتگرال زیر قابل تعیین است:

$$(\sigma_\theta)_{ave} = \frac{1}{a} \int_{r_o-a}^{r_o} \sigma_\theta(r, t) dr \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی ۱۲، تنش متوسط محیطی استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار تحت بارگذاری حرارتی با فشار داخلی با ترک شعاعی در لبه‌ی خارجی استوانه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_\theta(ave) = \frac{1}{a} \left\{ \left[\left(r_o^\nu + r_i^\nu \right) a + \frac{r_o^\nu r_i^\nu a}{r_i (r_i + a)} \right] \frac{12k + \Delta q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \frac{\rho \omega^\nu}{\nu} \Delta(t) \right.$$

$$+ \left[\left(r_o^\nu + r_i^\nu \right) a + \frac{r_o^\nu r_i^\nu a}{r_i (r_i + a)} \right] \left(\frac{12k p_1 + \Delta q_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} - \frac{12k + \Delta q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \right) \exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \frac{\rho \omega^\nu}{\nu}$$

$$+ \frac{\rho \omega^\nu}{\nu} \left[\left(r_i + a \right)^\nu - r_i^\nu \right] \left[\left(- \frac{12k p_1 - q_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} + \frac{12k p_1 - q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \right) \exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \right.$$

$$\left. \left. - \frac{12k - q_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \Delta(t) \right) \right] \left. + \left[\frac{p_i \Delta t}{r_o^\nu - r_i^\nu} \left[a + \frac{r_o a}{r_o - a} \right] \frac{1}{a} \right] + \left[\frac{9kq_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} \Delta(t) + \exp \left(- \frac{\varepsilon k + \varepsilon q_0}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} t \right) \left(\frac{9kq_0}{\varepsilon k + \varepsilon q_0} + \frac{9kq_1}{\varepsilon k p_1 + \varepsilon q_1} \right) \frac{\alpha T_d}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \right] \right\}$$

جدول ۱. مقادیر ضریب هندسی c_{mn}^1 برای ترک در لبه‌ی خارجی. [۱]

M	N					
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰,۲۵۵۰۱۰۳۱	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۵۴,۰۸۰۱۴۳	-۵۶۱,۵۲۸۷۵	۲۲۴۴,۳۲۰۳	-۴۳۴۴,۲۲۵۶	۴۰۷۴,۹۱۵	۱۴۸۵,۲۱۳۳
۳	۵۰۹,۶۱۸۲۰	۵۳۵۴,۸۴۱	-۲۱۴۵۸,۵۳۹	۴۱۶۲۴,۲۸۹	-۳۹۱۲۲,۲۹۳	۱۴۲۹,۰۹۳
۴	۱۲۶۷,۰۷۱۷	۱۳۲۶۷,۴۷۱	۵۳۱۷۷,۶۶۸	-۱۰۳۱۶۸,۳۳	۹۷۰۵۶,۷۴۲	۳۵۴۹۵,۰۲۳
۵	۹۲۴,۴۷۱۴۴	۹۶۷۶,۵۹۰۸	-۳۸۷۶۸,۷۷۷	۷۵۲۱۴,۸۲۰	-۷۰۸۱۳,۶۸۸	۲۵۹۳۴,۵۴۳

جدول ۲. مقادیر ضریب هندسی c_{mn}^2 برای ترک در لبه‌ی خارجی. [۱]

M	N					
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰,۱۳۶۰۲۴۴۲	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۶۲,۵۶۴۳۹۲	۶۵۸,۸۱۱۵۲	۲۶۱۵,۴۹۲۲	۵۰۱۳,۴۶۹۲	۴۶۵۲,۹۸۵۴	۱۶۷۸,۰۳۴۱
۳	۶۰۱,۸۴۹۷۹	-۶۲۵۶,۲۵۵	۲۴۸۵۳,۷۸۷	-۴۷۷۰,۲,۴۷۷	۴۴۳۳۵,۵۹۸	-۱۶۰۱۲,۴۵۱
۴	-۱۴۵۳,۸۸۰۵	۱۵۰۶۱,۵۷۱	-۵۹۷۷۶,۴۴۹	۱۱۴۶۷۲,۸۹	-۱۰۶۵۱۳,۰۷	۳۸۴۳۷,۱۹۹
۵	۱۰۲۴,۹۸۱۳	-۱۰۵۸۳,۱۸۷	۴۱۹۲۹,۲۱۵	-۸۰۳۱۰,۳۵۹	۷۴۴۷۲,۸۵۹	-۲۶۸۱۵,۹۱۴

جدول ۳. خواص مکانیکی مواد برای استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک روی لبه‌ی خارجی و لبه‌ی داخلی. [۱۵]

