

حل تحلیلی معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه

محمدجواد فردادی شیل سر (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مهدی مظاهری* (دانشیار)

جمال محمد ولی سامانی (استاد)

گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده‌ی کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)
دوری ۳-۲، شماره ۱، ص. ۳۵-۴۹، (پژوهشی)

در این پژوهش، با روش تبدیل لاپلاس حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی در دامنه‌ی محدود برای شبکه‌ی رودخانه به ازای شرایط مرزی بالادست و پایین دست دیریکله و شرط اولیه‌ی صفر استخراج شد و شبیه‌سازی برای دو شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت و متغیر انجام شد. بعد از نام‌گذاری گره‌ها، با تشکیل ماتریس‌های نحوه‌ی اتصال، مشخصات جریان و هندسی رودخانه برای هر شبکه به عنوان ورودی مسئله، ماتریس انتشار براساس تابعی از متغیر لاپلاس ایجاد می‌شود که با حل دستگاه پیچیده‌ی ایجاد شده و استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس، مقدار غلظت در هر گره محاسبه می‌شود. در نهایت برای اعتبارسنجی، حل تحلیلی با حل عددی مقایسه و سپس شاخص‌های خطای آماری محاسبه شد. در شبیه‌سازی‌های انجام شده، به علت تغییر دبی ورودی به هر شاخه و تغییر سطح مقطع جریان در هر شاخه، در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر تغییرات غلظت آلودگی به صورت افزایشی یا کاهش رخ می‌دهد. نتایج حاکی از عملکرد مطلوب و توانایی بالای حل تحلیلی در مدل‌سازی دو شبکه‌ی مذکور و انطباق خوب آن با حل عددی است که به دلیل دقت و سرعت محاسبات بالا می‌تواند جایگزین حل عددی شود. همچنین از حل تحلیلی موجود می‌توان به عنوان ابزاری برای صحت‌سنجی سایر حل‌های تحلیلی در شبکه‌ی رودخانه استفاده کرد.

واژگان کلیدی: حل تحلیلی، روش تبدیل لاپلاس، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش، شبکه‌ی رودخانه، تابع توزیع غلظت.

m.fardadi@modares.ac.ir
m.mazaheri@modares.ac.ir
samani.j@modares.ac.ir

۱. مقدمه

نقش آب به عنوان یک ماده‌ی حیاتی برای حفظ حیات، فعالیت‌های بشر، محیط زیست و منابع آن انکارناپذیر است. ورود مواد آلاینده یک تهدید بسیار جدی برای منابع آب محسوب می‌شود، از این رو مسئله‌ی انتقال آلودگی و میزان آن از عوامل مهم و قابل بررسی در محیط زیست است. رودخانه‌ها یکی از مهم‌ترین منابع آب در جهان به شمار می‌روند که وظیفه‌ی تأمین آب شرب و آب لازم در بخش صنعت و کشاورزی را بر عهده دارند، پس بایستی بیشتر از لحاظ کیفیت آب و آلودگی آن مورد توجه قرار گیرند.

«شبکه‌ی رودخانه» متشکل از تمامی مسیرهایی است که توسط هر شاخه‌ی رودخانه‌ی اصلی در حوضه زهکشی خود تشکیل شده است. شبکه‌های رودخانه‌یی به عنوان اتصالات ایستایی بین گره‌های ثابت که بر اساس توپوگرافی زمین تعریف شده‌اند تصور می‌شوند.^[۱-۴] عملکرد زیست‌محیطی شبکه‌های رودخانه‌یی می‌تواند به طور قابل توجهی توسط شرایط هیدرولیکی نامساعد که موجودات زنده‌ی موجود در آب مانند ماهی‌ها و ... را به چالش می‌کشد، کاهش یابد.^[۲-۶] بنابراین مسئله‌ی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۵/۳۱، اصلاحیه ۱۴۰۰/۸/۱۷، پذیرش ۱۴۰۰/۸/۱۸.

DOI:10.24200/J40.2021.58767.1613

آلودگی یک شبکه‌ی رودخانه صدمات شدیدی به انسان‌ها، موجودات زنده و محیط زیست وارد خواهد کرد و هزینه‌ی پاک‌سازی آن نسبت به یک شاخه‌ی رودخانه بیشتر است. همچنین با توجه به این که یک شبکه‌ی رودخانه می‌تواند به تعدادی روستا یا شهر یا حتی کشور متصل باشد، از این رو خسارات ناشی از آلودگی بین عوامل ذکر شده تقسیم می‌شود. بنابراین می‌توان از طریق مدل‌سازی ریاضی سهم هریک از عوامل را در آلوده‌سازی شبکه‌ی رودخانه پیدا کرد.^[۷]

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر انتقال و انتشار آلاینده‌ها در رودخانه معادله‌ی جابه‌جایی^۱ - پراکندگی^۲ - واکنش (ADER)^۳ بوده که از نوع معادلات دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی نسبت به مکان و زمان است. این معادله از قانون اول فیک^۴ به دست آمده و پاسخ آن یک تابع توزیع غلظت برحسب مکان و زمان در رودخانه خواهد بود. برای یک شبکه‌ی رودخانه، استفاده از مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی معادله‌ی ADRE به دلیل وقت‌گیر بودن محاسبات آنها و کمبود داده برای اعتبارسنجی آنها امکان‌پذیر نیست و استفاده از مدل یک‌بعدی ADRE برای پیش‌بینی غلظت آلاینده در یک شبکه‌ی رودخانه توصیه می‌شود.^[۸]

گزارش‌ها حاکی از آن است که تقریباً تمامی پژوهش‌های انجام گرفته تاکنون برای حل معادله‌ی ADRE، در یک شاخه از رودخانه بوده و آن هم به صورت

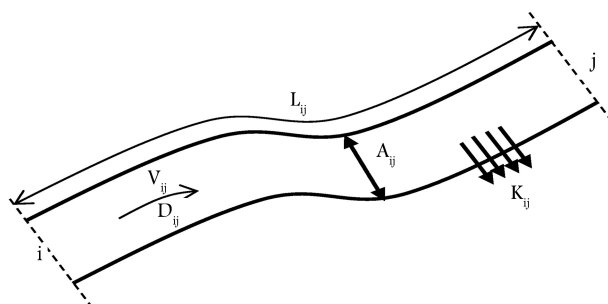
عددی یا تحلیلی است. اما تاکنون برای شبکه‌ی رودخانه حل تحلیلی انجام نشده و تنها حل‌های عددی، آن هم به صورت محدود، انجام گرفته است که از آن جمله می‌توان به پژوهش ژانگ و همکاران^[۹] اشاره کرد که در آن، یک مدل هیدرودینامیکی و کیفی آب مبتنی بر روش اتصال رودخانه برای شبکه‌ی رودخانه به صورت عددی با استفاده از روش جداسازی معادله‌ی ADE ارائه شد. هیتون و همکاران^[۱۰] نیز در پژوهشی، معادله‌ی انتقال املاح و مواد را در یک سیستم زیست‌شناختی و ژئوفیزیکی گیاهی شبکه‌های قارچی میسلیوم (قسمت رویشی قارچ، که املاح از طریق آن جذب می‌شود) با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی با در نظر گرفتن شرایط مرزی ثابت در همه‌ی گره‌ها، حل کردند و با در نظر گرفتن آمینواسید به عنوان منبع مغذی و با استفاده از آزمایش ردیاب رادیویی، داده‌های حاصل از آزمایش‌ها و عکس‌برداری و نیز نحوه‌ی پخش و انتقال آن را به کل انشعابات بررسی کردند. تقریباً تمامی معادلات دیفرانسیل را می‌توان با روش‌های عددی حل کرد و این یک مزیت حل‌های عددی نسبت به حل‌های تحلیلی است، ولی گاهی روش‌های عددی زمان‌بر و هزینه‌بر است و از این رو روش‌های حل تحلیلی بیشتر توصیه می‌شود. به طور کلی حل‌های تحلیلی به دلیل بالا بودن سرعت انجام محاسبات و میزان دقت بر روش‌های عددی ارجحیت دارند و از آنها به عنوان ابزاری برای صحت‌سنجی روش‌های عددی استفاده می‌شود.^[۱۱]

تا به امروز حل‌های تحلیلی بسیاری برای معادله‌ی ADRE در یک شاخه‌ی رودخانه توسط محققین ارائه شده است، از این رو می‌توان گفت که عموماً حل‌های تحلیلی صورت گرفته برای معادله‌ی ADRE مبتنی بر چهار روش حل -- روش تابع گرین^۵، روش تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته^۶، روش تبدیل لاپلاس^۸ هستند. در زمینه‌ی حل تحلیلی با استفاده از روش تابع گرین، پارک و ژان^[۱۲] در پژوهشی، معادله‌ی یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی انتقال آلودگی را با ضرایب ثابت و صرف‌نظر از گرادین سرعت در راستای عرض و عمق در یک آبخوار محصور حل کردند. در پژوهشی دیگر معادله‌ی ADE، با فرض یکنواختی جریان و ثابت بودن ضرایب به صورت تحلیلی حل شد.^[۱۳] از کاربردهای دیگر روش تابع گرین نیز می‌توان به مدل‌سازی انتقال آلودگی با حل معادله‌ی ADE در حالت یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی در دامنه‌های محدود، نیمه‌محدود و نامحدود در محیط متخلخل اشاره کرد.^[۱۴] در این راستا، سانسکریتیان و همکاران^[۱۵] معادله‌ی یک‌بعدی ADE را با استفاده از ترکیب روش تابع گرین و تغییر متغیر با الگوی آلودگی نقطه‌یی و با در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی به صورت تابعی از زمان و مکان حل کردند. آنان در پژوهشی دیگر^[۱۶] معادله‌ی دوبعدی ADE را با روش تابع گرین و با در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی در راستای طولی و عرضی تابعی از زمان و مکان در محیط آب زیرزمینی حل کردند و اثرات سرعت و ضریب پراکندگی را با الگوی آلودگی نقطه‌یی نشان دادند. در زمینه‌ی کاربرد روش تابع گرین در رودخانه، مشهد گرما و همکاران^[۱۷] در پژوهشی معادله‌ی یک‌بعدی و دوبعدی انتقال جرم را با استفاده از روش تابع گرین به ازای چند منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوی نامنظم در محیط رودخانه حل کردند و نتایج حل تحلیلی را با حل عددی اعتبارسنجی کردند. یکی دیگر از روش‌های حل تحلیلی استفاده از روش انتگرال تعمیم‌یافته‌ی GITT است، که مبتنی بر روش توابع ویژه است.^[۱۸] یکی از کاربردهای مهم این روش توانایی بالای آن در حل مسائل پیچیده‌ی معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، شرایط مرزی و دامنه‌ی حل است.^[۱۹] آدریان و همکاران^[۲۰] معادله‌ی ADRE را با روش تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته با فرض ضرایب ثابت در دامنه‌ی نیمه‌محدود با در نظر گرفتن شرایط مرزی بالادست دیریشلت و حد غلظت در بی‌نهایت در پایین‌دست حل کردند؛ سپس رابطه‌ی استخراج شده را با دو حل تحلیلی درسناک و داینیز^[۲۱] و یو

همکاران^[۲۲] صحت‌سنجی کردند. همچنین محققینی از جمله چن و همکاران^[۲۳] و گورو و اسکاگس^[۲۴] استفاده از روش GITT را مورد نظر داشته‌اند.

