

کنترل همزمان جهت‌گیری و ارتعاشات خمشی - پیچشی ماهواره‌ی دارای پانل‌های چندقسمتی به کمک کنترل - مشاهده‌گر مرزی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

محمد مهدی عطایی (دانشجوی دکتری)

حسین نجات پیشکناری (دانشیار)

حسن سالاریه* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۴۰۱ (۱۴۰۱)
دوره ۳-۲، شماره ۱، ص. ۵۱-۶۳ (پژوهشی)

در این مقاله کنترل مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر معادلات جزئی برای وضعیت و ارتعاشات یک فرم کلی از ماهواره‌های انعطاف‌پذیر و با لحاظ پیچش و خمش توأم ارائه شده است. دینامیک وضعیت بدنه‌ی صلب و ارتعاشات صفحات خورشیدی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی را تشکیل می‌دهد که در این مقاله مستقیماً و بدون گسسته‌سازی کنترل می‌شود. در روش ارائه شده کمینه تعداد سیگنال پسخوراند از مرز قابل استفاده است که توسط مشاهده‌گر تخمین زده می‌شود. بنابراین فقط داده‌های وضعیت ماهواره و آهنگ تغییرات آن بایستی اندازه‌گیری شود ولی همچنان سیستم کنترل از اطلاعات مربوط به ارتعاشات در اجزای گسترده بهره می‌برد. پایداری مجانبی سیستم مدار بسته اثبات می‌شود و از طریق شبیه‌سازی اجزای محدود، عملکرد مناسب این کنترل‌کننده‌ی مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر نشان داده می‌شود.

واژگان کلیدی: مشاهده‌گر معادلات جزئی، کنترل مرزی، ماهواره انعطاف‌پذیر، دینامیک خارج از صفحه.

۱. مقدمه

در صنعت مدرن اجرای انعطاف‌پذیر کاربرد رو به رشدی دارند زیرا وزن کمتر و مصرف انرژی پایین‌تری دارند. سیستم‌های فضاپایه مانند ماهواره‌ها و بازوهای مکانیکی صنعتی از جمله کاربردهای رایج در این زمینه‌اند. این ادوات عموماً متشکل از اجزای صلب و منعطف هستند. اما درجات آزادی بی‌نهایت در یک قطعه‌ی گسترده و معادلات دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی^۱ توأم کنترل دقیق را با دشواری‌هایی مواجه می‌سازد.

در ادبیات روش‌های متنوعی برای کنترل وضعیت و ارتعاشات ماهواره‌های انعطاف‌پذیر بر اساس گسسته‌سازی معادلات جزئی معرفی شده است. برای مثال روش‌های زمان بهینه، توزیع‌گشتاور به صورت مقید، مود لغزشی به علاوه تنظیم‌کننده‌ی مرتبه‌ی دوم خطی^۲، ترکیب کنترل پسخوراند نرخ تغییر کرنش با کنترل لیاپانوف، تطبیقی و مقاوم، پیش‌بینی مدل، پسخوراند تناسبی و مشتقی و برخی روش‌های ابتکاری^{۱-۱۱} به کار گرفته شده است. اما مودهای به حساب نیامده در این رویکردها امکان دارد کیفیت

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳/۶/۱۴۰۰، اصلاحیه ۸/۸/۱۴۰۰، پذیرش ۵/۱۰/۱۴۰۰.

DOI:10.24200/J40.2021.58511.1604

mehdi.sut@gmail.com
nejat@sharif.edu
salarieh@sharif.edu

و پایداری پاسخ مدار بسته را تحت تأثیر قرار دهد یا آن که ناپایداری سرریز^۳ رخ دهد. اخیراً برای اجتناب از خطاها، توجه بیشتری به کنترل مستقیم معادلات جزئی معطوف شده است. این ایده از طریق نصب حسگرها و عملگرها در هر نقطه از گستره‌ی جسم یا صرفاً روی مرزهای آن تحقق می‌یابد. در مطالعات پیشین، برای اعمال کنترل‌گر مود لغزشی مرزی بر یک تیر اولر- برنولی تحت اغتشاش‌های محدود نامعلوم، رویه‌ی ارائه شده است.^[۱۲] همچنین برای یک بازوی دوعضوی صلب - منعطف با کوانتیزه کردن ورودی یک کنترل‌کننده‌ی مرزی طراحی شده که به تعداد زیادی سیگنال پسخوراند از مرزها نیاز دارد.^[۱۳] محققان برای پایداری نمای ارتعاشات انعطافی حین حرکت در یک چرنیل دروازه‌ی یک کنترل‌گر مرزی ارائه کردند.^[۱۴] آنان مدل‌های ساده‌ی از ماهواره‌ها را به صورت یک تیر با تنها یک درجه آزادی انتقالی در نظر گرفتند.^[۱۵ و ۱۶] دیگرانی نیز ماهواره را به صورت یک تیر چرخان در صفحه فرض کردند.^[۱۷] در این پژوهش‌ها کنترل‌کننده‌ی معادلات جزئی با استفاده از پسخوراند و قوانین کنترلی پیچیده معرفی شده است.

به علاوه در مطالعات بعدی، کنترل‌کننده‌های مرزی با پایداری مجانبی و نمای

برای ماهواره‌ی در حرکت صفحه‌ی طراحی شد. [۱۸ و ۱۹] مدل ماهواره به صورت دو تیر طره که به دو سمت بدنه‌ی صلب جوش شده‌اند فرض شده است. برای اعمال کنترل تعدادی سیگنال پسخوراند با مشتقات از مراتب مختلف نسبت به مکان و زمان مورد نیاز است.