نوع ماده	$\eta (\frac{N \cdot sec}{m^2})$	$E_r (\frac{N}{m^2})$	$E_r (\frac{N}{m^2})$	q_1	q_0
ویسکوالاستیک (PVC)	۱۷۸۷۵	۲,۲۳۱e۷	۴,۳۲۲e۷	۰,۰۰۱	۵,۴e۴
الاستیک	-	۲,۲۳۱/e۷	۴,۳۲۳e۷	-	-

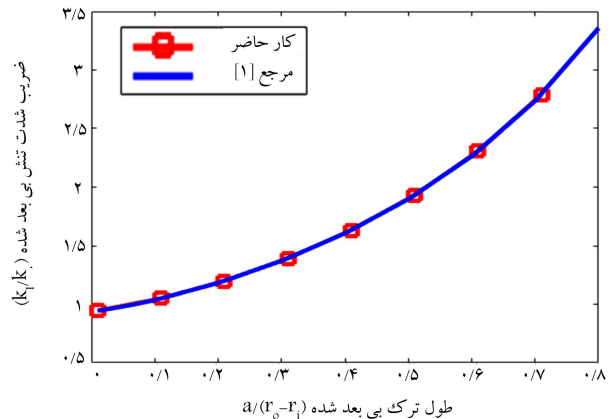
$$K_I = \frac{1}{a} \left\{ \left[(r_o^r + r_i^r) a + \frac{r_o^r r_i^r a}{r_i (r_i + a)} \right] \frac{12k + 5q}{6k + 2q} \Delta(t) + \left[(r_o^r + r_i^r) a + \frac{r_o^r r_i^r a}{r_i (r_i + a)} \right] \left(\frac{12k p_1 + 5q}{3k p_1 + 2q_1} - \frac{12k + 5q}{6k + 2q} \right) \exp \left(-\frac{6k + 2q}{6k p_1 + 2q_1} t \right) \frac{p \omega^r}{r^2} + \frac{p \omega^r}{r^2} \left[(r_i + a)^r - r_i^r \right] \left[\left(-\frac{12k p_1 - q_1}{3k p_1 + 2q_1} + \frac{12k p_1 - q}{3k + 2q} \right) \exp \left(-\frac{6k + 2q}{6k p_1 + 2q_1} t \right) - \frac{12k - q}{6k + 2q} \Delta(t) \right] \right\} \cdot \sqrt{\pi a} \left[\frac{1}{\pi} \sqrt{r} + \frac{r}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^1 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} + \frac{r}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} \right] \quad (18)$$

همان‌طور که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود، نتایج کار حاضر از تطابق خوبی با

مرجع [۱] برخوردار است.

شکل ۵ ضریب شدت تنش بر حسب طول ترک را در یک استوانه با ترک

شعاعی بر لبه‌ی خارجی و تحت دوران نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، ضریب شدت تنش با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند و به مدل الاستیک نزدیک می‌شود. این رفتار، نشان‌دهنده‌ی پاسخ شبه‌جامد در مدل‌های ویسکوالاستیکی از قبیل مدل زراست. علاوه بر این، از این نمودار مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش در ماده‌ی ویسکوالاستیک و در لحظات اولیه نسبت به ماده‌ی الاستیک بحرانی‌تر است و امکان رشد ترک در لحظات اولیه‌ی بارگذاری بیشتر است. این پدیده نشان‌دهنده‌ی اهمیت مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک ماده در بررسی رشد ترک است. دلیل این پدیده، عدم وجود زمان‌کافی برای اثر ضریب دمپر در مدل ویسکوالاستیک است.



شکل ۴. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی الاستیک دوار با ترک در لبه‌ی خارجی استوانه نسبت به طول ترک بی بعد شده.

با نتایج مرجع [۱] مقایسه می‌کند. در تمام نتایج به دست آمده، پارامتر ضریب شدت تنش به صورت $\frac{K_I}{K_0}$ بی بعد شده است. پارامتر K_0 برای بارگذاری دورانی به صورت $K_0 = \frac{\rho \omega^r (1+\alpha)}{r} \sqrt{\pi a}$ تعریف می‌شود که $\alpha = \frac{1+2\nu}{1-\nu}$ است. همچنین طول ترک نیز به صورت $\frac{a}{(r_o - r_i)}$ بی بعد شده است. همچنین پارامترهای زیر را برای ترسیم نمودار ۷ خواهیم داشت:

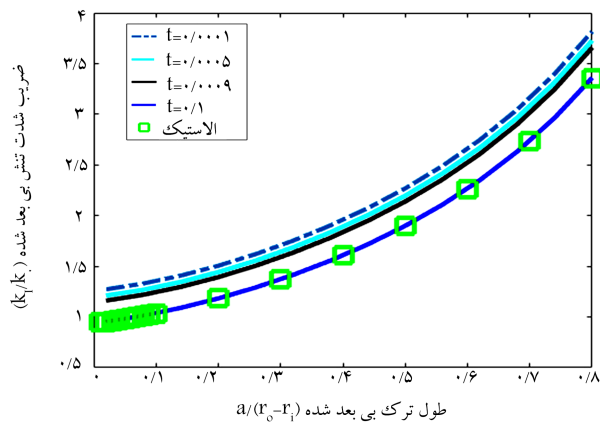
$$\rho = 1390 \left(\frac{kg}{m^3} \right)$$

$$r_i = 100 \text{ mm}$$

$$r_o = 200 \text{ mm}$$

جدول ۴. مقایسه‌ی ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی الاستیک با ترک خارجی تحت فشار داخلی نسبت به طول ترک بی بعد شده در کار حاضر با مرجع [۸۵].

$\frac{K_I}{K_0}$		مرجع [۵]	مرجع [۸]
کار حاضر	$\frac{a}{(r_o - r_i)}$		
۰٫۲	۰٫۹	۰٫۹	۱٫۱
۰٫۳	۱٫۱	۱٫۰۴	۱٫۰۴
۰٫۴	۱٫۲	۱٫۲۰	۱٫۲۰
۰٫۵	۱٫۴	۱٫۴۰	۱٫۴۰
۰٫۶	۱٫۷	۱٫۶۵	۱٫۶۵
۰٫۷	۲	۱٫۹۷	۱٫۹۸
۰٫۸	۲٫۴	۲٫۴۵	۲٫۴۴



شکل ۵. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده.

۲.۵. صحت‌سنجی ضریب شدت تنش استوانه تحت بارگذاری فشار داخلی

برای به دست آوردن ضریب شدت تنش استوانه ویسکوالاستیک تحت بارگذاری فشار داخلی در معادله‌ی ۱۶ بارگذاری‌های دوران و حرارت صفر در نظر گرفته می‌شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$k = \frac{p_i \Delta t}{r_o - r_i} \left[d + \frac{r_o a}{r_o - a} \frac{1}{a} \right] \left[\frac{2\sqrt{v}}{\pi} + \frac{1}{v} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^1 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} + \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} \right] \sqrt{\pi a} \quad (19)$$

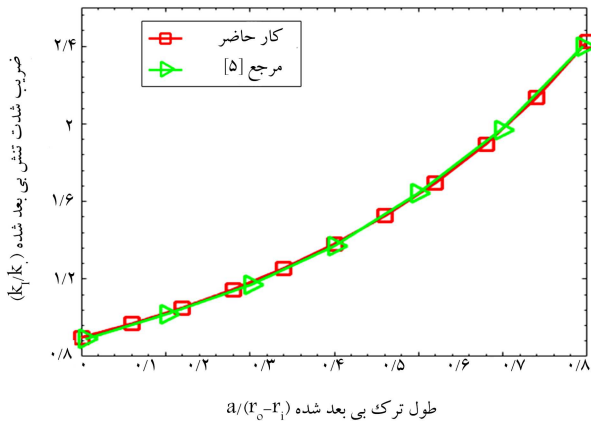
با توجه به این‌که در معادله‌ی ۲۰ به غیر از تابع پله‌ی واحد هیچ عبارت زمانی دیگر وجود ندارد، در این حالت ضریب شدت تنش استوانه الاستیک و ویسکوالاستیک یکسان است.

در جدول ۴ ضریب شدت تنش در کار حاضر با مراجع [۸۵] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بیشترین مقدار خطا در بین تمام شرایط بارگذاری مختلف برای بزرگ‌ترین طول ترک کمتر از ۳٫۴ درصد است. این نتیجه نشان می‌دهد، هرچند که با افزایش طول ترک خطای آن افزایش می‌یابد، ولی دقت آن حتی برای ترک‌های بزرگ نیز در حد قابل قبول است.

شکل ۶ مقایسه‌ی ضریب شدت تنش بی بعد شده برای یک استوانه با نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی برابر با دورا با نتایج مرجع [۵] مقایسه می‌کند. همان‌طور که در شکل ۶ ملاحظه می‌شود، پارامتر ضریب شدت تنش به صورت $\frac{K_I}{K_0}$ بی بعد شده است. پارامتر $K_0 = p_i \sqrt{\pi a}$ برای بارگذاری دورانی به صورت $K_0 = p_i \sqrt{\pi a}$ تعریف می‌شود؛ نتایج کار حاضر از تطابق خوبی با مرجع [۵] برخوردار است.

