

مدل رتبه‌کاسته‌ی انتقال حرارت هدایت در یک پوسته‌ی جامد بر مبنای روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی

فرشاد صباغ‌زادگان (کارشناس ارشد)

محقق‌کاذم مؤیدی* (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم

مهندسی مکانیک شریف (پاییز ۱۴۰۰)
دوری ۳-۳۷، شماره ۲، ص. ۱۲-۳، (پژوهشی)

در تحلیل‌های مهندسی و به ویژه در شبیه‌سازی مستقیم عددی مسائل مختلف، کاهش هزینه‌های محاسباتی همواره حائز اهمیت بوده است. بدین منظور، استفاده از مدل‌های رتبه‌کاسته، که با کاستن از قیود مدل سرعت آن افزوده خواهد شد، جایگزین مناسبی برای مدل اصلی است. در این پژوهش با استفاده از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی و با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ی سیستم‌های دینامیکی، معادله‌ی حاکم بر مسئله‌ی نفوذ حرارتی به فرم یک سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته تبدیل شده است. بر مبنای تصویرسازی معادله‌ی حاکم در فضای برداری مودهای میدان و با استفاده از مودهای اصلی و سازنده‌ی دینامیک میدان (مودهای دینامیکی)، مدل رتبه‌کاسته با توجه به ویژگی این مودها به دست می‌آید. این الگو به منظور شبیه‌سازی تغییرات زمانی و تغییرات پارامتری فرایند نفوذ حرارتی به درستی می‌تواند جایگزین معادله‌ی اصلی شده و با دقت بسیار مناسبی رفتار سیستم مورد نظر را پیش‌بینی کند.

واژگان کلیدی: روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، مسئله‌ی نفوذ حرارتی، مدل رتبه‌کاسته، سیستم دینامیکی.

farshad_sabagh72@yahoo.com
moayyedi@qom.ac.ir

۱. مقدمه

گرفته و با هدف کاهش هزینه‌های محاسباتی از الگوی رتبه‌کاسته استفاده شده است. در اغلب مسائل کاهش مرتبه، در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل یافته از بردارهای پایه، می‌توان دینامیک حاکم بر مسئله را با تعداد ابعاد کم‌تر بازسازی کرد؛ با این شرط که ضمن کاستن از درجات آزادی و پیچیدگی‌های مسئله‌ی مورد بررسی، ویژگی‌های فیزیکی آن حفظ شود. روش‌های متفاوتی برای به دست آوردن سیستم رتبه‌کاسته مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به استفاده از تقریب بسط تیلور یا روش آرنولد اشاره کرد.^[۱،۲] روشی که بیشتر از سایر روش‌ها مورد استفاده‌ی پژوهش‌گران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات قرار گرفته، روش «تجزیه‌ی متعامد بهینه»^(۱) است. این روش یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش مرتبه‌ی مسئله به شمار می‌رود.^[۴] از آن‌جا که بررسی ساختارهای میدان در روش تجزیه‌ی متعامد بهینه، صرفاً بر اساس محتوای انرژی هریک از ساختارها بوده و این روش، سیستم را از منظر دینامیکی مورد ارزیابی قرار نمی‌دهد، مدل رتبه‌کاسته‌ی حاصل، در بلندمدت قادر به پیش‌بینی رفتار سیستم با دقت بالا نخواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر پژوهش‌گران با مطالعه‌ی فیزیک سیالات و تعمیم روش آرنولد،^[۵،۶] موفق به توسعه‌ی روشی قدرتمند در راستای تجزیه و تحلیل دینامیک سیستم‌های غیرخطی شدند. این روش که صرفاً مبتنی بر دسته‌نمایه‌های ثبت شده‌ی حاصل از حل عددی دقیق یا نتایج آزمایشگاهی بوده و قابلیت شناسایی آن دسته از نواحی میدان که در آن نیروهای مختلف عمل می‌کنند و رفتارهای دینامیکی اتفاق می‌افتند را دارد، ابتدا با هدف استخراج اطلاعات

سیستمی که رفتار آتی آن وابسته به سیر تکاملی و رفتار گذشته‌ی سیستم باشد، «سیستم دینامیکی» نامیده می‌شود. برای پیش‌بینی، کنترل و بهینه‌سازی سیستم‌های دینامیکی، از مدل‌های ریاضی استفاده می‌شود. به طور معمول، برای توصیف صحیح رفتار یک سیستم دینامیکی به یک مدل ریاضی پیچیده که نیازمند محاسبات فراوان و فضای زیادی برای ذخیره‌سازی داده‌های مختلف بوده نیاز است. برای مثال می‌توان میدان جریان سیال را به عنوان یک سیستم دینامیکی که با گذر زمان دچار تغییرات تصادفی می‌شود معرفی کرد. در دهه‌های اخیر، به دست آوردن یک روش محاسباتی سریع و دقیق، همواره یکی از دغدغه‌های پژوهش‌گران در حوزه‌ی دینامیک سیالات محاسباتی بوده است. محدودیت‌های محاسباتی، محدودیت دقت محاسبات و فضای ذخیره‌سازی محدود از جمله مهم‌ترین دلایلی هستند که پژوهش‌گران را ناچار به یافتن مدل‌های ساده‌تر می‌کند. پیشرفت‌های اخیر در زمینه‌ی سخت‌افزارهای محاسباتی توانسته تا حدود زیادی زمان محاسبات را کاهش دهد، ولی علاقه‌ی محققان به بررسی جزئیات بیشتر یک پدیده فیزیکی، باعث افزایش پیچیدگی‌های معادلات حاکم بر مسئله می‌شود. لذا لزوم دست‌یابی به یک الگوی سریع و دقیق که قادر به مدل‌سازی مسئله (با هر درجه از پیچیدگی) باشد، همچنان وجود دارد. در این تحقیق، مسئله‌ی نفوذ حرارتی در حالت دویعدی و گذرا مورد مطالعه قرار

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۳/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۹/۱۱/۱۸، پذیرش ۱۳۹۹/۱۲/۱۷.