روش تبدیل فوریه یکی از روش‌های قدیمی حل تحلیلی بوده که همچنان مورد توجه محققینی مانند بهارانی و همکاران^[۲۵] و شکلا^[۲۶] است. یانگ و همکاران^[۲۷] در پژوهشی با استفاده از تبدیل معکوس فوریه^۹ و توزیع گسترده‌ی گاوسی^{۱۰}، معادله‌ی ADE یک‌بعدی را با مشتق سازگار توسعه دادند و به معادله‌ی CADE^{۱۱} تبدیل کردند و نشان دادند که از راه حل استخراج شده می‌توان برای توصیف دقیق جریان سیال و انتقال املاح بهره جست. از دیگر مزایای روش تبدیل فوریه می‌توان به توانایی آن برای مدل‌سازی انتقال املاح واکنش‌ناپذیر در محیط ناهمگن با ضرایب متغیر اشاره کرد.^[۲۸] در پژوهشی که توسط سیمپسون و الری^[۲۹] انجام شد، معادله‌ی یک‌بعدی ADE را با استفاده از تبدیل لاپلاس و سری مک‌لورن و با در نظر گرفتن ضرایب ثابت و دامنه‌ی نیمه‌محدود حل کردند و نتایج را با حل عددی اعتبارسنجی کردند. ویلیامز و توماسکو^[۳۰] معادله‌ی ADE را در حالی حل کردند که از ترم منبع صرف‌نظر کردند و معادله را با ضرایب ثابت و در دامنه‌ی نیمه‌محدود با روش تبدیل لاپلاس حل کردند. اخیراً نیز محققین برای حل معادله‌ی انتقال آلودگی به صورت تحلیلی، از ترکیب روش لاپلاس با روش انتگرال تعمیم‌یافته استفاده می‌کنند. کومار و سادهندرا^[۳۱] طی پژوهشی معادله‌ی انتقال آلودگی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و GITT با در نظر گرفتن شرایط مرزی نوع اول و سوم در بالادست به صورت الگوی زمانی تابع نمایی در محیط متخلخل و به صورت تحلیلی حل کردند. همچنین در پژوهشی دیگر، از ترکیب روش لاپلاس و GITT به منظور حل معادله‌ی انتقال جرم با در نظر گرفتن ترم‌های مختلف منبع در محیط متخلخل استفاده شده است.^[۳۲] روش تبدیل لاپلاس یک ابزار تحلیلی قدرتمند برای حل مسائل پیچیده‌ی ریاضی است. در تحقیقی کار^[۳۳] با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معادله‌ی انتقال جرم را در یک محیط متخلخل m لایه با شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست نوع سوم، به صورت نیمه‌تحلیلی حل کرد و از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی استفاده کرد و نهایتاً حل خود را با حل عددی و سایر روش‌های تحلیلی مقایسه کرد. یداو و کومار^[۳۴] معادله‌ی دوبعدی انتقال آلودگی را در یک دامنه‌ی نیمه‌محدود با در نظر گرفتن شرط مرزی بالادست نوع اول، شرط اولیه و ترم منبع حل کردند. در پژوهشی دیگر نیز معادله‌ی سه‌بعدی انتقال جرم با استفاده از تبدیل لاپلاس، در یک دامنه‌ی نیمه‌محدود و با شرط مرزی بالادست نوع اول (دریکله) به صورت غلظت ثابت در محیط متخلخل حل شد.^[۳۵] اخیراً، پژوهشگران از روش تبدیل لاپلاس برای حل معادله‌ی ADE در یک شاخه از رودخانه استفاده کرده و راه حل‌های تحلیلی مفیدی با استفاده از این روش برای محیط رودخانه ارائه کردند.^[۳۶، ۳۷] همچنین استفاده از روش تبدیل لاپلاس در محیط متخلخل مورد توجه بسیاری از محققین نظیر کومار و همکاران^[۳۸] و بیتس^[۳۹] بوده است. با توجه به مروری بر تحقیقات انجام شده، امروزه حل یک‌بعدی معادله‌ی انتقال آلودگی با ضرایب ثابت یا متغیر در رودخانه‌ی مورد نظر بسیاری از پژوهشگران ایرانی بوده است و در این زمینه راه حل‌های مفیدی ارائه کرده‌اند.^[۴۰-۴۲] همچنین برآورد ضریب پراکندگی در رودخانه‌ها نیز امری مهم بوده که در خصوص برآورد و تخمین آن، محققین بسیاری در این راستا با به کارگیری روش‌های مختلفی تلاش کرده‌اند.^[۴۳، ۴۴]

امروزه شبکه‌های رودخانه‌ی بسیاری در ایران و جهان وجود دارد و برای شبیه‌سازی آلودگی ناشی از غلظت آلاینده‌ها در این شبکه‌ها، از مدل‌های عددی مبتنی بر روش‌های عددی یا روش‌های جداسازی عددی استفاده می‌شود؛ این مدل‌ها دارای خطا هستند و تاکنون حل تحلیلی برای آنها ارائه نشده است. از طرفی حل‌های تحلیلی خود مبنا بوده و به دلیل دقت بالاتر نسبت به روش‌های عددی، ابزاری برای



شکل ۱. ویژگی‌های یک شاخه‌ی رودخانه در یک شبکه‌ی رودخانه.

با فرایندهای جابه‌جایی و پراکندگی حرکت می‌کند؛ در این صورت فرض می‌شود که سیستم اختلاط کامل در گره‌ها وجود دارد. در شکل ۱ یک شاخه‌ی رودخانه‌ی شماتیک ملاحظه می‌شود که در آن، گره i به عنوان گره ورودی (بالادست رودخانه)، گره j به عنوان گره خروجی (پایین‌دست رودخانه)، L_{ij} طول یک شاخه‌ی رودخانه، A_{ij} سطح مقطع جریان، D_{ij} مقدار ضریب پراکندگی در راستای x ، K_{ij} بیان‌گر ضریب زوال واکنش و V_{ij} سرعت متوسط جریان در یک شاخه است و زمانی مقدار آن مثبت خواهد بود که جهت جریان از گره i به j باشد ($V_{ij} = -V_{ji}$).

۲.۲. معادلات اساسی مدل‌سازی

برای یک شبکه‌ی رودخانه فرض می‌شود که آلودگی با سازوکارهای جابه‌جایی و پراکندگی حرکت می‌کند و در سرتاسر شبکه پخش می‌شود؛ در نتیجه تغییر غلظت در هر نقطه انجام می‌گیرد. با توجه به شکل ۱، معادله‌ی انتقال و انتشار آلودگی برای یک شاخه‌ی رودخانه در دامنه‌ی محدود $0 \leq x \leq L_{ij}$ به صورت معادله‌ی ۱ در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} = D_{ij} \frac{\partial^2 c_{ij}}{\partial x^2} - V_{ij} \frac{\partial c_{ij}}{\partial x} - K_{ij} c_{ij} \quad (1)$$

$$IC : c_{ij}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

که در آن، c_{ij} تابع غلظت آلودگی در واحد طول در مکان x و زمان t ، D_{ij} ضریب پراکندگی در راستای x ، V_{ij} سرعت متوسط جریان و K_{ij} ضریب زوال واکنش است. همچنین معادله‌ی ۲ نشان‌دهنده‌ی شرط اولیه‌ی رودخانه است. در این پژوهش، شرط اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شده است، دلیل این امر این است که در پژوهش حاضر فرض شده است که غلظت آلاینده‌ی ورودی از شرط اولیه، آلاینده‌ی باشد که غلظت آن ناچیز بوده است. همچنین در بسیاری از تحقیقات، محققین بسیاری از شرط اولیه برای حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی صرف‌نظر کرده‌اند.^[۲۷، ۲۹، ۳۰] لازم به ذکر است که حل تحلیلی موجود برای شرایط اولیه‌ی غیرصفر نیز محدودیتی ندارد و می‌تواند قابل حل باشد. با توجه به این که c_{ij} در واحد طول در نظر گرفته شده است، برای تبدیل آن در واحد حجم با توجه به مساحت مقطع عرضی A_{ij} که باید در معادلات بعدی ظاهر شود از معادله‌ی ۳ استفاده می‌شود که بیان‌گر شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست رودخانه است، لذا:

$$\begin{cases} c_i(t) = \frac{c_{ij}(0, t)}{A_{ij}} \\ c_j(t) = \frac{c_{ij}(L_{ij}, t)}{A_{ij}} \end{cases} \Rightarrow BC : \begin{cases} c_{ij}(0, t) = A_{ij} c_i(t) \\ c_{ij}(L_{ij}, t) = A_{ij} c_j(t) \end{cases} \quad (3)$$

چنان که ذکر شد، معادله‌ی ۳ بیان‌گر شرط مرزی بوده که در پژوهش حاضر، شرط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع اول (دیریکله) در نظر گرفته شده است.

صحت‌سنجی حل‌های عددی یا مدل‌های عددی محسوب می‌شوند. بنابراین ارائه‌ی یک راه‌حل دقیق تحلیلی، هم می‌تواند غلظت آلودگی شبکه‌های رودخانه را به طور دقیق محاسبه کند و هم در مشکلات ناشی از آن، به عنوان یک ابزار مدیریتی برای غربال‌گری سریع قبل از استفاده از مدل‌های پیچیده‌تر کاربرد دارد. طی پژوهش‌های صورت گرفته تاکنون، تقریباً تمام حل‌های انجام شده برای معادله‌ی انتقال آلودگی (جرم)، در یک شاخه از رودخانه بوده که به صورت عددی یا تحلیلی است و حل برای این معادله در شبکه‌ی رودخانه محدود و آن هم به صورت عددی است. بنابراین چنان که ذکر شد، استخراج یک راه حل تحلیلی برای معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه در بین پژوهش‌های صورت گرفته تاکنون وجود نداشته است. دلیل این امر پیچیدگی زیاد کار شبکه‌ی رودخانه، حجم محاسبات زیاد، محدودیت‌های روش حل تحلیلی، پیچیدگی حل و سیستم، تشکیل ماتریس‌های پیچیده و ... است. در این پژوهش، مهم‌ترین دستاورد آن، استخراج یک راه حل تحلیلی عام برای معادله‌ی انتقال جرم (آلودگی) در شبکه‌ی رودخانه با استفاده از روش تحلیلی تبدیل لاپلاس در شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله (که شرط مرزی معمول و رایج در رودخانه است) و شرط اولیه‌ی صفر است. به منظور کاربرد حل تحلیلی موجود در این پژوهش، شبیه‌سازی روی دو نوع شبکه‌ی شاخه‌ی ۱۲ و حلقه‌ی ۱۳ به ازای الگوی آلودگی ثابت و متغیر برای شرایط مرزی انجام خواهد شد. در انتها نیز حل تحلیلی انجام گرفته به منظور اعتبارسنجی با حل عددی مقایسه و شاخص‌های خطای آماری برای دو حل تحلیلی و عددی محاسبه می‌شود.

۲. مبانی نظری و روش‌ها

۲.۱. رویکرد حل تحلیلی

به طور کلی سه نوع تبدیل انتگرالی رایج شامل تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته GITT در حل معادله‌ی انتقال جرم (آلودگی) به کار می‌رود. در پژوهش حاضر، چون اولویت اصلی محاسبه‌ی غلظت در محل اتصال شاخه‌های رودخانه به یکدیگر (یعنی گره‌های اتصال) است؛ لذا از شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله استفاده می‌شود. بدین منظور، چون تبدیل فوریه برای دامنه‌ی نامحدود بین منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت کاربرد دارد و از نظر دامنه‌ی حل محدودیت ایجاد می‌کند و نیز در استفاده از آن برای حل تحلیلی در شبکه‌ی رودخانه اثر شرایط مرزی در نظر گرفته نمی‌شود، کاربرد این روش توصیه نمی‌شود. همچنین از تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته GITT به دلیل وجود مشکلاتی نظیر همگن‌سازی شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست، بالا بودن هزینه‌ی محاسبات و تشکیل دستگاه معادلات از نوع دیفرانسیل معمولی توصیه نمی‌شود. بنابراین در این پژوهش استفاده از روش تبدیل لاپلاس به دلیل عدم وجود مشکل دامنه‌ی حل (نیمه‌محدود بودن آن)، همگن‌سازی شرایط مرزی و پایین بودن هزینه‌ی محاسبات مورد نظر خواهد بود. لازم به ذکر است که روش حل تبدیل لاپلاس می‌تواند ابزار مفیدی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی باشد. تبدیل لاپلاس یک تبدیل انتگرالی است که استفاده از روش‌های ترسیمی برای پیش‌بینی عملکرد سیستم را بدون حل واقعی معادلات دیفرانسیل میسر می‌سازد. یکی دیگر از مزایای آن این است که با حل معادله‌ی دیفرانسیل، می‌توان هر دو مؤلفه‌ی گذار و حالت ماندگار جواب را یک‌جا محاسبه کرد.^[۴۵] رویکرد مدل‌سازی در این پژوهش بدین صورت است که فرض می‌شود منابع آلاینده‌ی ورودی با یک ضریب زوال واکنش معین در شبکه مصرف یا تحویل داده می‌شود. این در حالی است که منبع باقی‌مانده در شبکه

و ریشه‌های این معادله فقط به ازای $s > 0$ دارای جواب است. در این صورت با یافتن ریشه‌های این معادله ثابت‌های B_1 و B_2 نمایان می‌شود.