۳.۵. صحت‌سنجی ضریب شدت تنش استوانه‌ی الاستیک و ویسکوالاستیک تحت بارگذاری تنش حرارتی با ترک روی لبه‌ی خارجی

برای به دست آوردن ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری حرارتی در معادله‌ی ۱۹ بارگذاری‌های فشار و دوران صفر در نظر گرفته می‌شود که به صورت زیر است.

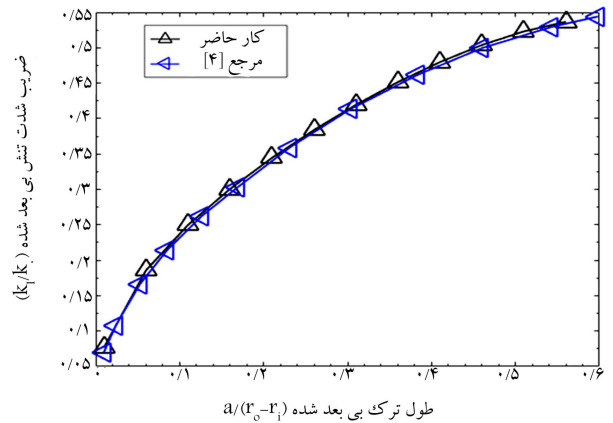
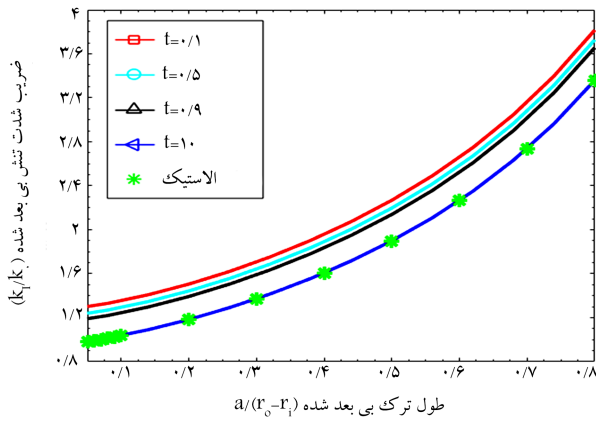


شکل ۶. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه ویسکوالاستیک (الاستیک) با ترک خارجی تحت فشار داخلی نسبت به طول ترک بی بعد شده.

$$k = \frac{9kq_0}{6k + 4q_0} \Delta(t) + \exp\left(-\frac{6k + 4q_0}{6kp_1 + 4q_1} t\right) \frac{9kq_0}{6k + 4q_0} + \frac{9kq_1}{6kp_1 + 4q_1} \ln \frac{r_o}{r_i} \frac{\alpha T_d}{r_i} \left[\frac{1 - \left((d - r_i) \ln \frac{r_o}{r_i} + (r_i + d) \ln \frac{r_o}{a + r_o} \right)}{a - \left(r_i^2 / (r_o^2 - r_i^2) \ln \frac{r_o}{r_i} (a + \frac{-r_o^2}{r_i + a}) + \left(\frac{r_o^2}{r_i} \right) \right)} \right] \frac{1}{a} \left[\frac{2\sqrt{v}}{\pi} + \frac{1}{v} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^1 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} + \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left(\frac{a}{1-w} \right)^{n-1} \right] \sqrt{\pi a} \quad (20)$$

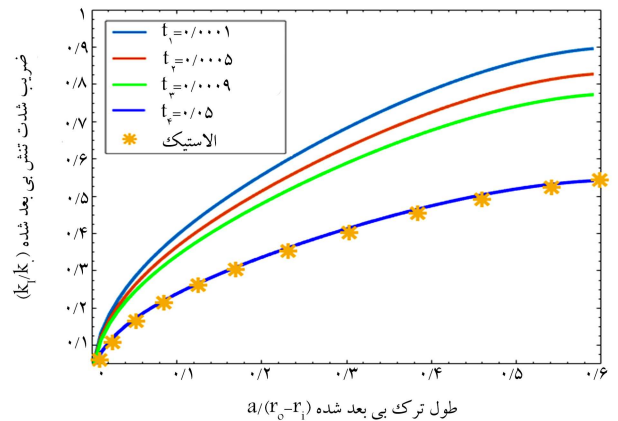
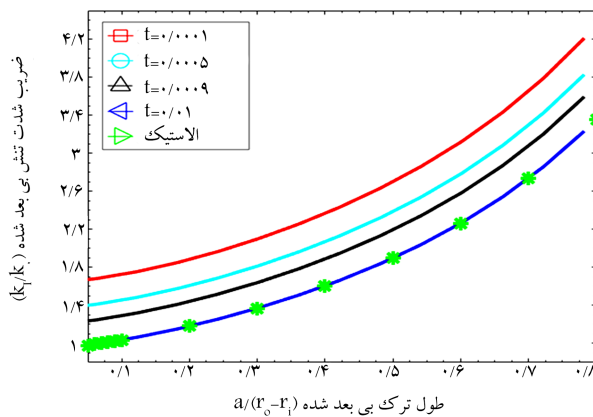
شکل ۷ نتایج کار حاضر برای یک استوانه‌ی الاستیک را با مرجع [۴] مقایسه می‌کند. در شکل ۷ برای صحت‌سنجی معادله‌ی ۲۱ نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی الاستیک تحت تنش حرارتی با ترک روی لبه‌ی خارجی با مرجع [۴] و با استفاده از جدول‌های ۱ و ۲، بررسی شده است.