DOI:10.24200/J40.2021.55926.1555

دینامیکی میدان جریان معرفی شد.^[۶] سپس رولی و همکاران برای شبیه‌سازی جریان یک جت در مقیاس بزرگ، از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی استفاده کردند.^[۷] توماس و همکاران با استفاده از روش‌های تجزیه‌ی متعامد بهینه و تجزیه‌ی مودهای دینامیکی موفق به استخراج ساختارهای اصلی و حائز اهمیت جریان شبیه‌سازی شده در ناحیه‌ی گردابه‌یی، اطراف یک قطار در حال حرکت با سرعت بالا شده و به مقایسه‌ی این دو روش پرداختند.^[۸] دوک و همکاران با استفاده از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، نرخ رشد ناپایداری جریان را مورد بررسی قرار دادند.^[۹] گرلی نیز با استفاده از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی برهم‌کنش‌های درون لایه مرزی شوک را مورد بررسی قرار داد. وی موفق شد مودهایی همراه با فرکانس پایین را که توسط حباب جداساز و امواج ضربه‌یی تولید شده بود شناسایی کند.^[۱۰] سنا نیز با استفاده از این روش جریانی درون یک حفره را مورد بررسی قرار داد و موفق به شناسایی مودهایی با قابلیت خود نوسانی شد.^[۱۱] سرمست و همکاران به منظور تحلیل سرعت دورانی پشت توربین باد، از روش‌های تجزیه‌ی متعامد بهینه و تجزیه‌ی مودهای دینامیکی استفاده کردند. در این تحقیق مزیت روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی نسبت به روش تجزیه‌ی متعامد بهینه به‌خوبی نشان داده شده است.^[۱۲] وینها نیز ابتدا با استفاده از حل عددی مستقیم، فرایند اشباع حاصل از جریان درون حفره باز را شبیه‌سازی کرد و آن را با روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی مورد بررسی قرار داد.^[۱۳] هونگ و همکاران نیز با استفاده از همین روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، میدان جریان مختلط حاصل از جریان ناپایای درون یک دیفیوزر را کنترل کردند.^[۱۴] لیو نیز با استفاده از این روش به تجزیه و تحلیل اغتشاشات فشاری به وجود آمده توسط جریانی درون یک حفره و با سرعتی معادل سرعت صوت پرداخت.^[۱۵] همچنین کلانچ و همکاران برای نخستین بار از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی مرتبه بالاتر^۲ برای بررسی جریان بالادست در یک توربین بادی بهره بردند. در این تحقیق روش‌های تجزیه‌ی مودهای دینامیکی مرتبه بالاتر با تجزیه‌ی مودهای دینامیکی مقایسه شده است.^[۱۶] سائو و همکارش نیز با استفاده از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی موفق به استخراج خواص مودال از یک سیستم مکانیکی غیرخطی شده و نتایج حاصله را با نتایج تجربی مقایسه کردند.^[۱۷] کیانگ و همکاران نیز به منظور بهینه‌سازی قابلیت کنترل سرعت و دمای درون‌لایه‌ی مرزی یک جریان جت ترکیبی تراکم‌پذیر، از دو روش تجزیه‌ی متعامد بهینه و تجزیه‌ی مودهای دینامیکی بهره جستند. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده در پژوهش کیانگ نیز نشان‌گر مزیت روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی نسبت به روش تجزیه‌ی متعامد بهینه است.^[۱۸] ژیانگ‌یو و همکارانش نیز به منظور تأمین برق پایدار و مطمئن، با پیش‌بینی میزان بار مورد نیاز شبکه‌ی برق در مناطق مختلف، با بهره‌گیری از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی موفق به توسعه‌ی الگویی برای پیش‌بینی میزان بار مورد نیاز شدند. آن‌ها در این پژوهش برای پیش‌بینی بار روز مورد نظر، از اطلاعات روز قبلی و اطلاعات روز مشابه در هفته‌ی گذشته استفاده کردند.^[۱۹] کاپتان‌اغلو و همکارانش نیز در دانشگاه واشنگتن از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی در زمینه‌ی فیزیک پلاسما استفاده کردند. آن‌ها با مطالعه‌ی رفتار دینامیکی پلاسما و ساختار آن، موفق به شبیه‌سازی مدلی رتبه‌کاسته برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی پلاسما شدند. به بیان آن‌ها کنترل رفتار دینامیکی امواج پلاسما می‌تواند منجر به پیش‌بینی طوفان‌های ژئومغناطیسی شده و از میلیاردها دلار ضرر اقتصادی جلوگیری کند.^[۲۰] در این پژوهش، از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته برای مسئله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی و ناپایا استفاده شده است. برای ایجاد ماتریس نمایه‌ها، روش تفاضل محدود در بازه‌های زمانی مشخصی به کار رفته است. سپس مودهای دینامیکی استخراج شده و با استفاده از روش

تصویرسازی گالرکین معادله‌ی دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در کار حاضر، مدل رتبه‌کاسته‌ی به دست آمده ضمن حفظ شاخص‌ها و ویژگی‌های اصلی میدان و با چشم‌پوشی از ساختارهای کم‌اهمیت، پیچیدگی آن کاهش یافته و نسبت به مدل اصلی دارای ابعاد و درجه آزادی کم‌تری است. بنابراین با بررسی یک مدل کوچک‌تر از مدل اصلی، به سادگی می‌توان رفتار پدیده‌ی فیزیکی مورد نظر در مدت زمان بلند به‌ازای یک ضریب نفوذ مشخص یا در یک بازه زمانی کوتاه، اثرگذاری تغییر پارامتر (ضریب نفوذ) در میدان مسئله را با انجام محاسبات کم‌تری پیش‌بینی کرد. لازم به ذکر است که بررسی مسئله‌ی نفوذ به این صورت تا به حال توسط پژوهش‌گران انجام نشده است. نتایج نشان‌دهنده‌ی دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته در شبیه‌سازی مسئله‌ی نفوذ حرارتی است.

۲. شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله‌ی انتقال حرارت

دوبعدی و ناپایا

در این پژوهش، توسعه‌ی مدلی رتبه‌کاسته به منظور حل معادله‌ی نفوذ حرارتی درون صفحه‌ی دوبعدی و مربعی شکل مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی شبیه‌سازی عددی مستقیم برای این معادله، نتایج حاصل با داده‌های حل تحلیلی برای این معادله روی صفحه‌ی به ابعاد ۱ واحد مقایسه شده است. برای این امر نیز ابتدا لازم است تا دنباله‌ی از داده‌هایی که به صورت شبیه‌سازی عددی مستقیم جمع‌آوری شده‌اند، به صورت مجموعه‌ی از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ی مرتب شوند. بدین منظور در شبیه‌سازی‌های ارائه شده و برای ایجاد دسته‌نمایه‌ها، از کد حل عددی معادله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی و ناپایا مطابق معادله‌ی ۱ استفاده شده است. در حل مستقیم عددی از تفاضل محدود مرکزی با دقت مرتبه دوم برای گسسته‌سازی ترم‌های مکانی و روش رانگ - کوتا با دقت مرتبه چهارم برای عبارت مشتق زمانی بهره گرفته شده است. شکل گسسته‌سازی شده این معادله عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۱)$$

برای حل عددی این مسئله از شرط اولیه:

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (۲)$$

و شرایط مرزی:

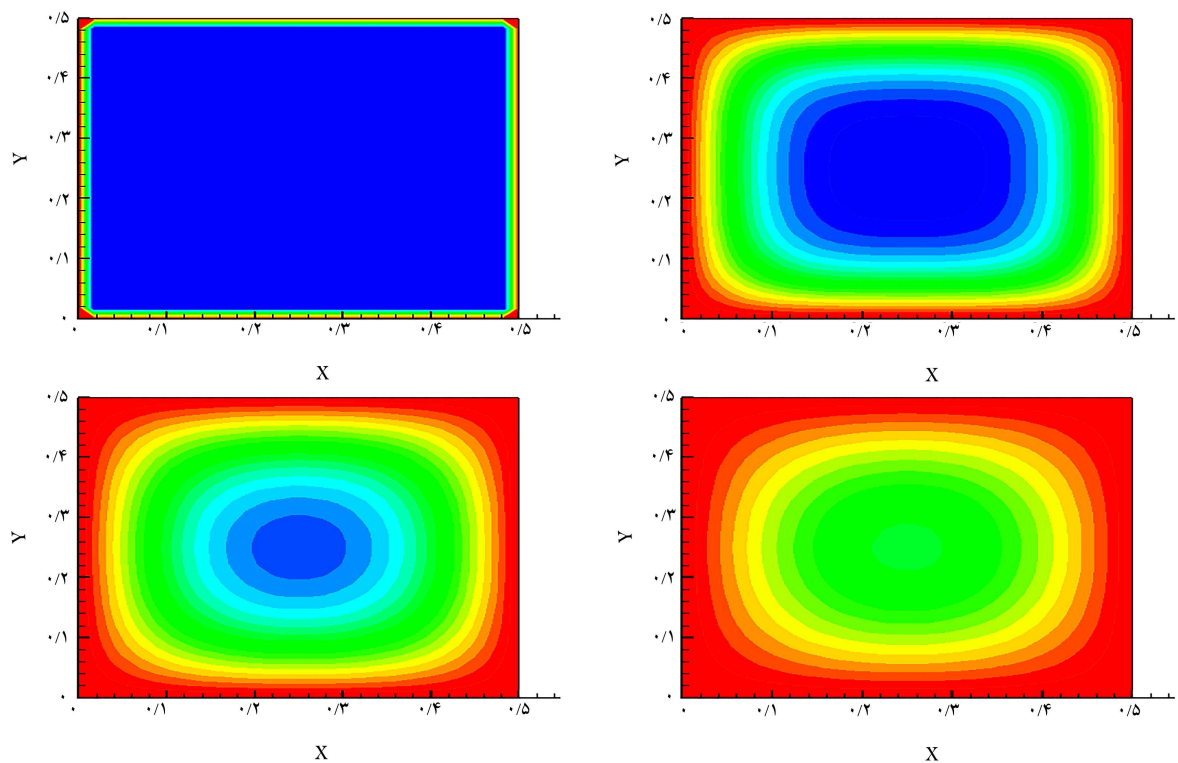
$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 1$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 1 \quad (۳)$$

استفاده شده است. نفوذپذیری حرارتی 0.0044° بوده و مسئله در بازه زمانی ۳ واحد مورد بررسی قرار گرفته است. با حل معادله‌ی حاکم، یک دسته با 300 عضو (از حل میدان) در یک بازه زمانی خاص و با گام‌های زمانی مساوی و متوالی در نظر گرفته خواهد شد. در شکل ۱، به ترتیب خطوط هم‌تراز دمای درون صفحه‌ی مورد بررسی برای نمایه‌های ۱، ۷۵، ۱۵۰ و 300 نمایش داده شده است.