$$C_{ij}(x, s) = B_1 e^{\frac{V_{ij} + \alpha_{ij}(s)}{\tau D_{ij}} x} + B_2 e^{\frac{V_{ij} - \alpha_{ij}(s)}{\tau D_{ij}} x} \quad (10)$$

که در آن:

$$\alpha_{ij}(s) = \sqrt{V_{ij}^2 + 4 D_{ij}(s + K_{ij})} \quad (11)$$

به منظور یافتن ضرایب B_1 و B_2 از شرایط مرزی لاپلاس‌گیری شده معادله‌ی ۸ استفاده می‌شود. با جایگذاری شرایط مرزی در نقاط $x = L_{ij}$ و $x = 0$ ، معادلات ۱۲ به صورت زیر می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{ij}(0, s) &= B_1 + B_2 = A_{ij} C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij}, s) &= B_1 e^{\left(\frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}} + \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}}\right)} + B_2 e^{\left(\frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}} - \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}}\right)} = A_{ij} C_j(s) \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین برای هر شاخه‌ی i دو نسبت بدون بعد زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta_{ij} = \frac{V_{ij} L_{ij}}{\tau D_{ij}}, \quad \xi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{\tau D_{ij}} \quad (13)$$

علت در نظر گرفتن دو نسبت بی‌بعد θ_{ij} و $\xi_{ij}(s)$ در معادلات ۱۳ صرفاً برای اختصارسازی روند حل است. با جایگذاری معادلات ۱۳ در معادلات ۱۲، ضرایب B_1 و B_2 محاسبه می‌شود:

$$B_1 = \frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (14)$$

و به طور مشابه:

$$B_2 = \frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \quad (15)$$

با جایگذاری ضرایب B_1 و B_2 معادلات ۱۴ و ۱۵ در معادله‌ی ۱۰، تابع غلظت آلودگی $C_{ij}(x, s)$ برای یک شاخه‌ی رودخانه به صورت معادله‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{ij}(x, s) &= A_{ij} C_i(s) \frac{\sinh\left(\frac{L_{ij}-x}{L_{ij}} \xi_{ij}(s)\right)}{\sinh(\xi_{ij}(s))} e^{\frac{x \theta_{ij}}{L_{ij}}} \\ &+ A_{ij} C_j(s) \frac{\sinh\left(\frac{x}{L_{ij}} \xi_{ij}(s)\right)}{\sinh(\xi_{ij}(s))} e^{\frac{x-L_{ij}}{L_{ij}} \theta_{ij}} \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن، $C_{ij}(x, s)$ تابع غلظت آلودگی برحسب متغیر مکان و s لاپلاس در یک شاخه از رودخانه است.

۴.۲. تعمیم حل معادله‌ی انتقال آلودگی در یک شاخه‌ی رودخانه به شبکه‌ی رودخانه

پس از حل معادله‌ی انتقال آلودگی در یک شاخه‌ی رودخانه، اکنون به بررسی مسئله‌ی نحوه‌ی اتصال شاخه‌های شبکه‌ی رودخانه می‌پردازیم، به گونه‌ی که با حرکت از یک شاخه به شاخه‌ی دیگر غلظت به طور مداوم تغییر کند. برای تعمیم حل انجام شده در یک شاخه‌ی رودخانه به شبکه‌ی رودخانه معادله‌ی ۹ که لاپلاس شار عبوری از گره

دلیل انتخاب شرایط مرزی این است که شرط مرزی رایج برای رودخانه در بالادست و پایین‌دست دیریکله بوده، که در بسیاری از نرم‌افزارهای تخصصی مربوط به رودخانه هم صادق است. همچنین در این پژوهش، برای شبکه‌ی رودخانه چون مهم است که غلظت در محل اتصال شاخه‌ها یعنی گره‌ها محاسبه شود، از شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست دیریکله استفاده شده است. چنانچه در شبکه‌ی مورد نظر، مسیری بین گره i و j وجود نداشته باشد، در این صورت $A_{ij} = 0$ و در نتیجه $c_{ij}(x, t) = 0$ خواهد بود. با توجه به قانون فیک برای یک منبع از گره i معادله‌ی ۴ صادق بوده که از مجموع سازوکارهای جابه‌جایی و پراکندگی حاصل شده است.

$$J_{ij}(t) = \left[V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (4)$$

در رابطه‌ی ۴، $J_{ij}(t)$ شار عبوری حاصل از مجموع سازوکارهای جابه‌جایی و پراکندگی بوده و نشان‌دهنده‌ی ورود یک منبع به گره j است. اگر چندین شاخه به گره j وارد شود، معادله‌ی ۴ به صورت معادله‌ی ۵ بازنویسی می‌شود:

$$I_i(t) = \sum_j \left[V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (5)$$

که در آن، $I_i(t)$ جریان خالص آلودگی خارج شده از هر گره i است.

۳.۲. حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش برای یک شاخه‌ی رودخانه

برای حل معادله‌ی ۱ در دامنه‌ی محدود $0 \leq x \leq L_{ij}$ و شرایط مرزی X_{11} (شرط مرزی بالادست و پایین‌دست هر دو از نوع اول دیریکله^۴) ابتدا از معادلات ۱ و ۳ (معادله‌ی انتقال جرم و شرایط مرزی آن) نسبت به t لاپلاس گرفته می‌شود. دلیل اعمال تبدیل لاپلاس در معادله‌ی انتقال جرم بر روی متغیر t این است که دامنه‌ی آن نیمه‌محدود بوده ($0 < t < +\infty$) و اعمال آن بر متغیر مکان که دامنه‌ی آن محدود ($0 < x < L$) است امکان‌پذیر نیست، بدین منظور:

$$\begin{aligned} s C_{ij}(x, s) - c_{ij}(x, 0) + K_{ij} C_{ij}(x, s) \\ + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}(x, s)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

در نتیجه:

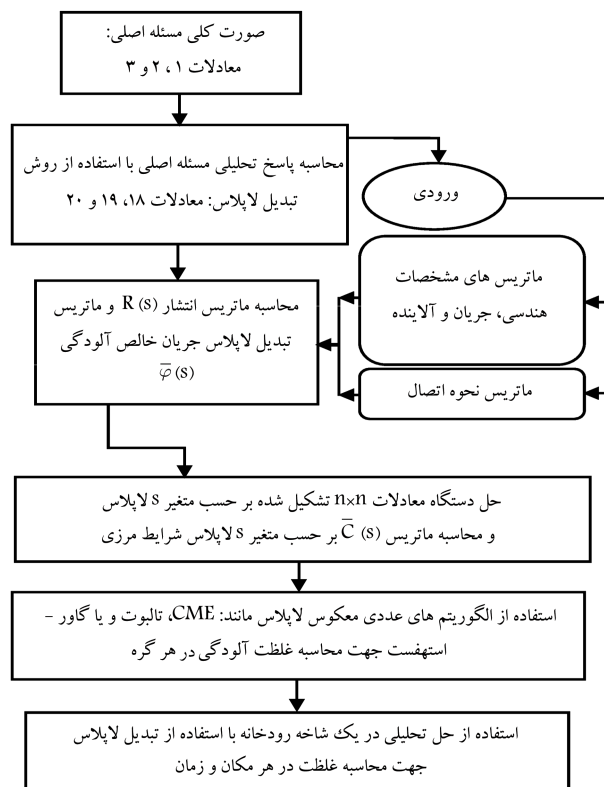
$$(s + K_{ij}) C_{ij} + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

$$BC: \begin{cases} C_{ij}(0, s) = A_{ij} C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij}, s) = A_{ij} C_j(s) \end{cases} \quad (8)$$

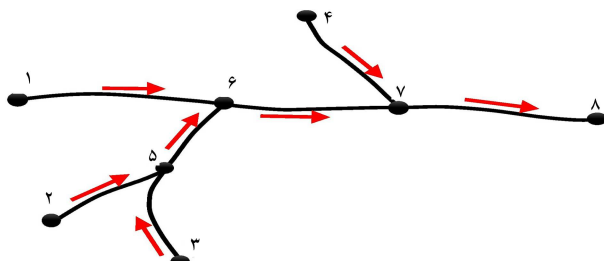
علاوه بر لاپلاس‌گیری از معادلات ۱ و ۳ از معادله‌ی ۵ نیز نسبت به t لاپلاس گرفته می‌شود:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[V_{ij} C_{ij}(x, s) - D_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (9)$$

که در آن، $\varphi_i(s)$ بیانگر تبدیل لاپلاس $I_i(t)$ ، شار عبوری از گره i است. به منظور حل معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش یعنی معادله‌ی ۱ و با لاپلاس‌گیری از این معادله، رابطه ۶ به دست آمد که یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی^{۱۵} همگن بوده



شکل ۲. فلوچارت کلی مدل سازی تحلیلی شبکه‌ی رودخانه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس.



شکل ۳. شماتیک شبکه‌ی شاخه‌یی با جهت جریان در هر مسیر.

۳. الگوریتم حل

در فلوچارت شکل ۲ روند کلی مدل سازی آمده است. به منظور شبیه سازی کلی یک شبکه‌ی رودخانه با توجه به رابطه‌ی تحلیلی استخراج شده از روش تبدیل لاپلاس براساس معادلات ۱۸ تا ۲۰، داده‌های ورودی برای شبکه شامل ماتریس نحوه‌ی اتصال شاخه‌ها، ماتریس میانگین سرعت، ماتریس ضرایب پراکندگی، ماتریس ضریب زوال واکنش، ماتریس طول رودخانه، ماتریس سطح مقطع عرضی شاخه‌ها، الگوی غلظت ورودی مربوط به شرایط مرزی و مدت زمان لازم برای شبیه سازی است. لازم به ذکر است که ماتریس نحوه‌ی اتصال یک ماتریس $n \times n$ است که n برابر با تعداد گره‌ها بوده و این ماتریس به صورت درایه‌های صفر و ۱ بیان می‌شود. به عبارت دیگر، برای یک شبکه‌ی معمول اگر اتصال وجود داشته باشد مقدار درایه برای دو گره مورد نظر برابر با ۱ خواهد بود و اگر اتصال وجود نداشته باشد، درایه مورد نظر برابر با صفر خواهد شد. در یک توضیح تکمیلی تر، با توجه به شبکه‌ی رودخانه‌ی شاخه‌یی شکل ۳، ماتریس نحوه‌ی اتصال چنین است:

ز است، مد نظر بوده است. در این صورت با در نظر گرفتن معادله‌ی ۱۶ و اعمال تغییرات لازم آن برای جایگذاری در معادله‌ی ۹، معادلات ۱۷ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} D_{ij} \frac{dC_{ij}(x, s)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{-A_{ij}C_i(s)D_{ij} \cosh(\xi_{ij}(s))\xi_{ij}(s)}{L_{ij} \sinh(\xi_{ij}(s))} \\ + \frac{A_{ij}C_i(s)D_{ij}\theta_{ij}}{L_{ij}} + \frac{A_{ij}C_j(s)D_{ij}\xi_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{L_{ij} \sinh(\xi_{ij}(s))} \\ V_{ij}C_{ij}(0, s) = V_{ij}A_{ij}C_i(s) \end{cases} \quad (17)$$

با جایگذاری معادلات ۱۳ و ۱۷ در معادله‌ی ۹، نهایتاً معادله‌ی ۱۸ به دست خواهد آمد:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[A_{ij}C_j(s) \left\{ \frac{V_{ij}}{2} + \frac{\alpha_{ij}(s)}{2 \tanh(\xi_{ij}(s))} \right\} - A_{ij}C_j(s) \left\{ \frac{\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right\} \right] \quad (18)$$

بنابراین با دانستن تبدیل لاپلاس غلظت گره $\bar{C}(s) = \{C_1(s), \dots, C_m(s)\}$ جایی که m تعداد گره‌هاست، می‌توان با توجه به $\bar{I}(t) = \{I_1(t), \dots, I_m(t)\}$ (جریان خالص آلودگی خارج شده از هر گره)، $\bar{\varphi}(s) = \{\varphi_1(s), \dots, \varphi_m(s)\}$ (تبدیل لاپلاس \bar{I}) را محاسبه کرد و $\bar{C}(s)$ را به دست آورد. به عبارت دیگر برای هر گره i ، یک معادله‌ی خطی در $C_1(s), C_2(s), \dots, C_m(s)$ وجود دارد. از این رو $\bar{C}(s)$ و $\bar{\varphi}(s)$ بردارهای ستونی خواهند بود:

$$R(s)\bar{C}(s) = \bar{\varphi}(s) \quad (19)$$

که در آن:

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \sum_k A_{ik} \left[\frac{V_{ik}}{2} + \frac{\alpha_{ik}(s)}{2 \tanh(\xi_{ik}(s))} \right] & i = j \\ \frac{-A_{ij}\alpha_{ij}(s)e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} & otherwise \end{cases} \quad (20)$$

$R(s)$ به عنوان ماتریس انتشار در نظر گرفته می‌شود و برای هر گره در شبکه، یک ردیف و یک ستون دارد. ماتریس $R(s)$ یک ماتریس نامتقارن و پراکنده $n \times n$ (تعداد گره‌هاست) که عناصر قطری (مورب) آن همگی مثبت‌اند. همچنین اگر اتصال بین نقاط i و j وجود نداشته باشد، درایه‌های آن صفر و اگر اتصال وجود داشته باشد عناصر آن منفی خواهد بود. با توجه به توابع $R(s)$ و $\bar{\varphi}(s)$ ، می‌توان $\bar{C}(s)$ را با استفاده از الگوریتم‌های حل عددی دستگاه معادلات محاسبه کرد و در نهایت برای یافتن مقادیر $c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t)$ می‌توان از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی مانند CME^[۴۶]، گاور - استنفست^[۴۷]، تالبوت^[۴۸] و ... استفاده کرد. در این پژوهش از الگوریتم لاپلاس‌گیری معکوس عددی CME به دلیل بالا بودن سرعت و دقت محاسبات، نسبت به دو الگوریتم گاور - استنفست و تالبوت استفاده شده است. در روش مذکور، لاپلاس‌گیری معکوس عددی براساس توزیع نمایی ماتریس متمرکز (CME) انجام می‌شود، که ضمن حفظ دقت نتایج در مرتبه‌ی 10^{-6} نیز از نظر عددی پایدار است. این در حالی است که سایر روش‌ها برای مرتبه‌ی 10^{-6} ناپایدار می‌شوند، همچنین روش CME هنگام کار با توزیع احتمالاتی، روشی ایده‌آل است.^[۴۶]

جدول ۱. مشخصات جریان و آلاینده تخلیه شده در شبکه‌ی شاخه‌یی.

مسیر	s	V(m/s)	D(m ^۲ /s)	Q(m ^۳ /s)
۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۴	۸	۱۵
۶۷	۰/۰۰۰۱	۰/۸۶	۱۵	۳۳
۷۸	۰/۰۰۰۱	۱/۰۲	۱۰	۴۰
۲۵	۰/۰۰۰۱	۰/۲۳	۱۸	۸
۵۶	۰/۰۰۰۱	۰/۴۸	۱۰	۱۸
۳۵	۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵	۵	۱۰
۴۷	۰/۰۰۰۱	۰/۱۸۶	۲۰	۷

۴. نتایج و بحث

به منظور استفاده از حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبکه‌ی رودخانه، ابتدا کاربرد حل مذکور برای دو نوع شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت و متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با توجه به این که برای شبکه‌ی رودخانه راه حل تحلیلی وجود ندارد، به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی حل انجام شده، از حل عددی تمام ضمنی^{۱۹} تفاضل محدود^{۲۰} با تقریب مشتق مرکزی در مکان^{۲۱} با هدف کاهش مقدار پراکندگی عددی استفاده شده است. در نهایت با استفاده از شاخص‌های آماری نظیر ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) دو حل عددی و تحلیلی با یکدیگر مقایسه شده است.

۱.۴. مثال اول: ارزیابی و کاربرد حل تحلیلی در مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی

در مثال اول، شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی به صورت شکل ۳ در نظر گرفته شده است. برای نام‌گذاری گره‌ها از اعداد استفاده شده و جهت جریان در آن مشخص شده است. در تمامی شاخه‌ها مقطع از نوع کانال مستطیلی به عرض ۵ متر و طول ۴ کیلومتر است و تمامی مشخصات جریان و کانال در جدول ۱ آمده است. در ادامه نیز دو شرط مرزی ثابت و متغیر برای کاربرد حل تحلیلی برای شبکه‌ی شاخه‌یی مورد نظر در نظر گرفته شده است.

۱.۴.۱. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرایط مرزی ثابت

برای شبیه‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی مدنظر با شرایط مرزی ثابت، زمان شبیه‌سازی ۱۰ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب برابر با ۸، ۵، ۷ و ۴ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. شکل ۴ نتایج حاصل از مدل‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳ را در دو زمان ۵/۰ و ۸/۰ (زمان بی‌بعد شده) برای چهار مسیر ۱۶۷۸، ۲۵۶۷۸، ۳۵۶۷۸ و ۴۷۸ نشان می‌دهد. چنان که در شکل ۴ و مقایسه‌ی آماری دو حل تحلیلی و عددی در جدول ۲ مشاهده می‌شود، دو حل تحلیلی و عددی دارای انطباق خوبی نسبت به هم هستند.

با توجه به شکل ۴، در مسیر ۴۷۸، ابتدا آلودگی با غلظت ثابت ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از نقطه ۴ وارد مسیر مورد نظر شده و سپس در کیلومتر ۵/۰ به علت ورود برآیند غلظت از شاخه‌ی ۶۷ با گذشت زمان، غلظت در مسیر تقویت شده و افزایش می‌یابد. در مسیر ۱۶۷۸، غلظت ثابت ۸ کیلوگرم بر مترمکعب از مرز بالادست گره

$$= \text{ماتریس نحوه‌ی اتصال} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

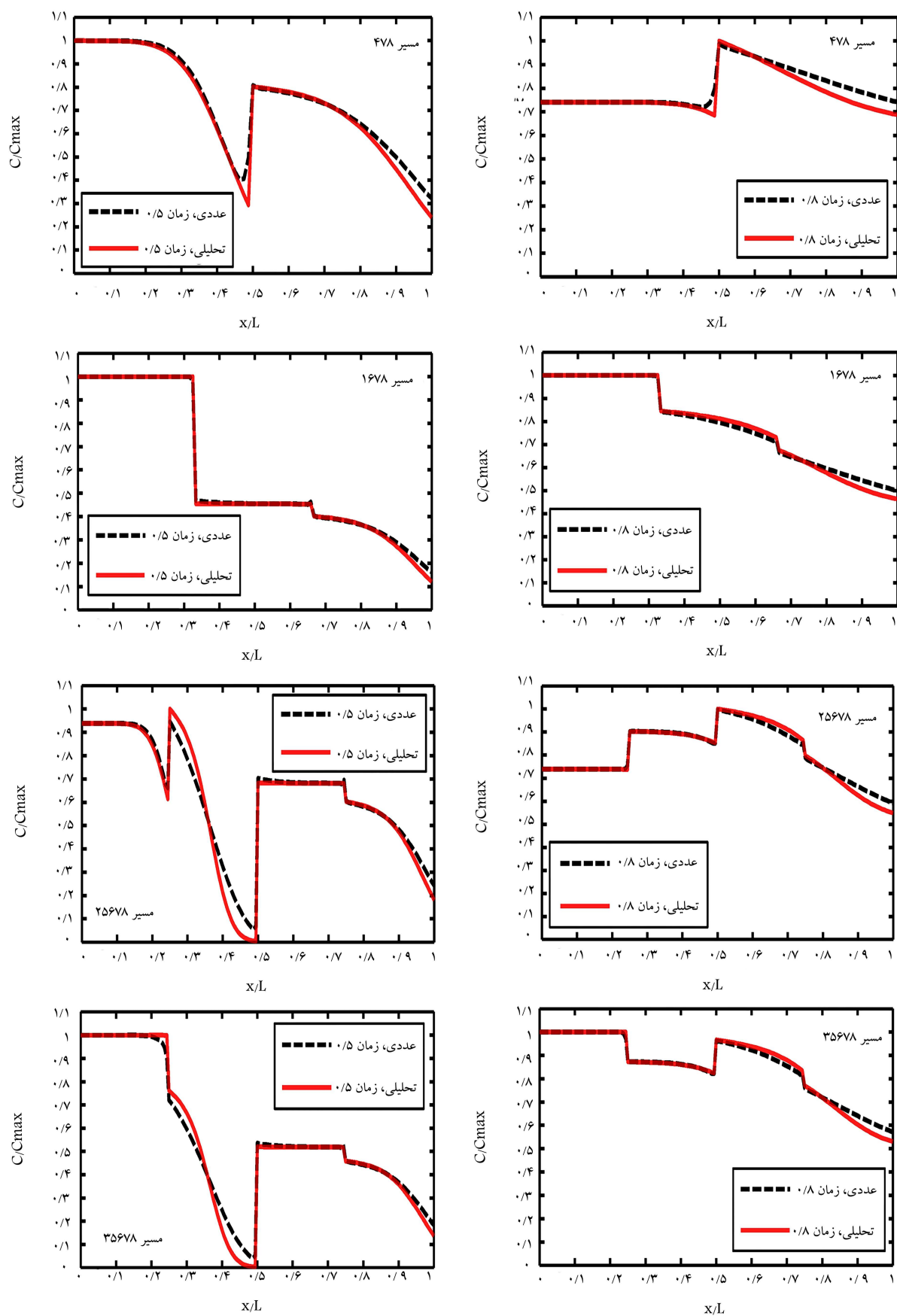
ماتریس نحوه‌ی اتصال در ماتریس رابطه‌ی ۲۱، به طور مثال، سطر اول و ستون ششم برابر با یک شده است که اتصال گره نقطه ۱ به ۶ را نشان می‌دهد. در خصوص توضیحات تکمیلی در مورد ماتریس‌های مشخصات هندسی، جریان و آلاینده، این ماتریس‌ها همگی بر اساس ماتریس نحوه‌ی اتصال پر و مقداردهی می‌شود. به طور مثال، با توجه به شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی شکل ۳، ماتریس‌های ذکر شده عبارت‌اند از:

$$V\left(\frac{m}{s}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{27} & 0 \\ 0 & V_{52} & V_{53} & 0 & 0 & V_{56} & 0 & 0 \\ V_{61} & 0 & 0 & 0 & V_{65} & 0 & V_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{74} & 0 & V_{76} & 0 & V_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$D\left(\frac{m^2}{s}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{27} & 0 \\ 0 & D_{52} & D_{53} & 0 & 0 & D_{56} & 0 & 0 \\ D_{61} & 0 & 0 & 0 & D_{65} & 0 & D_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{74} & 0 & D_{76} & 0 & D_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A(m^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{27} & 0 \\ 0 & A_{52} & A_{53} & 0 & 0 & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & 0 & 0 & 0 & A_{65} & 0 & A_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{74} & 0 & A_{76} & 0 & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

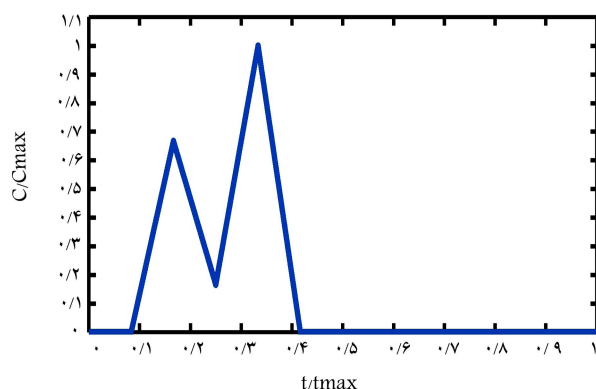
در ماتریس‌های ۲۲ تا ۲۴، V بیان‌گر ماتریس جریان، D بیان‌گر ماتریس آلاینده و A بیان‌گر ماتریس مشخصات هندسه‌ی رودخانه است. پس از شبیه‌سازی، خروجی کار به صورت پروفیل غلظت آلودگی در زمان و مکان دلخواه خواهد بود.



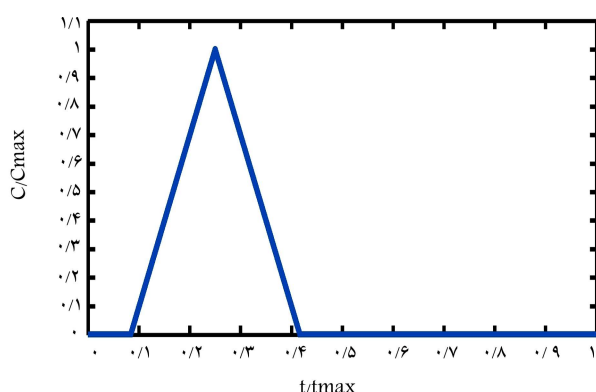
شکل ۴. مقایسه‌ی پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده ۰/۵ و ۰/۸ برای مثال ۱-۴.