پارامتر ضریب شدت تنش به صورت $\frac{K_I}{K_0}$ بی بعد شده است که پارامتر K_0 برای بارگذاری دورانی به صورت $K_0 = \frac{E \alpha T_d}{1-\nu} \sqrt{\pi a}$ تعریف می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده در این تحقیق از تطابق خوبی با مرجع [۴] برخوردار است. در مرجع [۴] از روش اجزای محدود برای به دست آوردن ضریب شدت تنش استفاده شده است. بنابراین حتی برای ترک‌های طولی نیز استفاده از روش به کار گرفته شده در این مقاله، از دقت قابل قبولی برخوردار است. شکل ۸



شکل ۷. نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ای الاستیک تحت حرارت بی بعد شده با ترک روی لبه‌ی خارجی تحت دوران نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار زمان مختلف در حالتی که η هزار برابر شده.

شکل ۸. نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی الاستیک تحت حرارت بی بعد شده با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده.



شکل ۹. نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده در ۴ زمان در حالتی که مدول یانگ صد برابر شده.

شکل ۱۰. نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت حرارت بی بعد شده با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار زمان مختلف.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش مدول یانگ، خاصیت الاستیک ماده افزایش می‌یابد و ضریب شدت تنش در شکل ۱۰ در مقایسه با نمودار شکل ۵ در زمان $t = 0.0001$ s حدود 0.75 واحد افزایش پیدا کرده است. پس با افزایش خواص الاستیک استوانه، ضریب شدت تنش در لحظه‌ی زمانی متناظر افزایش پیدا می‌کند. شکل ۱۱، نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده را برای چهار ضخامت مختلف نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در $\frac{r_i}{(r_o - r_i)} = \frac{1}{2}$ ضریب شدت تنش به کمترین مقدار خود می‌رسد و در $\frac{r_i}{(r_o - r_i)} = 2$ دارای بیشترین مقدار است. پس با افزایش ضخامت استوانه ضریب شدت تنش کاهش پیدا کرده است. دلیل این رفتار، کاهش تنش در استوانه با افزایش ضخامت آن است.

ضریب شدت تنش بر حسب طول ترک را در یک استوانه با ترک شعاعی بر لبه‌ی خارجی و تحت بارگذاری حرارتی نمایش می‌دهد. همان‌طور که این نمودار نشان می‌دهد، ضریب شدت تنش با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند و به مدل الاستیک نزدیک می‌شود.

۶. نتایج

۶.۱. بررسی نتایج استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار

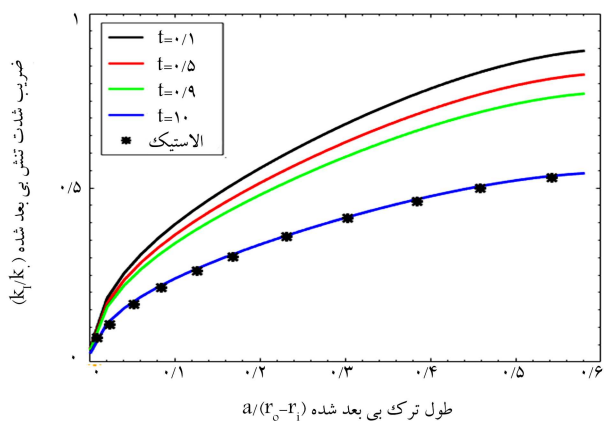
در شکل ۹ برای بررسی اثر دمپر بر روی ضریب شدت تنش، ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی ترک در استوانه‌ی ویسکوالاستیک نسبت به طول ترک بی بعد شده رسم شده است. در این نمودار ضریب دمپر نسبت به نمودار ۸، هزار برابر شده است. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد، با افزایش خاصیت لزج، مقدار ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد و در زمان $t = 10$ s ضریب شدت تنش ماده‌ی ویسکوالاستیک به حالت الاستیک نزدیک می‌شود؛ این زمان در مقایسه با شکل ۸ بیشتر است.

در شکل ۱۰ ضریب جزء فنر (مدول یانگ) از مقدار 4.73239×10^7 به مقدار 4.73239×10^9 افزایش یافته است و ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب طول ترک بی بعد شده را برای زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد.