۱.۲. صحت‌سنجی حل عددی معادله‌ی انتقال حرارت ناپایا

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از حل عددی معادله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی و ناپایا، به مقایسه‌ی این نتایج با پاسخ تحلیلی معادله پرداخته شده است.



شکل ۱. خطوط هم‌تراز دما برای نمایه‌های شماره ۱، ۷۵، ۱۵۰ و ۳۰۰.

معادله‌ی ۶ بوده و این امر نشان‌دهنده‌ی دقت بالای حل عددی معادله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی و دسته‌نمایه‌های ورودی مدل رتبه‌کاسته‌ی ناشی از این معادله است.

برای محاسبه‌ی پاسخ تحلیلی این معادله از نرم‌افزار میپیل استفاده می‌شود. به‌منظور وجود پاسخ تحلیلی و سهولت در استخراج آن توسط این نرم‌افزار، از شرط اولیه:

$$u(x, y, 0) = 1 \quad (4)$$

و شرایط مرزی همگن:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(1, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

استفاده شده است. در این صورت پاسخ تحلیلی معادله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی و ناپایا به دست آمده توسط نرم‌افزار میپیل مطابق معادله‌ی ۶ خواهد بود:

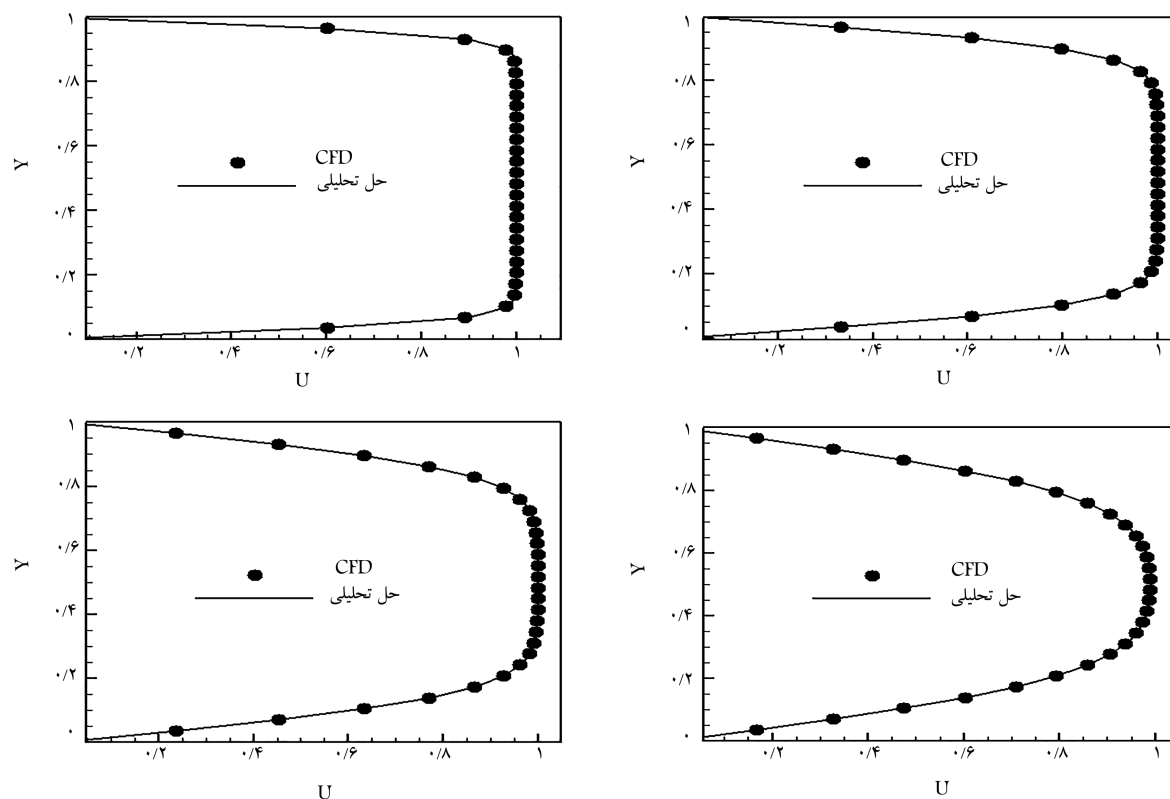
$$\begin{aligned} U(x, y, t) = \sum_{m=n=1}^{\infty} [& (-4 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y)) \\ & \times (-(-1)^{n+m} + (-1)^m + (-1)^n - 1) \\ & \times \left(\frac{e^{-\frac{1}{4} \pi^2 (n^2 + m^2) t}}{\pi^2 n m} \right)] \end{aligned} \quad (6)$$

سپس با حل عددی معادله‌ی ۶ به‌ازای بازه ۳ واحد زمانی، به مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از عددی حل معادله‌ی نفوذ پرداخته خواهد شد. بدین‌منظور در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب مقایسه توزیع درجه حرارت بر روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی برای نمایه‌های ۲۰، ۷۵، ۱۵۰ و ۳۰۰ حاصل از حل عددی معادله‌ی نفوذ حرارتی و حل عددی معادله‌ی ۶ به دست آمده از حل تحلیلی نمایش داده شده است.

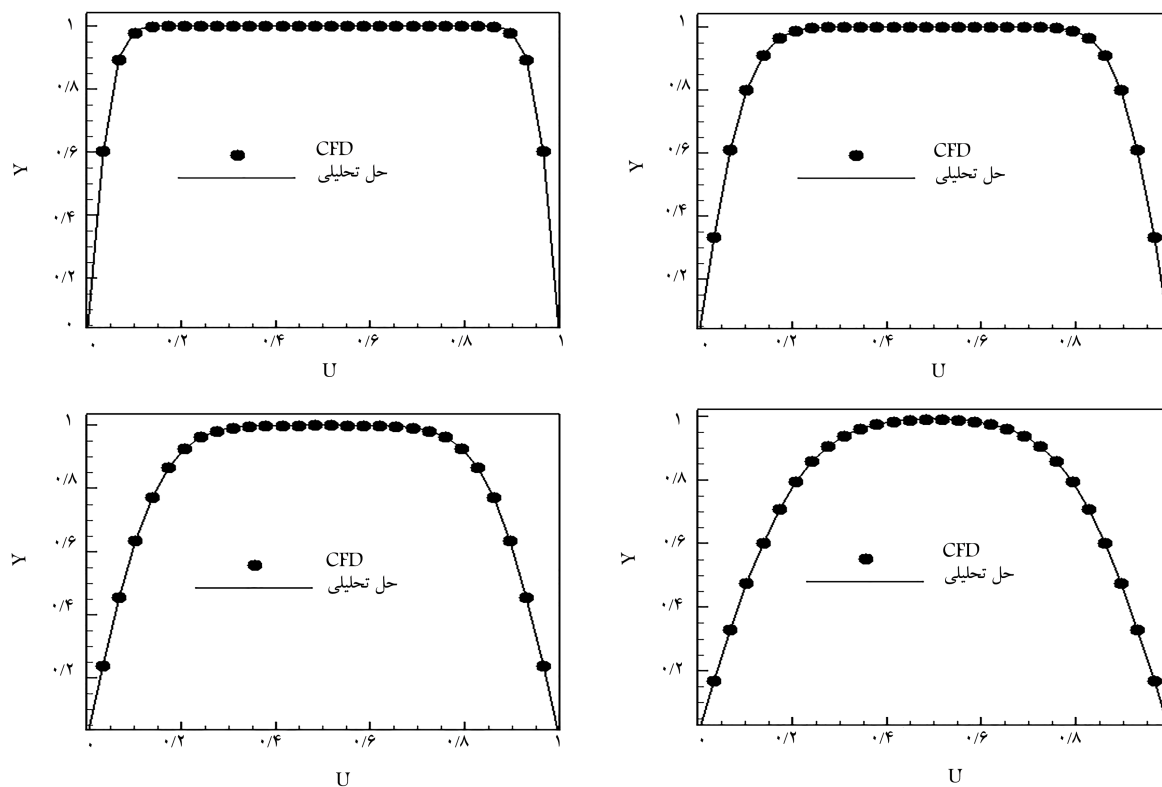
چنان‌که از نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۲ و ۳ مشخص است، حل عددی معادله‌ی نفوذ دوبعدی و ناپایا کاملاً منطبق بر نتایج حاصل از حل عددی