جدول ۲. مقایسه پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرط مرزی ثابت.

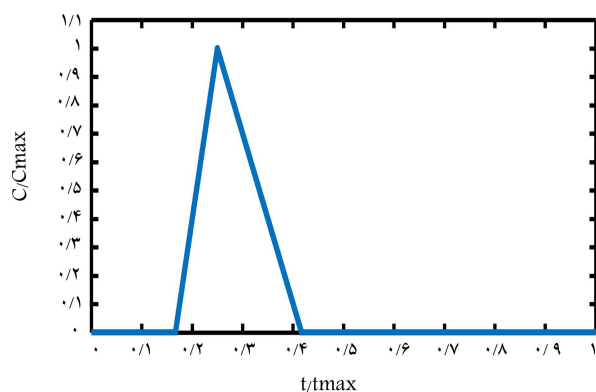
مسیر و زمان	$RMSE$ (kg/m^3)	MAE (kg/m^3)	R^2 (%)
۴۷۸، زمان ۵/۵	۰/۱۴۰۵	۰/۰۷۳۵	۹۸/۸۴
۱۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۰۸۵۴	۰/۰۴۰۸	۹۹/۹۲
۲۵۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۲۳۶	۰/۱۴۲۸	۹۸/۵۶
۳۵۶۷۸، زمان ۵/۵	۰/۲۴۳۲	۰/۱۴۴۵	۹۹/۱
۴۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۷۰۲	۰/۱۰۸۱	۹۰/۷۸
۱۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۴۴۱	۰/۰۹۹۹	۹۹/۳۴
۲۵۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۲۵۱	۰/۰۷۸۳	۹۹/۰۲
۳۵۶۷۸، زمان ۸/۸	۰/۱۲۶	۰/۰۷۸۹	۹۹/۱۵



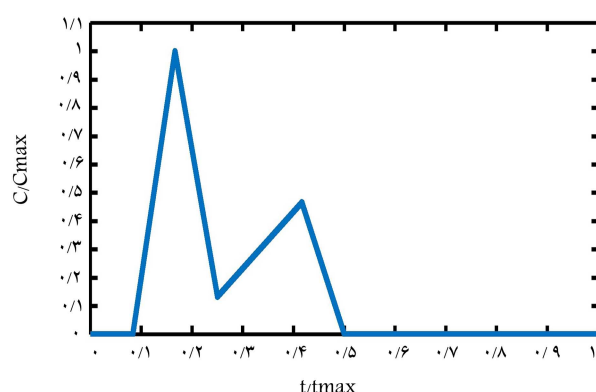
شکل ۵. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۱.



شکل ۶. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۲.



شکل ۷. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۳.



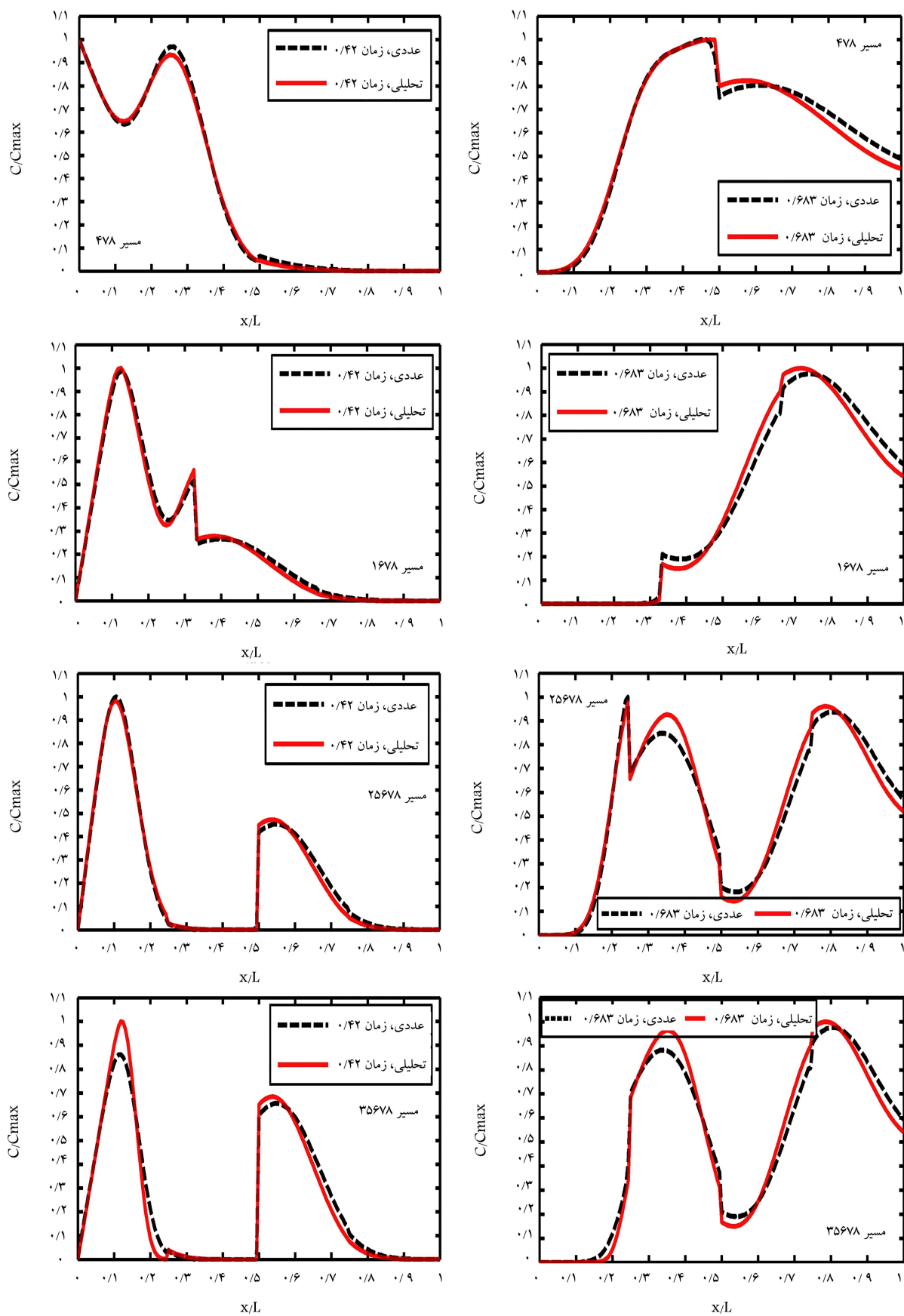
شکل ۸. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۴.

۱ وارد مسیر شده و در کیلومتر ۳۳/۰ به دلیل بارگذاری ناشی از برآیند غلظت شاخه‌ی ۵۶، با گذشت زمان غلظت کاهش می‌شود. سپس در شاخه‌ی ۶۷ و در گره ۷ به علت بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۴۷، برآیند غلظت‌ها کاهش یافته و غلظت در کیلومتر ۶۶/۰ در زمان ۸/۰ کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که اصطلاح «بارگذاری» به حاصل ضرب دبی در غلظت گفته می‌شود. در مسیر ۲۵۶۷۸، در کیلومتر ۲۵/۰ به علت ورود موج غلظت از مسیر ۳۵، غلظت تقویت شده و این افزایش غلظت در کیلومتر ۵/۰ به دلیل بارگذاری ناشی از مسیر ۱۶ ادامه می‌یابد و در کیلومتر ۷۵/۰ با گذشت زمان کاهش پیدا می‌کند. در انتها برای مسیر ۳۵۶۷۸، در کیلومترهای ۲۵/۰ و ۷۵/۰ به دلیل بارگذاری‌های ناشی از مسیرهای ۲۵ و ۴۷ برآیند غلظت کاهش یافته و با گذشت زمان غلظت کاهش پیدا می‌کند. به همین ترتیب به دلیل موج تقویتی غلظت از مسیر ۱۶، مسیر ۶۷ در کیلومتر ۵/۰ افزایش غلظت را به دنبال خواهد داشت.

بنابراین، با توجه به شکل ۴، در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر یعنی نقاط ۵، ۶ و ۷، تغییر غلظت آلودگی رخ می‌دهد که این تغییرات در برخی مسیرها روند افزایشی و در برخی دیگر روند کاهشی دارد، دلیل این امر تغییرات دبی و سطح مقطع جریان در هر شاخه است. در شکل ۴ در زمان ۸/۰ برای مسیر ۴۷۸ مقدار ناچیزی اختلاف در انتها بین حل عددی با تحلیلی وجود دارد که علت آن وجود خطاهای رایج در حل‌های عددی، مانند خطای پراکندگی عددی، خطای گرد کردن^{۲۲} و خطای کوتاه کردن جملات ریاضی^{۲۳} بسط تیلور است که این خطاها در حل‌های تحلیلی وجود ندارد.

۲.۱.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه شاخه‌یی با شرایط مرزی متغیر

در این بخش به منظور مدل‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳، زمان شبیه‌سازی ۱۲ ساعت و الگوی غلظت ورودی در نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب مطابق شکل‌های ۵ تا ۸ است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی شبکه‌ی شاخه‌یی شکل ۳ برای چهار مسیر ۴۷۸، ۱۶۷۸، ۲۵۶۷۸ و ۳۵۶۷۸ در دو زمان ۴۲/۰ و ۶۸۳/۰ (زمان بی‌بعد شده) مطابق با شکل ۹ است. همچنین شاخص‌های آماری محاسبه شده حاصل از دو حل تحلیلی و عددی در جدول ۳ قابل مشاهده است. با توجه به شکل ۹، آلودگی‌های مورد نظر به صورت الگوهای مثلثی منظم و نامنظم متغیر با زمان، از چهار نقطه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ وارد سیستم می‌شوند و به دلیل این که آلودگی به صورت ثابت و پیوسته نیست، آلودگی در انتها با گذشت زمان خارج می‌شود. در شکل ۹، در مسیر ۴۷۸، در ابتدا آلودگی مورد نظر با الگوی مثلثی نامنظم با دو پیک غلظت وارد مسیر شده و در کیلومتر ۵/۰ به علت ورود برآیند



شکل ۹. مقایسه‌ی پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی‌بعد شده ۰/۴۲ و ۰/۶۸۳ برای مثال ۴-۱-۲.

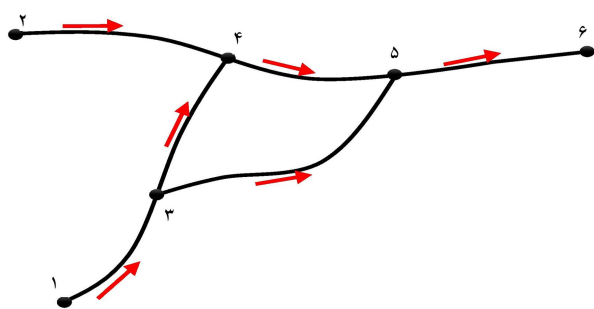
جدول ۳. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه‌ی شاخه‌یی با شرط مرزی متغیر.