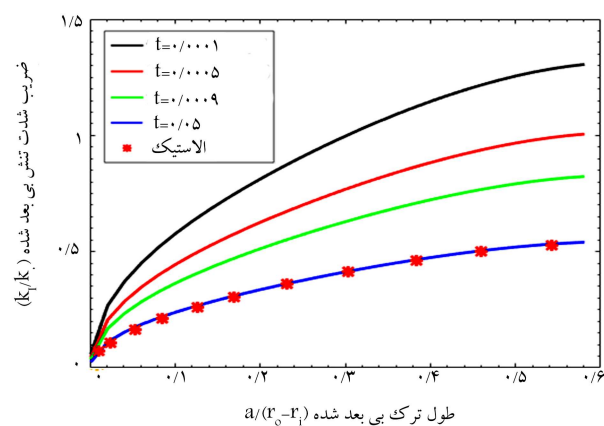
۶.۲. بررسی نتایج استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری فشار داخلی

داخلی

با توجه به اینکه در رابطه‌ی ۲۰، که مربوط به ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت فشار داخلی است، ضرایب مکانیکی مواد ویسکوالاستیک وجود ندارد پس تغییر این ضرایب تأثیری در ضریب شدت تنش ندارد. شکل ۱۲ نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت فشار



شکل ۱۳. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک روی لبه‌ی خارجی تحت حرارت نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار زمان مختلف در حالتی که η هزار برابر شده.



شکل ۱۴. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک روی لبه‌ی خارجی تحت حرارت نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار زمان مختلف و در حالتی که مدول یانگ صد برابر شده.

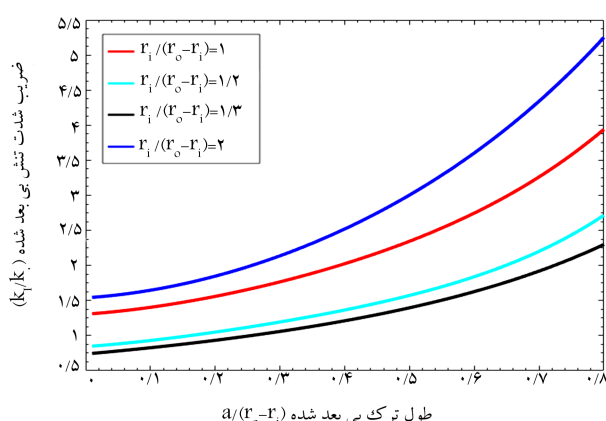
ویسکوالاستیک نسبت به طول ترک بی بعد شده را در شرایطی که مدول یانگ مربوط به جزء فنر از مقدار $3239/4e7$ به مقدار $3239/4e9$ افزایش یافته است، ارائه شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش مدول یانگ، خاصیت الاستیک ماده افزایش پیدا می‌کند. یعنی ضریب شدت تنش در این نمودار در مقایسه با نمودار شکل ۸ در زمان $t = 0.001s$ حدود 0.5 افزایش پیدا کرده است. پس با افزایش خواص الاستیک استوانه ضریب شدت تنش در لحظه‌ی زمانی متناظر افزایش پیدا می‌کند. شکل ۱۵، نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی را نسبت به طول ترک بی بعد شده و برای چهار ضخامت مختلف نمایش می‌دهد.

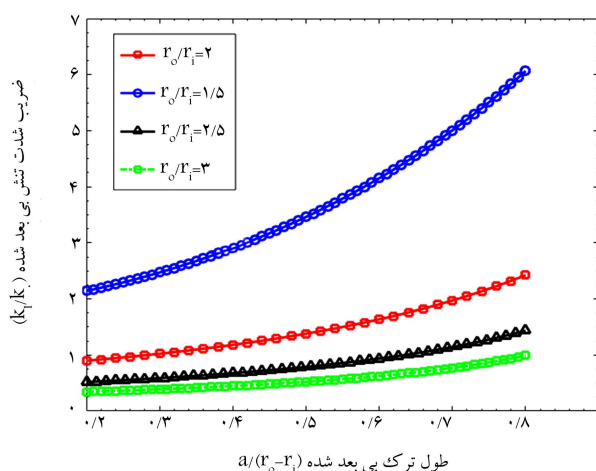
این شکل نیز نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت استوانه ضریب شدت تنش کاهش پیدا کرده است و دلیل آن کاهش تنش به علت افزایش ضخامت استوانه است.