۳. روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی

روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی در سال ۲۰۰۸ توسط پیتراشمید پیشنهاد شد.^[۶] این روش قدرتمند مبتنی بر داده، به‌عنوان روشی برای جداسازی اجزای مختلف جریان و تعیین ساختارهای اصلی سازنده‌ی رفتار دینامیکی سیال معرفی شده است. در واقع این روش قادر به بررسی و تجزیه و تحلیل ساختار سیستم‌های پیچیده و غیرخطی بوده و امکان شناسایی ناحیه‌هایی از میدان را دارد که در آن نیروهای مختلف عمل کرده و رفتارهای دینامیکی اتفاق می‌افتد. این روش با تجزیه‌ی سیستم‌های پیچیده به مودهایی که هریک جنبه‌ی متفاوتی از رفتار دینامیکی سیستم را دارند عمل می‌کند. اما نکته‌ی حائز اهمیت این است که تجزیه‌ی سیستم به یکسری از مودها، باعث شناسایی مودهای اصلی خواهد شد که تشکیل‌دهنده‌ی رفتار دینامیکی سیستم هستند (مودهای دینامیکی). حال این امکان فراهم می‌آید تا با انتخاب این مودها و جداسازی آن‌ها از مودهای کم‌اهمیت‌تر و با استفاده از ترکیب خطی آن‌ها، سیستم اصلی به‌صورت دقیق بازسازی شود. همچنین می‌توان رفتار سیستم را در بلندمدت یا به‌ازای تغییر در مقدار پارامترهای مؤثر پیش‌بینی کرد. در ابتدا برای استفاده از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، به دنباله‌ی از داده‌ها نیازمندیم، که به‌صورت مجموعه‌ی از نمایه‌ها یا همان میدان‌های لحظه‌ی جریان مرتب خواهند شد. هر نمایه به‌عنوان یک شبکه‌ی محاسباتی دارای M گره سازنده‌ی شبکه در کنار هم بوده که در قالب بردار v_i مرتب خواهند شد. هر نمایه با یک فاصله‌ی زمانی ثابت Δt نسبت به نمایه‌ی قبلی ثبت خواهد شد. حال اگر به تعداد



شکل ۲. مقایسه بین توزیع درجه حرارت در راستای خط تقارن افقی برای دسته نمایه‌های شماره ۲۰ (بالا چپ)، شماره ۷۵ (بالا راست)، شماره ۱۵۰ (پایین چپ) و شماره ۳۰۰ (پایین راست).



شکل ۳. مقایسه‌ی توزیع درجه حرارت در راستای خط تقارن عمودی برای دسته نمایه‌های شماره ۲۰ (بالا چپ)، شماره ۷۵ (بالا راست)، شماره ۱۵۰ (پایین چپ) و شماره ۳۰۰ (پایین راست).

۴. تصویرسازی گالرکین و معادله‌ی سیستم دینامیکی

به منظور توسعه‌ی مدل رتبه‌کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل جمع یک بخش معدل‌گیری شده‌ی زمانی و یک بخش اغتشاشی نوشته می‌شود:

$$U = \bar{U} + U' \quad (۱۵)$$

بخش اغتشاشی را می‌توان بر اساس تقریب گالرکین و مبتنی بر جمع وزنی مودهای دینامیکی نوشت:

$$U' = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(\vec{x}) \quad (۱۶)$$

سپس رابطه‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱ جایگذاری می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U} + U') = \alpha (\nabla^T \bar{U} + \nabla^T U') \quad (۱۷)$$

در ادامه معادله‌ی حاصل در زیرفضای مودهای دینامیکی تصویرسازی خواهد شد. از آن‌جا که مودهای دینامیکی نسبت به یکدیگر متعامد نیستند، ضریب بخش‌گذرا با زمان مطابق با رابطه‌ی دلتای کرونکر ساده نخواهد شد. برای برطرف کردن این مشکل پایه‌های الحاقی محاسبه شده مطابق با رابطه‌ی ۱۸ در طرفین رابطه ضرب ماتریسی خواهد شد:

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x})))^{-1} \quad (۱۸)$$

در نتیجه معادله‌ی سیستم دینامیکی مبتنی بر مودهای دینامیکی به صورت یک دسته معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب زمان و به منظور محاسبه‌ی تغییرات زمانی ضرایب مودال زیر به دست می‌آید:

$$\frac{da^k(t)}{dt} + B_i^k a^i(t) + C^k = 0 \quad (۱۹)$$

ضرایب معادله‌ی فوق به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$B_i^k = -\alpha((\nabla^T \phi_i(\vec{x}), \phi_k^H(\vec{x})), \phi^{ad})$$

$$C^k = -\alpha((\nabla^T \bar{U}, \phi_k^H(\vec{x})), \phi^{ad}) \quad (۲۰)$$

در روابط فوق، α نفوذپذیری حرارتی، ϕ^{ad} پایه‌ی الحاقی، $a^i(t)$ ضریب مودال، \bar{U} مودهای دینامیکی، $\phi_k^H(\vec{x})$ مزدوج ترانهادی مودهای دینامیکی و $\phi_i(\vec{x})$ بخش متوسط‌گیری شده زمانی است.

۵. نتایج

در این بخش، به دست آوردن مدلی که با دقت مناسب قادر به پیش‌بینی دینامیک میدان باشد مد نظر است. با استفاده از این مدل، توزیع درجه حرارت درون میدان در بازه‌های زمانی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، با شبیه‌سازی عددی معادله‌ی نفوذ حرارتی روی صفحه‌ی مربع شکل (دوبعدی) به ابعاد ۵/۰ واحد، دسته‌نمایی لازم تولید شده است. از دسته‌نمایی‌های تولید شده جهت ورودی مدل رتبه‌کاسته در بازه زمانی ۳ واحد استفاده شده است. سپس با استفاده از دسته‌نمایی مقادیر اغتشاشی و مطابق با الگوریتم تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، فضای برداری مشتمل بر مودها به دست می‌آید. در شکل ۴ خطوط هم‌تراز هفت مود

N نمایه ثبت شود، سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطرو N ستون مرتب خواهد شد:

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (۷)$$

دو زیر مجموعه از ماتریس V_1^N در نظر گرفته خواهد شد:

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}]$$

$$V_r^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N] \quad (۸)$$

می‌توان هر نمایه را بر مبنای یک نگاشت خطی از نمایه‌ی قبلی به دست آورد. از آن‌جا که هر نمایه در فضای برداری به صورت یک ماتریس با ابعاد $M \times 1$ است، لذا برای تبدیل یک نمایه به نمایه‌ی قبلی باید از یک ماتریس نگاشت به نام A با ابعاد $M \times M$ بهره جست:

$$v_{i+1} = A v_i$$

$$V_r^N = A V_1^{N-1} \quad (۹)$$

ماتریس نگاشت A ماتریسی فرضی و حاوی اطلاعاتی پیرامون تکامل تدریجی سیستم بوده و در طول زمان ثابت است. چون هدف ما کاهش مرتبه‌ی سیستم است، با استفاده از تغییر مختصات سیستم به کمک ماتریس مودال Φ که تنها حاوی r مود غالب سیستم باشد، می‌توان بعد سیستم را به r کاهش داد. در این صورت می‌توان با استفاده از ترکیب خطی مختصات در سیستم رتبه‌کاسته، هر نمایه را بازسازی کرد. اما ماتریس A در اختیار نیست که با استفاده از آن، ماتریس مودال Φ تعیین شود. بنابراین برای دست‌یابی به این هدف، باید عبارتی را که متکی به ماتریس A نباشد، به دست آورد. برای این امر، ماتریس مستطیلی V_1^{N-1} با استفاده از روش تجزیه‌ی مقادیر تکین، تجزیه می‌شود:

$$V_1^{N-1} = U \sum W^T \quad (۱۰)$$

حال با قرار دادن تجزیه‌ی مقادیر تکین ماتریس V_1^{N-1} در معادله‌ی ۹، معادله‌ی ۱۱ عبارت خواهد بود از:

$$V_r^N = A U \sum W^T \quad (۱۱)$$

با توجه به این که ماتریس‌های U و W متعامد هستند، با ضرب دو عبارت U^T و \sum^{-1} در طرفین رابطه‌ی ۱۱، ماتریس S که مشابه ماتریس A و دارای مقادیر ویژه‌ی یکسان با آن است به صورت رابطه‌ی ۱۲ تعریف می‌شود:

$$U^T V_r^N W \sum^{-1} = U^T A U = S \quad (۱۲)$$

با تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس S ، می‌توان نوشت:

$$S Y = Y \Lambda \quad (۱۳)$$

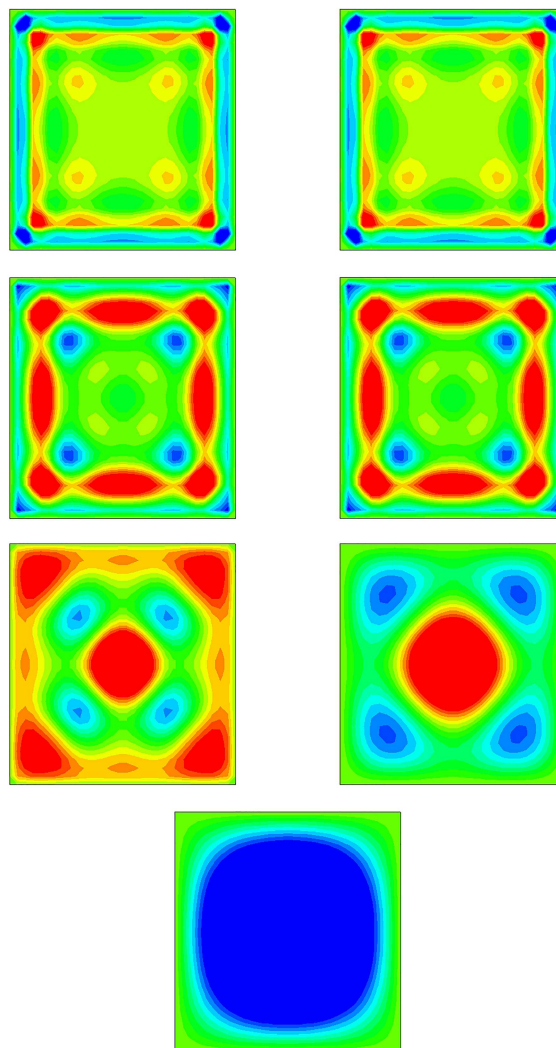
حال مودهای دینامیکی حاصل از روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، که بیان‌گر بردارهای ویژه‌ی غالب ماتریس A هستند، بر اساس رابطه‌ی ۱۴ و به صورت یک ماتریس با ابعاد $M \times r$ محاسبه خواهد شد:

$$\Phi = U S Y = V_r^N W \sum^{-1} Y \quad (۱۴)$$

میتنی بر یک پیمایش زمانی، معادله‌ی ۱۹ حل شده تا تغییرات ضرایب مودال محاسبه شود.

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه خواهند شد. لازم به ذکر است چون ماهیت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس نگاشت مختلط است، ماهیت ضرایب مودال نیز مختلط است. به همین دلیل مقایسه نتایج به تفکیک بخش حقیقی و موهومی بیان می‌شود. به طوری که در شکل ۵ و ۶ به ترتیب تغییرات زمانی بخش حقیقی و موهومی ضرایب مودال حاصل از حل معادله‌ی سیستم دینامیکی در مقایسه با تغییرات زمانی بخش حقیقی و موهومی ضرایب زمانی مودهای دینامیکی، نمایش داده شده است. مطابق نتایج نمایش داده شده، دقت داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با ضرایب زمانی مودهای دینامیکی بسیار بالا بوده و مدل رتبه‌کاسته‌ی حاصل به درستی تغییرات زمانی مسئله‌ی مورد نظر را پیش‌بینی می‌کند. لازم به ذکر است چون بخش حقیقی و موهومی ضرایب مودال پنجم، ششم و هفتم و ضرایب زمانی پنجم، ششم و هفتم مودهای دینامیکی بسیار ناچیز بوده (نزدیک به صفر) و تأثیری در روند حل مسئله ندارند، از نمایش این بخش از ضرایب صرف نظر شده است.

همچنین در شکل ۷ بازسازی خطوط هم‌تراز دمایی در آخرین گام زمانی به ازای بازه زمانی ۳ واحد و ضریب نفوذ 0.044 توسط مدل رتبه‌کاسته، با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده است. همان‌طور که از نتایج به دست آمده مشخص است، توزیع درجه حرارت درون میدان با دقت بالایی توسط مدل رتبه‌کاسته پیش‌بینی می‌شود.



شکل ۴. خطوط هم‌تراز هفت مود دینامیکی میدان (بخش حقیقی) برای دسته‌نمایی حاصل مربوط به معادله‌ی نفوذ حرارتی به‌ازای نفوذپذیری حرارتی 0.044 .

اصلی میدان یا همان مودهای دینامیکی نمایش داده شده است. لازم به ذکر است از آن‌جا که مودهای دینامیکی متعامد نیستند، به همین دلیل نمی‌توان انرژی مختص به هر یک از مودهای دینامیکی را به طور جداگانه بیان کرد. در نتیجه هفت مود دینامیکی استخراج شده از لحاظ محتوای انرژی، نسبت به یکدیگر تقدیمی ندارند و با استفاده از ترکیب خطی این هفت مود دینامیکی می‌توان میدان را با دقت قابل قبولی بازسازی کرد.