مسیر و زمان	$RMSE$ (kg/m^3)	MAE (kg/m^3)	R^2 (%)
۴۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۶۳	۹۹/۹
۱۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۹۷	۰/۰۱۵	۹۹/۵۸
۲۵۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۰۶	۰/۰۰۷۲	۹۹/۶۶
۳۵۶۷۸، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۱۵	۹۸/۱۸
۴۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۱۶	۰/۰۱۲	۹۹/۱۳
۱۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۱۸۶	۰/۰۱۳۶	۹۸/۷۹
۲۵۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۲۰۸	۰/۰۱۶۹	۹۸/۲۲
۳۵۶۷۸، زمان ۰/۶۸۳	۰/۰۲۱۶	۰/۰۱۷۶	۹۸/۴۱

بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۶۷، با گذشت زمان الگوی غلظت کاهش می‌یابد. تاخیر در زمان تزریق آلودگی در هریک از بارگذاری‌ها می‌تواند یکی از عوامل کاهش غلظت در مسیر ۴۷۸ باشد. در مسیر ۱۶۷۸، آلودگی با دو پیک غلظت از گره ۱ وارد مسیر مورد نظر شده و در کیلومتر ۰/۳۳ به علت کاهش برآیند غلظت در اثر بارگذاری ناشی از برآیند غلظت در مسیر ۵۶، غلظت شاخه‌ی ۶۷ کاهش می‌یابد. اما با گذشت زمان در اثر ورود موج تقویتی مثبت غلظت از کیلومترهای ۰/۳۳ و ۰/۶۶ یعنی نقاط ۶ و ۷ (مربوط به شاخه‌های ۴۷ و ۵۶) وارد مسیر شده و در زمان ۰/۸ غلظت افزایش می‌یابد. در مسیر ۲۵۶۷۸، در ابتدا آلودگی به صورت یک پیک غلظت از گره ۲ وارد شده و در کیلومتر ۰/۲۵ (گره ۵) به دلیل تأخیر در زمان تزریق غلظت از شاخه‌ی ۳۵، شاخه‌ی ۵۶ غلظت آن ناچیز بوده و در کیلومتر ۰/۵ (گره ۶) به دلیل موج تقویتی غلظت از شاخه‌ی ۲۶، غلظت مسیر ۶۷ افزایش می‌یابد. با گذشت زمان و در زمان ۰/۸ به دلیل برآیند بارگذاری مثبت وارده از شاخه‌ی ۳۵، غلظت روند افزایشی در طول مسیر پیدا کرده و در انتها با گذشت زمان کم‌تر شده و خارج می‌شود. در مسیر ۳۵۶۷۸ نیز، همانند مسیر ۲۵۶۷۸ بوده و آلودگی در ابتدا در کیلومتر ۰/۲۵ به دلیل تأخیر در بارگذاری ورودی از شاخه‌ی ۲۵، غلظت در شاخه‌ی ۵۶ ناچیز بوده که در طول گذشت زمان، غلظت روند افزایشی پیدا کرده و کم‌کم در انتها خارج می‌شود. در شکل ۹، نتایج نشان می‌دهد که اختلاف بین حل تحلیلی و عددی ناچیز بوده و دو حل تقریباً بر هم منطبق‌اند و برای بالا بردن دقت می‌توان گام مکانی و گام زمانی را در هر دو حل تا حد ممکن کوچک‌تر در نظر گرفت تا این اختلاف بسیار کم‌تر شود. عمده اختلاف‌ها برای دو حل معمولاً در محل‌قله نمودارها روی می‌دهد که دلیل اصلی آن وجود خطای پراکندگی عددی در حل عددی است.

۲.۴. مثال دوم: ارزیابی و کاربرد حل تحلیلی در مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی

در مثال دوم، شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی به صورت شکل ۱۰ در نظر گرفته شده است. در این شبکه گره‌ها به صورت اعداد نام‌گذاری شده و جهت جریان مشخص شده است، همچنین تمامی مقاطع در این شبکه از نوع کانال مستطیلی



شکل ۱۰. شکل شماتیک شبکه‌ی حلقه‌یی با جهت جریان در هر مسیر.

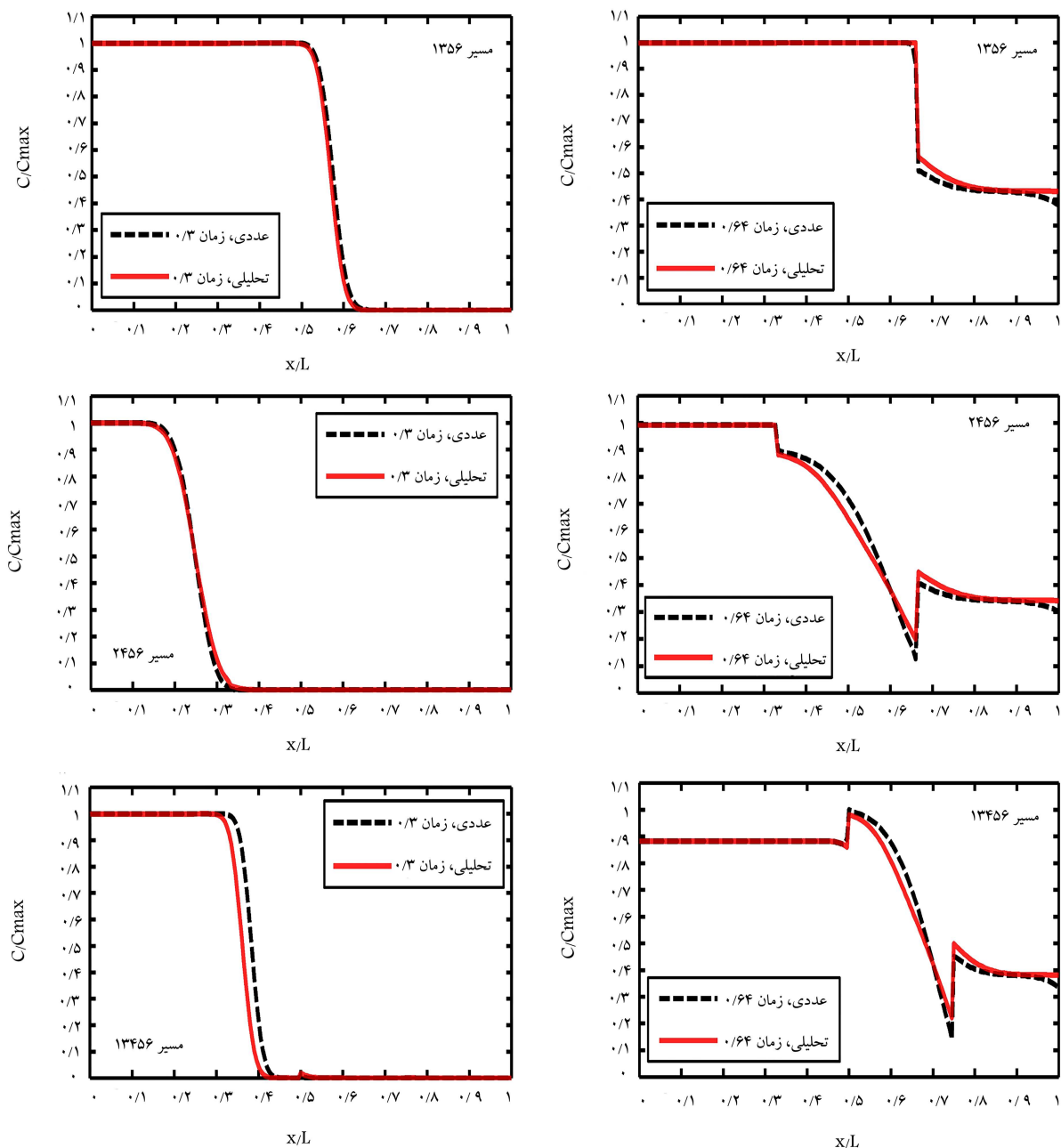
جدول ۴. مشخصات جریان و آلاینده‌ی تخلیه شده در شبکه‌ی حلقه‌یی.

مسیر	s	$V(m/s)$	$D(m^2/s)$	$Q(m^3/s)$
۲۴	۰/۰۰۰۱	۰/۳۵	۲۰	۸
۴۵	۰/۰۰۰۴	۰/۵	۸	۱۴/۲
۵۶	۰/۰۰۰۱	۰/۷۳	۱۲	۲۵
۱۳	۰/۰۰۰۵	۱/۳۲	۵	۱۷
۳۴	۰/۰۰۰۵	۰/۳۳	۱۵	۶/۲
۳۵	۰/۰۰۰۹	۰/۵۳	۱۰	۱۰/۸

با عرض ۵ متر و طول ۵ کیلومتر است. مشخصات جریان و کانال شامل شیب (S)، سرعت (V)، ضریب پراکندگی (D) و دبی جریان (Q) برای هر شاخه در جدول ۴ آمده است. به منظور کاربرد حل تحلیلی صورت گرفته در مدل‌سازی شبکه‌ی حلقه‌یی، دو شرایط مرزی ثابت و متغیر در نظر گرفته شده است.

۱.۲.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه‌ی حلقه‌یی با شرایط مرزی ثابت

به منظور شبیه‌سازی شبکه‌ی مورد نظر با شرایط مرزی ثابت در این بخش، زمان شبیه‌سازی ۱۰ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱ و ۲ به ترتیب برابر با ۴ و ۵ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی در زمان‌های ۰/۳ و ۰/۶۴ (زمان بی‌بعد شده) برای سه مسیر ۱۳۴۵۶، ۱۳۵۶ و ۱۳۵۶ مطابق شکل ۱۱ است. با توجه به شکل ۱۱، در مسیر ۱۳۵۶، ابتدا آلودگی با غلظت ثابت ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از مرز ۱ وارد مسیر مورد نظر شده و در کیلومتر ۰/۳۳ غلظت آلاینده ثابت مانده و در کیلومتر ۰/۶۶ با گذشت زمان در زمان ۰/۶۴، به دلیل برآیند غلظت ناشی از شاخه‌ی ۴۵، در شاخه‌ی ۵۶ از میزان غلظت آلودگی کسر می‌شود. در مسیر ۲۴۵۶، ابتدا آلودگی با غلظت ۵ کیلوگرم بر مترمکعب از گره ۲ وارد سیستم شده و در طول مسیر حرکت می‌کند و در کیلومتر ۰/۳۳ به دلیل موج منفی برآیند بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۳۴، در شاخه‌ی ۴۵، کاهش غلظت رخ می‌دهد و در انتها نیز، در کیلومتر ۰/۶۶ به دلیل موج تقویتی غلظت از شاخه‌ی ۳۵، برآیند غلظت در شاخه‌ی ۵۶ تقویت شده و افزایش می‌یابد. در مسیر ۱۳۴۵۶، غلظت آلودگی ۴ کیلوگرم بر مترمکعب از نقطه ۱ حرکت کرده و به دلیل بارگذاری برابر با شاخه‌ی ۳۵، در کیلومتر ۰/۲۵ تا ۰/۵، غلظت آلاینده همان‌طور ثابت می‌ماند و در کیلومتر ۰/۵ (گره ۴) به علت موج مثبت غلظت از شاخه‌ی ۲۴، غلظت در شاخه‌ی ۴۵ افزایش یافته و به طور مشابه نیز، در نتیجه بارگذاری مثبت شاخه‌ی ۳۵، در ادامه مسیر برای شاخه‌ی ۵۴ نیز، افزایش غلظت با گذشت زمان روی می‌دهد. چنان‌که در شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود،



شکل ۱۱. مقایسه پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده ۰/۳ و ۰/۶۴ برای مثال ۱-۲-۴.

جدول ۵. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه حلقه‌بی با شرط مرزی ثابت.

مسیر و زمان	$RMSE$ (kg/m^3)	MAE (kg/m^3)	R^2 (%)
مسیر ۱۳۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۷۹۳	۰/۰۲۴۶	۹۹/۸۵
مسیر ۲۴۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۶۲	۰/۰۲۵۱	۹۹/۹۲
مسیر ۱۳۴۵۶، زمان ۰/۳	۰/۰۸۲	۰/۰۸۸	۹۷/۵۶
مسیر ۱۳۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۰۶۴۸	۰/۰۳۰۴	۹۹/۸۱
مسیر ۲۴۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۱۴۷۳	۰/۰۹۶۴	۹۹/۱۴
مسیر ۱۳۴۵۶، زمان ۰/۶۴	۰/۱۲۸۱	۰/۰۷۳۶	۹۸/۸۶

نتایج حاصل از حل عددی انطباق خوبی با حل تحلیلی در این پژوهش دارد. مقایسه‌ی آماری دو حل تحلیلی و عددی برای شبکه‌ی حلقه‌بی شکل ۱۰ در هر یک از مسیرها با استفاده از شاخص‌های آماری در جدول ۵ به ازای دو زمان مذکور آمده است. نتایج آماری نشان می‌دهد که دو حل تحلیلی و عددی انطباق خوبی دارند.

چنان که ذکر شد، با توجه به شکل ۱۱، با افزایش زمان، تغییراتی در نمودارهای سه مسیر ایجاد می‌شود که دلیل آن، تغییرات غلظت در محل‌های اتصال یعنی نقاط ۳، ۴ و ۵ است. این تغییرات به دلیل تغییر مشخصات جریان و سطح مقطع عرضی جریان در هر شاخه رخ می‌دهد و باعث کاهش یا افزایش غلظت از یک شاخه به شاخه‌ی دیگر می‌شود.

جدول ۶. مقایسه‌ی پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی با شرط مرزی متغیر.