۷. نتیجه‌گیری

در این تحقیق ضریب شدت تنش استوانه‌ی دوار ویسکوالاستیک با ترک کوچک شعاعی در لبه‌ی خارجی محاسبه شده است. محل قرارگیری (لبه‌ی داخلی یا



شکل ۱۱. نمودار ضریب شدت تنش استوانه ویسکوالاستیک دوار با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده در ۴ حالت مختلف ضخامت استوانه.



شکل ۱۲. نمودار ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک خارجی تحت فشار داخلی بی بعد شده نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار ضخامت مختلف.

داخلی با ترک خارجی نسبت به طول ترک بی بعد شده را در شرایطی که استوانه دارای چهار ضخامت مختلف است، نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت استوانه ضریب شدت تنش کاهش پیدا می‌کند و همچنین با کاهش ضخامت استوانه ضریب شدت تنش افزایش پیدا می‌کند.

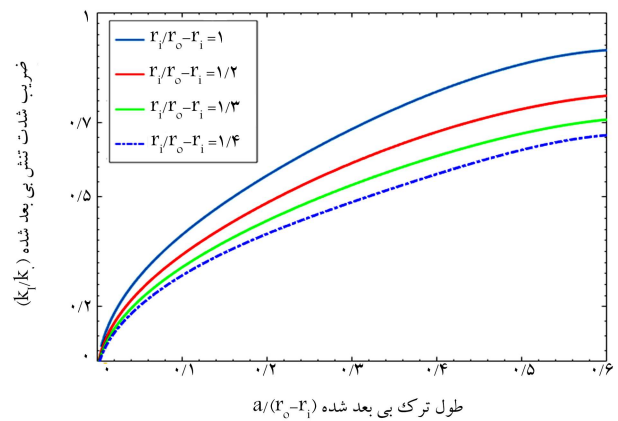
۳.۶. بررسی نتایج استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری حرارتی

در شکل ۱۳ برای بررسی اثر دمپر بر روی ضریب شدت تنش استوانه‌ی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری حرارتی، نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی ترک نسبت به طول ترک بی بعد شده ترسیم شده است، که در آن مقدار ضریب دمپر نسبت به شکل ۸ هزار برابر شده است.

شکل ۱۳ نشان می‌دهد که با افزایش خاصیت لزج، مقدار ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد و در زمان $t = 1s$ ضریب شدت تنش ماده‌ی ویسکوالاستیک به حالت الاستیک نزدیک می‌شود. در نتیجه، ماده به زمان بیشتری برای رسیدن به پاسخ الاستیک نیاز دارد.

در شکل ۱۴، نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی ترک در استوانه‌ی

۲. ضریب شدت تنش در استوانه‌ی ویسکوالاستیک در لحظات اولیه برای بارگذاری‌های دورانی، فشار داخلی و حرارت بالاتر از ضریب شدت تنش نسبت به وضعیت الاستیک معادل آن است.
۳. صرف نظر کردن از خواص ویسکوالاستیک ماده، باعث ایجاد خطای زیاد در پیش‌بینی ضریب شدت تنش استوانه‌های ترک‌دار می‌شود. پس برای تعیین ضریب شدت تنش در مواردی که به دلیل درجه حرارت‌های بالا، ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی سازه خواص ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهد، حتماً باید از روابط وابسته به زمان که بر پایه‌ی مدل‌های ویسکوالاستیک به دست آمده‌اند، بهره گرفت تا امکان پیش‌بینی شرایط رشد ترک با گذشت زمان فراهم شود.



شکل ۱۵. نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده‌ی استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک روی لبه‌ی خارجی تحت حرارت نسبت به طول ترک بی بعد شده در چهار ضخامت استوانه‌ی مختلف.

خارجی) می‌تواند متفاوت باشد. روش پیشنهادی این مسئله می‌تواند برای هر دو نوع ترک داخلی و خارجی به کار گرفته شود با این حال به منظور بیان خلاصه‌ی نتایج، فقط نمودارهای مربوط ترک‌های واقع بر لبه‌ی خارجی نمایش داده شده‌اند. بر اساس سوابق علمی بررسی شده توسط نویسندگان، هیچ مرجعی اثر خواص ویسکوالاستیک را بر روی ضریب شدت تنش استوانه‌ی جدار ضخیم با ترک شعاعی بررسی نکرده است. از این رو، برای صحت‌سنجی نتایج مقاله‌ی حاضر، با صفر قراردادن اثر پارامترهای ویسکوالاستیک، نتایج به دست آمده از این پژوهش با سوابق علمی مربوط به استوانه‌ی الاستیک مقایسه شده است؛ این مقایسه نشان‌دهنده‌ی تطابق خوب نتایج این مقاله با نتایج موجود در سوابق علمی است. به طور خلاصه نتایج این مقاله عبارت‌اند از:

۱. ضریب شدت تنش برای استوانه‌ی ویسکوالاستیک با ترک شعاعی به صورت روابط ریاضی به دست آمده‌اند. روابط به دست آمده می‌تواند برای تعیین طول ترک بحرانی و پیش‌بینی شرایط رشد ترک در استوانه ویسکوالاستیک به کار گرفته شوند و با استفاده از روابط وابسته اثرات وابسته به زمان بارگذاری‌های مختلف را بر روی این سازه بررسی شود.