۷. انتگرال‌گیری از معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته به‌ازای ضرایب نفوذ مختلف

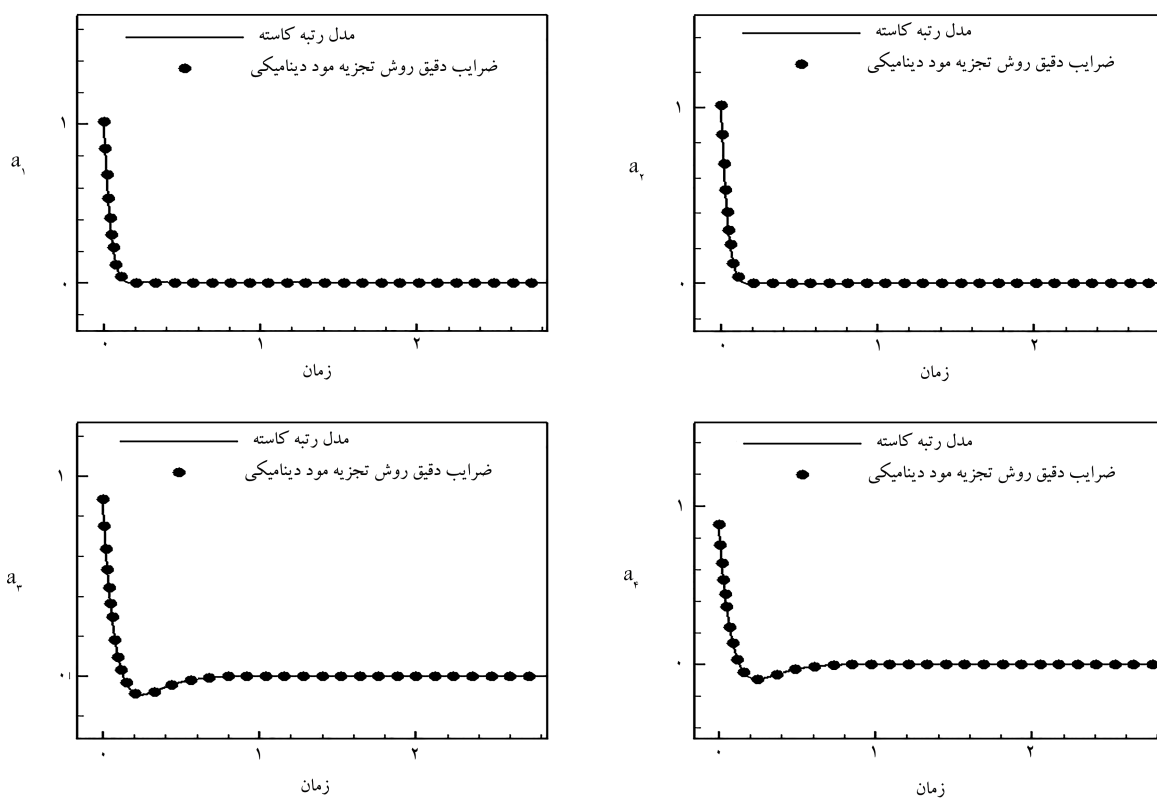
در بخش قبلی، با توجه به دقت بالای بازسازی میدان نفوذ حرارتی در بازه زمانی کوتاه ۳ واحد و به‌ازای ضریب نفوذ 0.044 توسط مدل رتبه‌کاسته توسعه یافته، مدلی جایگزین به منظور پیش‌بینی دینامیک میدان به دست آمد. انتظار می‌رود به منظور توسعه مدلی پارامتری، مدل حاصل بتواند به‌عنوان الگویی جایگزین برای پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه زمانی کوتاه ۳ واحد و به‌ازای تغییر در مقادیر پارامترهای مؤثر از جمله ضریب نفوذ حرارتی به کار رود. در شکل ۸ توزیع درجه حرارت بر روی خط مرکزی تقارن افقی و عمودی در آخرین گام زمانی به‌ازای ضرایب نفوذ، 0.002 ، 0.008 و 0.014 نمایش داده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

۸. انتگرال‌گیری از معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی بلند

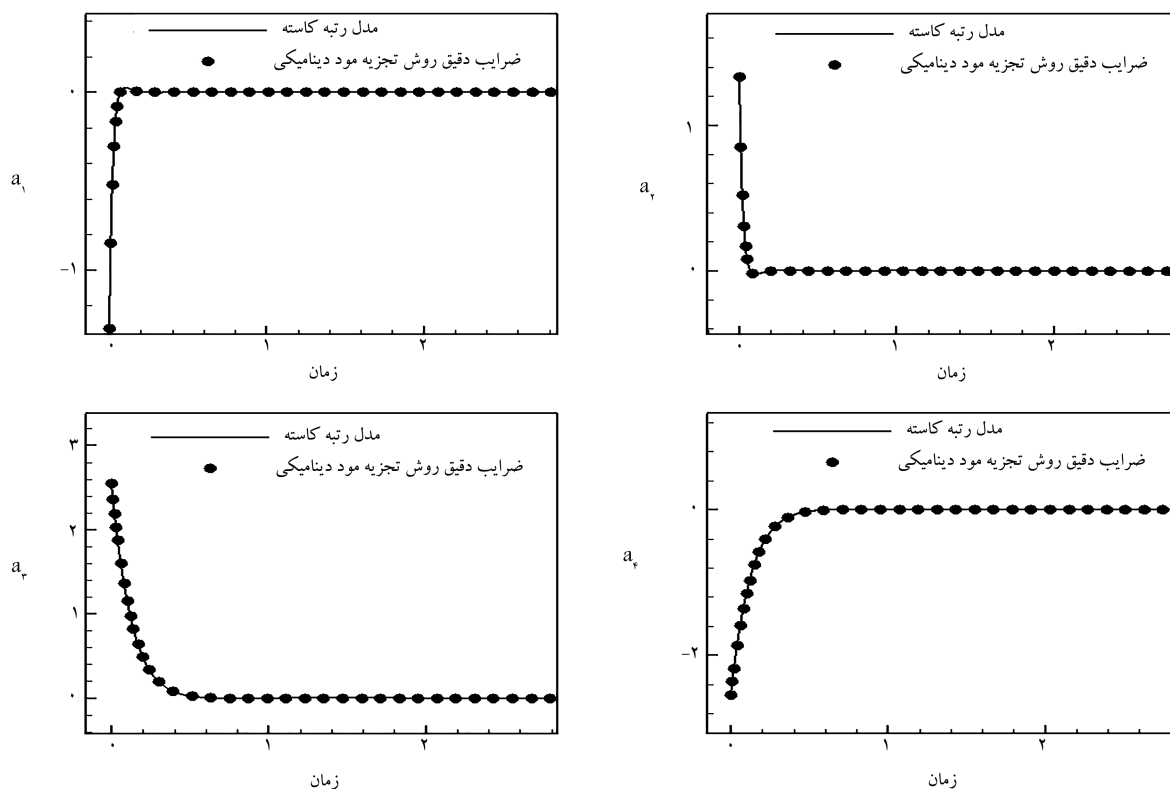
با توجه به دقت بالای پیش‌بینی تغییرات زمانی فرایند نفوذ حرارتی (ضرایب مودال) در بازه زمانی کوتاه ۳ واحد و به‌ازای ضریب نفوذ حرارتی 0.044 توسط مدل رتبه‌کاسته توسعه یافته، انتظار می‌رود مدل رتبه‌کاسته به دست آمده علاوه بر پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه زمانی کوتاه ۳ واحد و به‌ازای تغییر در مقدار ضریب نفوذ حرارتی، قادر به پیش‌بینی تغییرات میدان در بازه‌های زمانی مختلف به‌ازای ضریب نفوذ حرارتی 0.044 باشد. بدین منظور در شکل ۹ توزیع درجه حرارت بر روی

۶. انتگرال‌گیری از معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

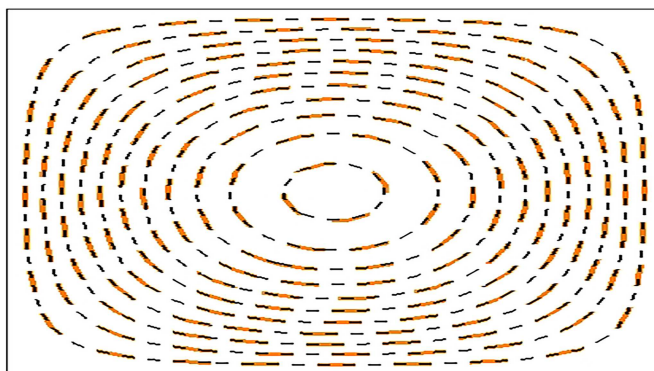
با مشخص شدن تعداد مودها به منظور بازسازی مدل رتبه‌کاسته، ضرایب زمانی سمت راست معادله‌ی ۱۹، در بازه ۳ واحد زمانی با استفاده از گام زمانی 0.001 و به‌ازای ضریب نفوذ 0.044 محاسبه می‌شود. سپس با بهره‌گیری از روش رانگ - کوتا مرتبه‌ی چهارم که روش دقیق و پایداری برای حل مسائل وابسته به زمان است،