مسیر و زمان	$RMSE$ (kg/m^3)	MAE (kg/m^3)	R^2 (%)
۱۳۵۶، زمان ۰/۴۲	۰/۰۶۰۱	۰/۰۳۵۸	۹۷/۴۵
۲۴۵۶، زمان ۰/۴۲	۰/۰۱۰۸	۰/۰۰۰۶	۹۹/۷۹
۱۳۴۵۶، زمان ۰/۴۲	۰/۰۵۶۱	۰/۰۲۷۹	۹۷/۶۵
۱۳۵۶، زمان ۰/۶	۰/۰۶۹۱	۰/۰۴۲۳	۹۷
۲۴۵۶، زمان ۰/۶	۰/۰۳۴۲	۰/۰۲۵۳	۹۶/۴۷
۱۳۴۵۶، زمان ۰/۶	۰/۰۸۰۳	۰/۰۴۳۷	۸۸/۴۷

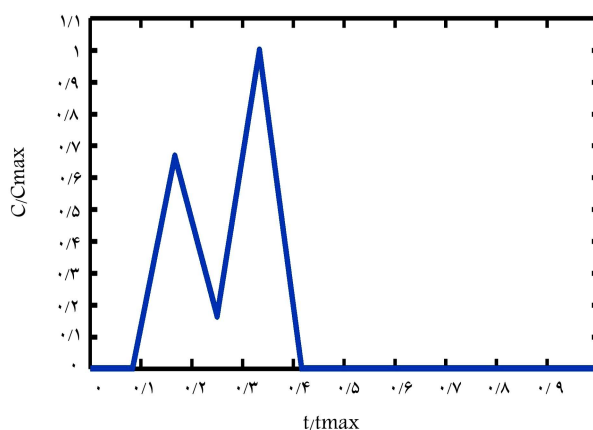
۳۵ غلظت آلودگی در کیلومترهای ۰/۲۵ تا ۰/۵ با همان الگوی اولیه حرکت می‌کند. در ادامه نیز در کیلومترهای ۰/۵ به دلیل ورود برآیند مثبت از شاخه‌ی ۲۴، در شاخه‌ی ۴۵ افزایش غلظت روی می‌دهد که در ادامه مسیر نیز با ورود موج مثبت آلودگی از سمت شاخه‌ی ۳۵، غلظت آلودگی تقویت شده و به تدریج از محیط خارج می‌شود.

چنان که در شکل ۱۴ ملاحظه می‌شود، حل تحلیلی با حل عددی انطباق خوبی داشته و شاخص‌های آماری محاسبه شده در جدول ۶ دلالت بر این امر دارد. در محل‌های اتصال ۳، ۴ و ۵ در شکل ۱۴ به علت تغییر پارامترهای جریان و مقطع در هر شاخه، غلظت کاهش یا افزایش می‌یابد.

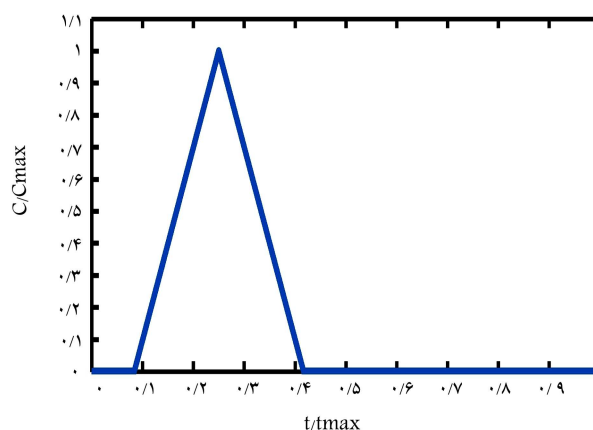
در این شکل، در زمان ۰/۶ برای مسیر ۱۳۴۵۶ به علت وجود خطاهای رایج حل عددی نظیر خطای پراکندگی عددی، خطای گرد کردن و خطای کوتاه کردن جملات ریاضی، مقدار ناچیزی اختلاف بین حل عددی با تحلیلی وجود دارد که این خطاها در حل تحلیلی نیست. هرچه گام مکانی و زمانی در این شبیه‌سازی کم‌تر در نظر گرفته شود، میزان خطا کاهش خواهد یافت.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، حل تحلیلی معادله‌ی انتقال و انتشار آلودگی ADRE برای شبکه‌ی رودخانه به طور عام، در یک دامنه‌ی محدود به ازای شرایط مرزی X_{11} (بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله) و برای شرط اولیه صفر با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به دست آمد، سپس با استفاده از حل تحلیلی انجام شده، مدل‌سازی دو نوع شبکه‌ی شاخه‌یی و حلقه‌یی با در نظر گرفتن شرایط مرزی ثابت و متغیر برای هر کدام انجام گرفت. این پژوهش نشان داد که روش تبدیل لاپلاس یک روش تحلیلی و ابزاری قدرتمند برای حل یک مسئله‌ی پیچیده مانند معادله‌ی انتقال جرم در شبکه‌ی رودخانه محسوب شده و توانایی شبیه‌سازی انواع شرایط مرزی پیچیده را دارد. همچنین حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبیه‌سازی شبکه‌های پیچیده‌تر نیز کاربرد دارد. «محدودیت‌های الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری معکوس عددی» از جمله معایب روش تبدیل لاپلاس در حل مسائل انتقال جرم است، که در این مورد باید الگوریتم‌هایی را در نظر گرفت که ضمن داشتن توانایی لازم برای لاپلاس معکوس توابع پیچیده‌ی محاسبه شده برحسب متغیر s لاپلاس، دقت بالایی در محاسبات نیز داشته باشند؛ چرا که هرچه توابع برحسب s ایجاد شده پیچیده‌تر شود، نمی‌توان لاپلاس وارون را به صورت تحلیلی گرفت. بنابراین باید از



شکل ۱۲. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۱.

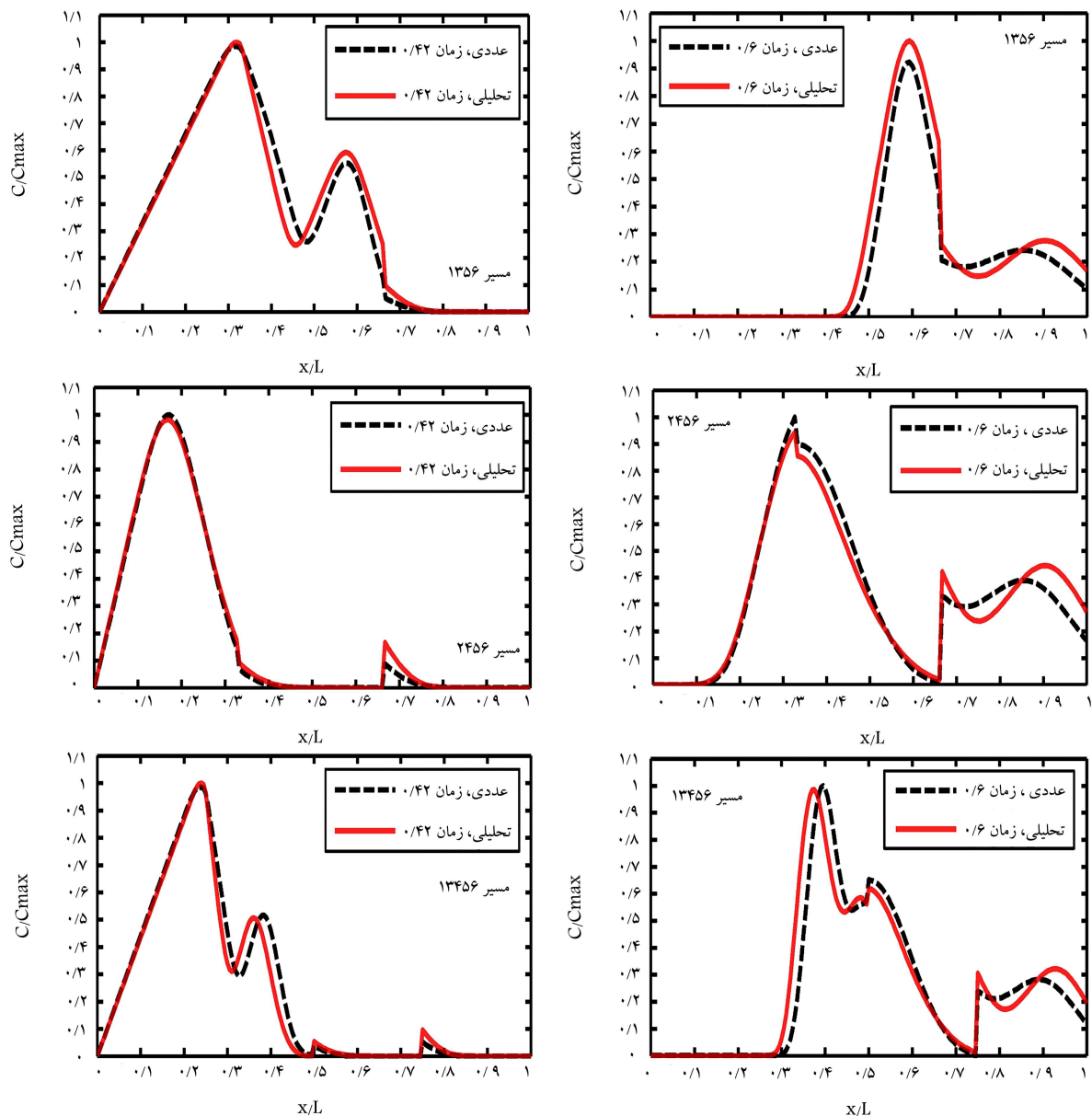


شکل ۱۳. الگوی غلظت ورودی از نقطه ۲.

۲.۲.۴. مدل‌سازی شبکه‌ی رودخانه حلقه‌یی با شرایط مرزی متغیر

در این بخش از شبیه‌سازی، زمان کل شبیه‌سازی ۱۲ ساعت و غلظت در نقاط ورودی ۱ و ۲ در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ قابل مشاهده است. همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی در دو زمان ۰/۴۲ و ۰/۶ (زمان بی‌بعد شده) مطابق با شکل ۱۴ برای سه مسیر ۲۴۵۶، ۱۳۴۵۶ و ۱۳۵۶ ارائه شده است.

با توجه به شکل ۱۴، آلودگی‌های مورد نظر به صورت الگوهای مثلی منظم و نامنظم متغیر با زمان، از دو نقطه‌ی ۱ و ۲ وارد شبکه‌ی حلقه‌یی می‌شود و به دلیل این که آلودگی به صورت ثابت و پیوسته نیست لذا آلودگی در انتها با گذشت زمان خارج می‌شود. در شکل ۱۴، برای مسیر ۱۳۵۶، آلودگی با الگوی مثلی غلظت متغیر با زمان از نقطه ۱ وارد مسیر شده و در کیلومترهای ۰/۳۳ به دلیل برابری بارگذاری‌های دو شاخه‌ی ۳۴ و ۳۵، آلودگی با همان الگو بدون تغییر وارد شاخه‌ی ۳۵ می‌شود؛ در کیلومترهای ۰/۶۶ با گذشت زمان به دلیل برآیند غلظت آلودگی از شاخه‌ی ۴۵، در شاخه‌ی ۵۶ کاهش غلظت رخ داده و در انتها خارج می‌شود. در مسیر ۲۴۵۶، آلودگی با الگوی مثلی نامنظم غلظت متغیر با زمان به صورت دو پیک غلظت از گره ۲ وارد مسیر شده و به دلیل تأخیر در زمان بارگذاری ناشی از شاخه‌ی ۳۴، در شاخه‌ی ۴۵ در کیلومترهای ۰/۳۳ ابتدا غلظت ناچیز و سپس با گذشت زمان افزایش غلظت روی می‌دهد و در کیلومترهای ۰/۶۶ با گذشت زمان، به دلیل موج مثبت برآیند ناشی از شاخه‌ی ۳۵، در شاخه‌ی ۵۶ افزایش غلظت داشته و در انتها کم‌کم غلظت خارج می‌شود. در مسیر ۱۳۴۵۶، آلودگی با دو پیک غلظت وارد مسیر شده و به دلیل برابری بارگذاری دو شاخه‌ی ۳۴ و ۳۵، در شاخه‌ی



شکل ۱۴. مقایسه پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی برای زمان‌های بی بعد شده ۰/۴۲ و ۰/۶ برای مثال ۴-۲-.

خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) برای هر دو حل انجام شده در هریک از شرایط مذکور محاسبه شد. نتایج نشان داد که، حل عددی انطباق خوبی نسبت به حل تحلیلی در شبکه‌ی رودخانه دارد و در مواردی که سرعت و ضریب پراکندگی در هر شاخه یک مقدار ثابت جدا از هم داشته باشد، حل‌های تحلیلی را به دلیل دقت و سرعت بالاتر، انعطاف بیشتر و توانایی شبیه‌سازی‌های دلخواه می‌توان جایگزین حل‌های عددی در شبکه‌ی رودخانه کرد. بنابراین حل تحلیلی صورت گرفته در این پژوهش برای شبکه‌ی رودخانه به طور عام و کاربرد آن در مدل‌سازی دو شبکه‌ی شاخه‌ی و حلقه‌ی از مهم‌ترین نوآوری این پژوهش است. همچنین، نتایج حاصله نشان داد که در محل‌های اتصال شاخه‌ها به یکدیگر، تغییرات غلظت آلودگی به صورت افزایشی یا کاهش‌ی است؛ که علت آن تغییر مشخصات جریان ورودی به هر شاخه (مانند دبی جریان) و سطح مقطع در هر شاخه است.

آن دسته الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری وارون عددی استفاده کرد که دقت و سرعت محاسبات بالایی داشته باشند. در مواردی که شبکه‌ی رودخانه از نظر تعداد شاخه‌ها، تفاوت مقدار ضریب پراکندگی و سرعت پیچیده‌تر باشد، حجم محاسبات به دلیل افزایش حجم ماتریس‌ها نظیر ماتریس نحوه‌ی اتصال، ماتریس سرعت، ماتریس ضریب پراکندگی، ماتریس سطح مقطع عرضی و ... به عنوان داده‌های ورودی برای شبکه بیشتر شده، در نهایت محاسبه‌ی ماتریس انتشار دشوارتر و دستگاه معادلات بزرگ‌تر خواهد بود. این امر علاوه بر افزایش هزینه‌ی محاسبات، زمان‌بر نیز هست. اما در مواردی که شبکه‌ی رودخانه از نظر تعداد شاخه‌ها، تفاوت مقدار ضریب پراکندگی و سرعت ساده‌تر باشد، هزینه‌ی محاسبات کم‌تر و شامل زمان کم‌تری خواهد بود.

در ادامه به منظور اعتبارسنجی و ارزیابی حل تحلیلی، از حل عددی استفاده شد و شاخص‌های آماری شامل ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع

پانوشتها

1. advection
2. dispersion
3. reaction
4. First fick's Law
5. Green Function Method
6. generaliaed integral transform technique (GITT)
7. Fourier Transform Method
8. Laplace Trtansform Method
9. inverse fourier transform
10. stretched gaussian distribution
11. conformable advection-dispersion equation
12. branch
13. loop
14. Dirichlet
15. ordinary differential equation (ODE)
16. concentrated matrix exponential
17. Gaver-Stehfest
18. Talbot
19. fully implicit
20. finite difference
21. central space
22. round-off errors
23. truncation errors

منابع (References)

1. Dietrich, WE., Wilson, CJ., Montgomery, DR. and et al. "Analysis of erosion thresholds, channel networks, and landscape morphology using a digital terrain model", *The Journal of Geology*, **101**(2), pp.259-78 (1993).
2. Montgommery, D. and Foufoula-Georgiou, E. "Channel network source representation using digital elevation model", *Water resources research*, **29**, pp. 3925-34 (1993).
3. Tarboton, DG., Bras, RL. and Rodriguez-Iturbe, I. "On the extraction of channel networks from digital elevation data", *Hydrological Processes*, **5**(1), pp. 81-100 (1991).
4. Campbell, RE., Winterbourn, MJ., Cochrane, TA. and et al. "Flow-related disturbance creates a gradient of metacommunity types within stream networks", *Landscape Ecology*, **30**(4), pp. 667-80 (2015).
5. Lazzaro, G., Soulsby, C., Tetzlaff, D. and et al. "A probabilistic approach to quantifying hydrologic thresholds regulating migration of adult Atlantic salmon into spawning streams", *Water Resources Research*, **53**(3), pp. 2264-77 (2017).
6. Sarremejame, R., Cañedo-Argüelles, M., Part, N. and et al. "Do metacommunities vary through time? Intermittent rivers as model systems", *Journal of Biogeography*, **44**(12), pp. 2752-63 (2017).
7. Dong, B., Ni, D. and Wang, Y. "Sharing a polluted river network", *Environmental and Resource Economics*, **53**(3), pp. 367-87 (2012).
8. Leibundgut, C., Maloszewski, P. and Külls, C. "Tracers in hydrology ", *John Wiley & Sons*, p.432 (2011).
9. Zhang, M-l., Shen, Y-m. and Guo, Y. "Development and application of a eutrophication water quality model for river networks", *Journal of Hydrodynamics*, **20**(6), pp. 719-26 (2008).
10. Heaton, LL., López, E., Maini, PK. and et al. "Advection, diffusion, and delivery over a network", *Physical Review E*, **86**(2), pp. 021905 (2012).
11. Guerrero, JP., Pimentel, LCG., Skaggs, TH. and et al. "Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**(13-14), pp. 3297-304 (2009).
12. Park, E. and Zhan, H. "Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer", *Journal of contaminant hydrology*, **53**(1-2), pp. 41-61 (2001).
13. Wang, H. and Wu, H. "Analytical solutions of three-dimensional contaminant transport in uniform flow field in porous media", *A library Frontiers of Environmental Science & Engineering in China*, **3**(1), pp. 112-28 (2009).
14. Leij, FJ. and Van Genuchten, MT. "Analytical modeling of nonaqueous phase liquid dissolution with Green's functions", *Transport in Porous Media*, **38**(1), pp. 141-66 (2000).
15. Sanskrityayn, A., H. Suk, and N. Kumar, "Analytical solutions for solute transport in groundwater and riverine flow using Green's function method and pertinent coordinate transformation method", *Journal of hydrology*, **547**, pp. 517-533 (2017).
16. Sanskrityayn, A., et al. "Analytical solution of two-dimensional advection-dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green's function method", *Environmental Fluid Mechanics*, **18**(3), pp. 739-757 (2018).
17. Mashhadgarme, N., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J., "Analytical solutions to one-and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method", *Sharif Journal of Civil Engineering*, **33-2**, pp. 77-91 (in Persian) (2017).
18. Leij, FJ., Toride, N. and Van Genuchten, MT. "Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media", *Journal of Hydrology*, **151**(2-4), pp. 193-228 (1993).
19. Cotta, R.M., Knupp, D.C. and Naveira-Cotta, C.P. "Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems", *Springer*, p.175 (2016).
20. Adrian, DD, Yu, FX .and Barbe, D. "Water quality modeling for a sinusoidally varying waste discharge concentration", *Water Research*, **28**(5), pp. 1167-74 (1994).
21. Dresnack, R. and Dobbins WE. "Numerical analysis of BOD and DO profiles", *Journal of the Sanitary Engineering Division*, **94**(5), pp. 789-808 (1968).
22. Yu. F., Adrian, D. and Singh, V. "Modeling river quality by the superposition method", *Journal of Environmental Systems*, **20**(4), pp. 1-16 (1991).
23. Chen, J-S., Liu, C-W., Liang, C-P. and et al. "Generalized analytical solutions to sequentially coupled multi-species advective-dispersive transport equations in a finite domain subject to an arbitrary time-dependent source boundary condition", *Journal of hydrology*, **456**, pp. 101-9 (2012).

24. Guerrero, JP. and Skaggs, T. "Analytical solution for one-dimensional advection-dispersion transport equation with distance-dependent coefficients", *Journal of Hydrology*, **390**(1-2), pp. 57-65 (2010).
25. Bharati, VK., Singh, VP., Sanskritayn, A. and et al. "Analytical solution for solute transport from a pulse point source along a medium having concave/convex spatial dispersivity within fractal and Euclidean framework", *Journal of Earth System Science*, **128**(8), pp. 1-19 (2019).
26. Shukla, V. "Analytical solutions for unsteady transport dispersion of nonconservative pollutant with time-dependent periodic waste discharge concentration", *Journal of Hydraulic Engineering*, **128**(9), pp. 866-9 (2002).
27. Yang, S., Zhou, H., Zhang, S. and et al. "Analytical solutions of advective-dispersive transport in porous media involving conformable derivative", *Applied Mathematics Letters*, **92**, pp. 85-92 (2019).
28. Xu, Z. and Meakin, P. "Upscaling of solute transport in heterogeneous media with non-uniform flow and dispersion fields", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(18-19), pp. 8533-42 (2013).
29. Simpson, MJ. and Ellery, AJ. "Exact series solutions of reactive transport models with general initial conditions", *Journal of Hydrology*, **513**, pp. 7-12 (2014).
30. Williams, GP. and Tomasko, D. "Analytical solution to the advective-dispersive equation with a decaying source and contaminant", *Journal of Hydrologic Engineering*, **13**(12), pp. 1193-6 (2008).
31. Kumar, P. and Sudheendra, S. "Mathematical solution of transport of pollutant in unsaturated porous media with retardation factor", *International Journal of Applied Engineering Research*, **13**(1), pp. 100-4 (2018).
32. Chen, J.-S., et al. "Analytical model for advective-dispersive transport involving flexible boundary inputs, initial distributions and zero-order productions", *Journal of Hydrology*, **554**, pp. 187-199 (2017).
33. Carr, E.J. "New semi-analytical solutions for advection-dispersion equations in multilayer porous media", *Transport in Porous Media*, **135**(1), pp. 39-58 (2020).
34. Yadav, R. and Kumar, L. "Solute transport for pulse type input point source along temporally and spatially dependent flow", *Pollution*, **5**(1), p. 53-70 (2019).
35. Yadav, R. and Yadav, V. "Three-dimensional analytical models for time-dependent coefficients through uniform and varying plane input source in semi-infinite adsorbing porous media", *Pollution*, **5**(1), pp. 81-98 (2019).
36. Genuchten, MT., Leij, FJ., Skaggs, TH. and et al. "Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation", *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, **61**(2), pp. 146 (2013).
37. Mazaheri, M., MV Samani, J. and Samani H. "Analytical solution to one-dimensional advection-diffusion equation with several point sources through arbitrary time-dependent emission rate patterns", *Journal of Agricultural Science and Technology*, **15**(6):1231-45 (2013).
38. Kumar, A., Jaiswal, DK. and Kumar, N. "Analytical solutions of one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in a finite domain", *Journal of Earth System Science*, **118**(5), pp. 539-49 (2009).
39. Yates, SR. "An analytical solution for one-dimensional transport in heterogeneous porous media", *Water Resources Research*, **26**(10), pp. 2331-8 (1990).
40. Bavandpouri Gilan, N., Mazaheri, M. and Fotouhi Firouzabadi, M. "Analytical solution of contaminant transport equation in river by arbitrary variable coefficients using generalized integral transform technique", *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **7**(1), pp. 89-116 (in Persian) (2017).
41. Mashhadgarme, N., Mohammadvali Samani, J. and Mazaheri, M. "Analytical solution of pollution transport equation with arbitrary time pattern of multiple point sources using Green's function method", *Journal of Hydraulics*, **8**(4), pp. 13-25 (in Persian) (2013).
42. Ramezani M., et al. "Numerical modelling-based comparison of longitudinal dispersion coefficient formulas for solute transport in rivers", *Hydrological Sciences Journal*, **64**(7), pp. 808-819 (2019).
43. Najafzadeh, M. et al. "A comprehensive uncertainty analysis of model-estimated longitudinal and lateral dispersion coefficients in open channels", *Journal of Hydrology*, **603**, pp. 126850 (2021).
44. Noori, R. et al. "Estimation of the dispersion coefficient in natural rivers using a granular computing model", *Journal of Hydraulic Engineering*, **143**(5), pp. 04017001 (2017).
45. Korn, GA. and Korn, TM. "Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review", *Courier Corporation*, p.1152 (2000).
46. Horváth, G., Horváth, I., Almousa, SA-D. and et al. "Numerical inverse laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions", *Performance Evaluation*, **137**, pp. 102067 (2020).
47. Stehfest, H. "Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]", *Communications of the ACM*, **13**(1), pp. 47-9 (1970).
48. Villinger, H. "Solving cylindrical geothermal problems using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform", *Geophysics*, **50**(10), pp. 1581-7 (1985).
49. Murli, A. and Rizzardi, M. "Algorithm 682: Talbot's method of the Laplace inversion problems", *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **16**(2), pp. 158-68 (1990).