فهرست علائم

- r_i : شعاع داخلی
 r_o : شعاع بیرونی
 a : طول ترک
 σ_θ : تنش محیطی
 ω : سرعت زاویه‌یی
 t : زمان
 P', P'', Q', Q'' : اپراتورهای زمانی ویسکوالاستیک
 K_0 : ضریب شدت تنش بی بعد شده
 a_0 : طول ترک بی بعد شده
 $\Delta(t)$: تابع بله‌یی زمان
 σ_{ave} : تنش محیطی متوسط
 E : مدول یانگ
 K : مدول بالک
 η : ضریب لزج؛
 p_0, p_1, q_0 : ویژگی‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک
 v : ضریب پواسان
 ρ : چگالی
 r : شعاع استوانه

منابع (References)

- Mahbadi, H. "Stress intensity factor of radial cracks for rotating disks and cylinders using average stress method", *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, **13**(1) (march 2012).
- Mahbadi, H., Barati, F. and Ghaffari, H. Some'e, "Calculating stress intensity factor for small edge radial cracks on an orthotropic thick-walled cylinder subjected to internal pressure using the average stress", *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, **14**(2), pp.98-109 (Sep 2013).
- Mahbadi, H. "Stress intensity factor of radial cracks in isotropic functionally graded solid cylinders" *Engineering Fracture Mechanics*, **180**, pp.115-131 (16 May 2017).
- Oliveira, R. and Wu, X.R. "Stress intensity factors for axial cracks in hollow cylinders subjected to thermal shock", *Engineering Fracture Mechanics*, **27**(2), pp. 185-197 (1987).
- Pastrama, S.D. and de Castro, P.M.S.T. "Weight functions from finite element displacements", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **75**(3), pp. 229-236 (1998).
- Ma, C.C., Huang, J.I. and Tsai, C.H. "Weight functions and stress intensity factors for axial cracks in hol-

- low cylinders, *Journal of Pressure Vessel Technology*, **116**(4), pp.423-430 (1994).
7. Andrasik, C.P. and Parker, A.P. "Dimensionless stress intensity factors for crack thick cylinders under polynomial crack face loadings", *Engineering Fracture Mechanics*, **19**(1), pp. 187-193 (1984).
 8. Delale, F. and Erdogan, F. "Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack", *International Journal of Fracture*, **20**(4), pp. 251-265 (1982).
 9. Kirkhope, K.J. and Bell, R. and Kirkhope, J. "Stress intensity factor equations for single and multiple cracked pressurized thick-Walled cylinder", *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, **41**(1), pp.103-111 (1989).
 10. Zhang, X.-Y. and Li, X.-F. "Transient thermal stress intensity factors for a circumferential crack in a hollow cylinder based on generalized fractional heat conduction", *International Journal of Thermal Sciences*, **121**, pp. 336-347 (2017).
 11. Eshraghi, I. and Soltani, N. "Stress intensity factor calculation for internal circumferential cracks in functionally graded cylinders using the weight function approach", *Engineering Fracture Mechanics*, **134**, pp.1-19 (2014).
 12. Van Thuong Nguyen., Chyanbin Hwu. "Holes, cracks, or inclusions in two-dimensional linear anisotropic viscoelastic solids", *Composite Part B: Engineering*, **117**, pp.111-123 (May 2017).
 13. Yang, J., Lei, Y., Han, J. and et al. "Enriched finite element method for three-dimensional viscoelastic interface crack problems", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **30**, pp.771-782 (2015).
 14. Durucan, A.R. "Thesis axisymmetric finite cylinder with rigid ends and a circumferential edge crack", M.S. Master of Science, Middle East Technical University (2017).
 15. Li, X., Yao, W., Hu, X. and et al. "Interfacial crack analysis between dissimilar viscoelastic media using symplectic analytical singular element", *Engineering Fracture Mechanics*, **219** (1 October 2019).
 16. Yang, W. and Chen, Z. "Thermo-viscoelastic response of a cracked, functionally graded half-plane under a thermal shock", *Engineering Fracture Mechanics*, **206**, pp. 267-277 (1 February 2019).
 17. Peng, Y., Zhao, J., Sepehrnoori, K. and et al. "Fractional model for simulating the viscoelastic behavior of artificial fracture in shale gas", *Engineering Fracture Mechanics*, **228**, (1 April 2020).