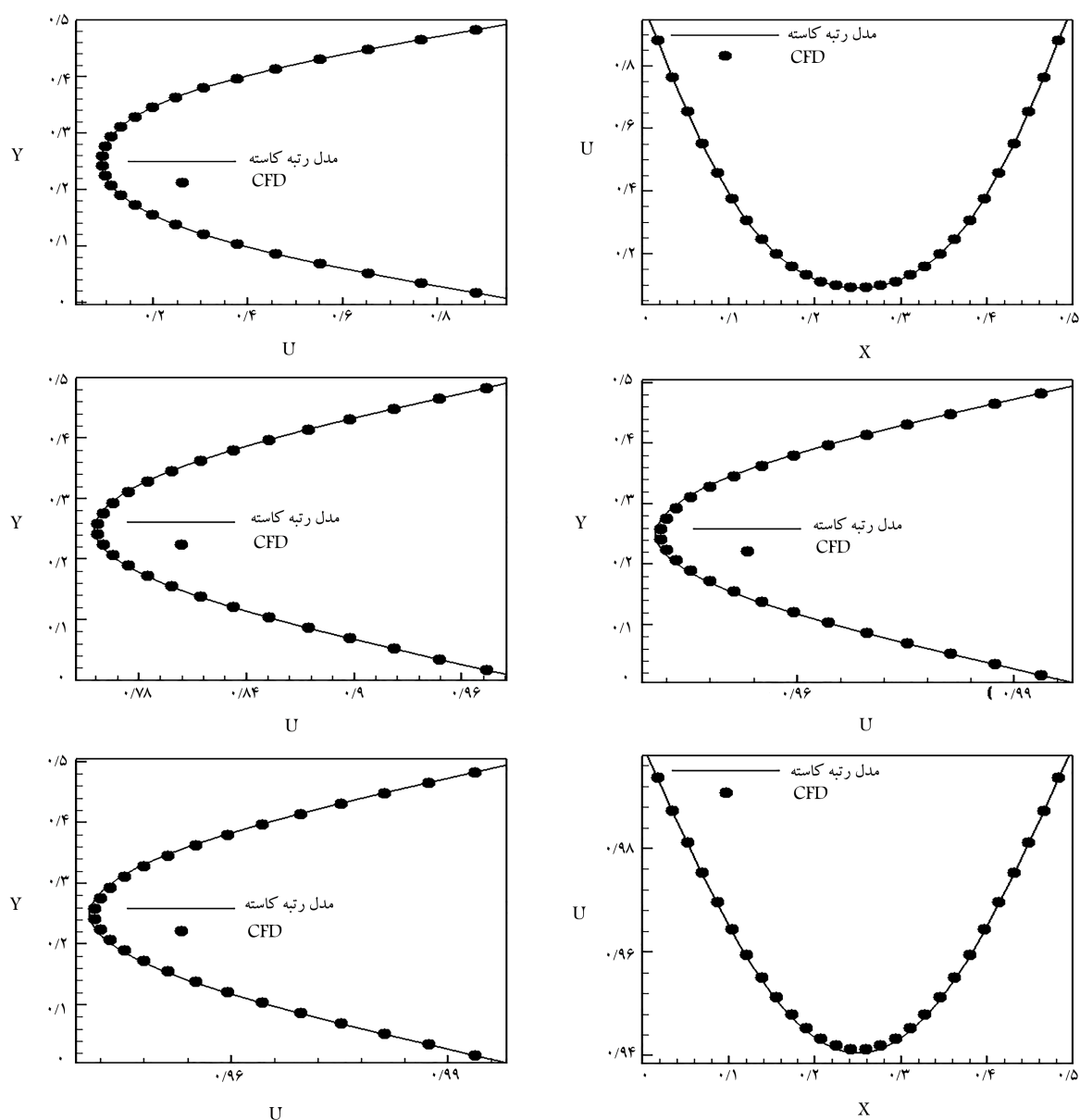
شکل ۵. مقایسه تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال حاصل از حل معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با بخش حقیقی ضرایب زمانی حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها.



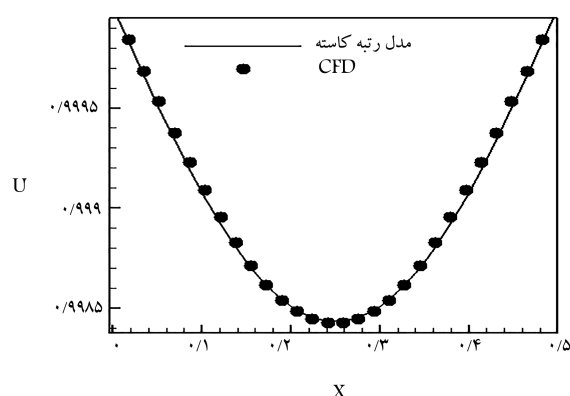
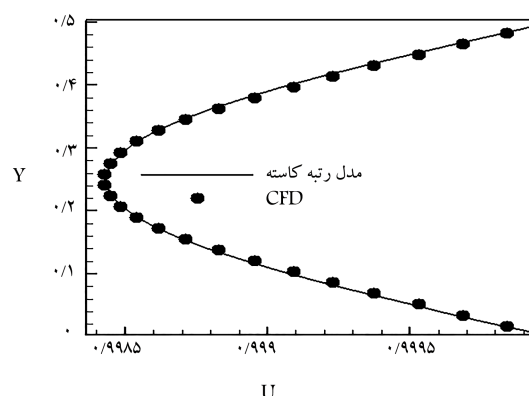
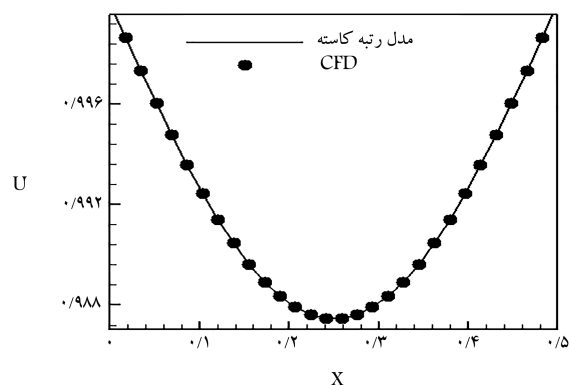
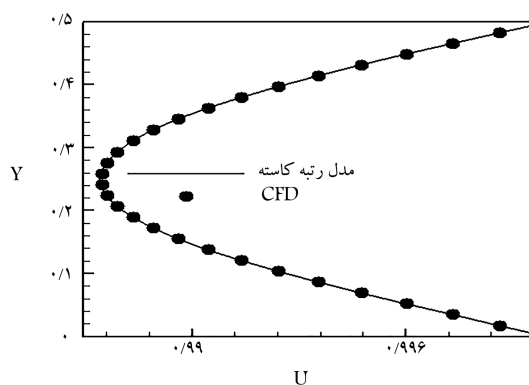
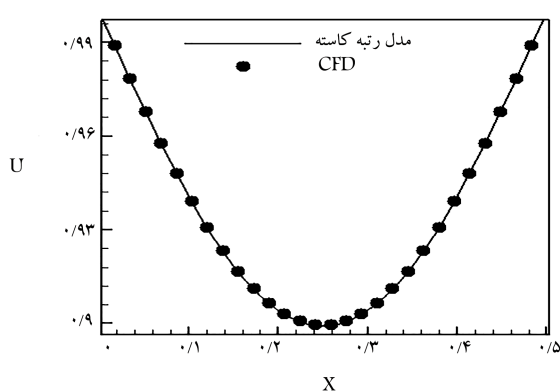
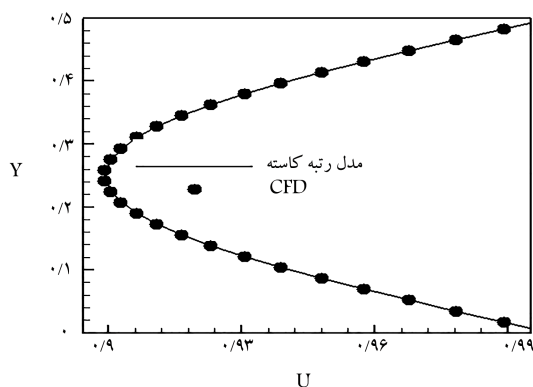
شکل ۶. مقایسه تغییرات زمانی بخش موهومی ضرایب مودال حاصل از حل معادله‌ی سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته با بخش موهومی ضرایب زمانی حاصل از تصویرسازی نمایه‌ها.



شکل ۷. مقایسه‌ی خطوط هم‌تراز دما برای آخرین گام زمانی به ازای بازه زمانی ۳ واحد و ضریب نفوذ 0.0044 .



شکل ۸. مقایسه‌ی توزیع درجه حرارت برای آخرین گام زمانی در راستای خط مرکزی تقارن افقی (ستون سمت چپ) و در راستای خط مرکزی تقارن عمودی (ستون سمت راست) به ازای ضریب نفوذ 0.002 (ردیف یک) - 0.008 (ردیف دو) - 0.014 (ردیف سه).



شکل ۹. مقایسه‌ی توزیع درجه حرارت برای آخرین گام زمانی در راستای خط تقارن افقی (ستون سمت چپ) و در راستای خط تقارن عمودی (ستون سمت راست) به ازای ۸۰۰۰ گام زمانی (ردیف یک) - ۱۴۰۰۰ گام زمانی (ردیف دو) - ۲۰۰۰۰ گام زمانی (ردیف سه).

مربوطه راکاهش دهد. بدین منظور انتخاب دسته نمایه‌ی مورد نظر می‌تواند در کیفیت مدل رتبه‌کاسته و دقت نتایج به دست آمده تأثیرگذار باشد. در این پژوهش به توسعه‌ی مدل رتبه‌کاسته برای مسئله‌ی نفوذ حرارتی دوبعدی پرداخته‌ایم. با به کارگیری روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی و انتقال معادلات حاکم بر مسئله به فضای برداری تشکیل شده از مودهای دینامیکی، مودهای اصلی و سازنده رفتارهای دینامیکی میدان به دست آمده و در نتیجه با توسعه‌ی مدلی رتبه‌کاسته، ضمن کاهش درجه آزادی نسبت به مدل اصلی، دینامیک میدان مورد نظر با تعداد ابعاد کم‌تر و با دقتی مناسب بازسازی شده است. این درحالی است که یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی، بازسازی دسته نمایه‌های اولیه و پیش‌بینی وضعیت رفتاری سیستم در بلندمدت، تنها با استفاده از ترکیب خطی مودهای اصلی به دست آمده است. اما چنان که بیان شد، در این پژوهش مدل رتبه‌کاسته توسعه یافته مبتنی

خط مرکزی تقارن افقی و عمودی در آخرین گام زمانی به‌ازای ۸۰۰۰، ۱۴۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ گام زمانی نمایش داده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

۹. نتیجه‌گیری

انگیزه‌ی اصلی این تحقیق، کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی برای سیستم‌های دینامیکی با استفاده از ابزارهای قدرتمند در این زمینه است. روش تجزیه‌ی مودهای دینامیکی به عنوان یک ابزار محاسباتی نسبتاً دقیق و پرسرعت، به کمک مدل‌های دینامیک سیالات محاسباتی آمده تا با کاهش هزینه‌های محاسباتی، پیچیدگی‌های شبیه‌سازی

بررسی شده است. نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته به دست آمده با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل عددی مقایسه شده که دقت بالا و توانایی‌های مناسب در این روش را نشان می‌دهد. در نتیجه می‌توان گفت با بهره‌گیری از این روش می‌توان الگوهای دقیق و سریع مبتنی بر مفاهیم اساسی روش‌های یادگیری ماشین را توسعه داد.

بر معادله‌ی اصلی حاکم بر مسأله (معادله‌ی نفوذ حرارتی) بوده و در نتیجه معادله‌ی سیستم دینامیکی به صورت یک دسته معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول به دست آمده است. در نتیجه با بهره‌گیری از این مدل و حل یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به جای حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، تغییرات میدان در بلندمدت به‌ازای ضریب نفوذ ثابت و تغییرات میدان در یک بازه زمانی کوتاه به‌ازای ضرایب نفوذ مختلف

پانوشته‌ها

1. proper orthogonal decomposition
2. higher order dynamic modes decomposition

منابع (References)

1. Chen, Y. "Model order reduction for nonlinear systems", M. Sc. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1999).
2. Wilhelmus, H. A. S. and Van der V. Henk, A. "Model Oreder Reduction", Springer (2008).
3. Liang, Y.C. "Proper orthogonal decomposition and Its applications - part I: theory", **252**, pp. 52-544 (2002).
4. Edwards, W.S., Tuckerman, L.S., Friesner, R.A. and et al. "Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations", *J. Comp. Phys*, **110**, pp. 82-102 (1994).
5. Lehoucq, R.B. and Scott, J.A. "Implicitly restarted arnoldi methods and subspace iteration", *SIAM J. Matrix Anal. Appl*, **23**, pp. 551-562 (1997).
6. Schmid, P.J. and Sesterhenn, J.L. "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data", In Bull. Amer. Phys. Soc., 61st APS meeting, p. 208. San Antonio (2008).
7. Rowley, C.W., Mezic'I., Bagheri, S. and et al. "Spectral analysis of nonlinear flows", *J. Fluid Mech*, **641**, pp. 115-127 (2009).
8. Muld, T.W. and Efraimsson, G. "Flow structures around a high-speed train extracted using proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition", *Computers & Fluids*, **57**, pp. 87-97 (2012).
9. Duke, D., Soria, J. and Honnery, D. "An error analysis of the dynamic mode decomposition", *Exp. Fluids*, **52**(2), pp. 529-542, February, (2012).
10. Grilli, M., Schmid, P.J., Hickel, S. and et al. "Analysis of unsteady behaviour in shock-wave turbulent boundary layer interaction", *J. Fluid Mech*, **700**, pp. 16-28 (2012).
11. Seena, A. and Sung, H.J. "Spatiotemporal representation of the dynamic modes in turbulent cavity flows", *Int. J. Heat Fluid Flow*, **44**, pp. 1-13 (2013).
12. Sarmast, S. and et al. "Mutual inductance instability of the tip vortices behind a wind turbine", *Journal of Fluid Mechanics*, **755**, pp. 705-731 (2014).
13. Vinha, N., Meseguer-Garrido, F., Vicente, J.D. and et al. "A dynamic mode decomposition of the saturation process in the open cavity flow", *Aerosp. Sci. Technol*, **52**, pp. 198-206 (2016).
14. Hong, S.L. and Huang, G.P. "Introducing DMD method to study dynamic structures of flow separation with and without control", *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin*, **38**(8) 120876, (2017).
15. Liu, H., Yan, C., Zhao, Y. and et al. "Analysis of pressure fluctuation in transonic cavity flows using modal decomposition", *Aerosp. Sci. Technol*, **77**, pp. 819-835 (2018).
16. Le Clainche, S. and et al. "Wind predictions upstream wind turbines from a LiDAR database", *Energies*, **11**(3), **543** (2018).
17. Saito, A. and Kuno, T. "Data-driven experimental modal analysis by dynamic mode decomposition", *Journal of Sound and Vibration: 115434*, (2020)
18. Qiang, L. and et al. "Numerical investigation on flow field characteristics of dual synthetic cold/hot jets using POD and DMD methods", *Chinese Journal of Aeronautics*, **33**(1), pp. 73-87 (2020).
19. Kong, X. and et al. "Short-term electrical load forecasting based on error correction using dynamic mode decomposition", *Applied Energy*, **261**, 114368 (2020)
20. Kaptanoglu, A.A. and et al. "Characterizing magnetized plasmas with dynamic mode decomposition", *Physics of Plasmas*, **27**(3), 032108, (2020).