برای کاهش یا رفع نیاز به حسگرهای مرزی و در عین حال بهره بردن از اطلاعات دینامیکی اجزای گسترده، یک راهکار عبارت است از استفاده از مشاهده‌گر معادلات جزئی. با این وجود تاکنون کاربردهای زیادی از این دست ارائه نشده است. مرور روش‌های متنوع طراحی مشاهده‌گر [۲۰] نشان داده به منظور طراحی مشاهده‌گر باید ابعاد سیستم کاهش یابد، که به آن «متمرکزسازی» گفته می‌شود. بنابراین دو دسته رویکرد قابل ذکر است: «متمرکزسازی پیشین^۴» که از طریق گسسته‌سازی مدل دینامیکی انجام می‌شود و «متمرکزسازی پسین^۵» که صرفاً حین محاسبه‌ی نتایج مشاهده‌گر بی‌نهایت بعدی طراحی می‌شود.

از روش‌های اجزای محدود، اختلاف محدود^۶، تخمین گارکین، بسط توابع ویژه^۷ و تجزیه‌ی متعامد^۸ به منظور متمرکزسازی بهره می‌گیرند. برخی از مطالعات موجود [۲۱ و ۲۲] نمونه‌هایی از متمرکزسازی پیشین هستند در حالی‌که در بررسی‌های دیگر [۲۳-۲۵] مشاهده‌گرهای بی‌نهایت بعدی طراحی شده است.

محققان به وسیله‌ی مشاهده‌گر H_∞ ، پایدارسازی وضعیت ماهواره به صورت مقاوم در برابر اغتشاش را انجام داده‌اند. [۲۶] آنان همچنین به کنترل وضعیت برای ماهواره‌های منعطف پرداخته [۲۷] و مشاهده‌گری برای کواترنیون‌ها و مدل گسسته‌سازی شده طراحی کرده‌اند. در مطالعات دیگری [۲۸]، یک کنترل‌کننده‌ی مقاوم به همراه یک جبران‌کننده‌ی مبتنی بر مشاهده‌گر طراحی شده است تا تبعیت کردن وضعیت در مدل متمرکز شده دو ماهواره‌ی میکروصلب که با تیر انعطاف‌پذیر به یکدیگر متصل شده‌اند، بررسی شود.

پژوهشگران یک مشاهده‌گر برای بازوی مکانیکی دوعضوی بر اساس مدل دینامیکی غیرخطی با معادلات جزئی طراحی کرده‌اند [۲۹] که به محاسبه‌ی پسخوراند‌هایی پیچیده از مرزها نیاز دارد. مشاهده‌گر دیگری نیز بر اساس مدل بازوی مکانیکی منعطف تک عضوی با معادلات جزئی معرفی شده است [۳۰] که به پسخوراند وضعیت و نرخ تغییر آن علاوه بر مکان و سرعت نوک بازو نیاز دارد.

کنترل مرزی خروجی مبنی بر مشاهده‌گر برای یک تیر اولر - برنولی [۳۱] می‌تواند به طور نمونه برای عضو انعطاف‌پذیر در ربات‌ها اعمال شود. در مطالعه‌ی دیگری [۳۲] نیز با استفاده از روش پسگام زدن، طراحی مشاهده‌گر برای یک دسته از معادلات مرتبط دیفرانسیل هذلولی معمولی و جزئی مربوط به سیستم‌های زنجیره‌ی^۹ معرفی شده است. اندازه‌گیری در یک مرز انتهایی انجام می‌شود و نویسندگان به طور موفقیت‌آمیزی روش خود را در فرایند حفاری چاه نفت به کار برده‌اند. معادلات دیفرانسیل مورد بررسی، فقط از مرتبه اول مشتقات زمان و مکان هستند. در مطالعه‌ی دیگر، ماهواره‌ی منعطف به صورت یک تیر طره چرخان جوش شده به بدنه‌ی صلب مدل شده است. [۳۳] به منظور کنترل وضعیت و ارتعاشات از دو قانون کنترلی مرزی و یک گشتاور کنترلی گسترده استفاده شده است. مشاهده‌گری برای تخمین نیروی اغتشاشی گسترده طراحی شده است. البته تمامی متغیرهای حالت از دینامیک وضعیت و ارتعاشات که در مدل دینامیکی ظاهر شده‌اند بایستی اندازه‌گیری شود که عملیاتی نیست.

۱.۱. نوآوری‌های مطالعه‌ی حاضر

• عموماً در کنترل مرزی ماهواره فقط به دینامیک صفحه‌ی شامل دوران صلب

بدنه‌ی اصلی به همراه تغییرشکل خمشی صفحات خورشیدی پرداخته شده است. در نوشتار حاضر علاوه بر درجات آزادی مذکور، معادلات جزئی پیش صفحات خورشیدی به صورت مرتبط با دینامیک دوران بدنه‌ی صلب محاسبه و کنترل شده است.

• معادلات جزئی گسسته‌سازی نمی‌شود و تلاش بر آن است تا کمترین تعداد سیگنال پسخوراند مورد نیاز باشد.

• با طراحی مشاهده‌گر معادلات جزئی لازم نیست سیگنال‌های پسخوراند مشتمل بر مشتقات جزئی زمان و موقعیت از مرز سیستم اندازه‌گیری شود و فقط با اندازه‌گیری وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره، داده‌های مرزی به وسیله مشاهده‌گر محاسبه و استفاده می‌شود، که در نتیجه پیاده‌سازی روش کنترلی را به راحتی امکان‌پذیر می‌کند.

• در این نوشتار کنترل وضعیت هم‌زمان با فرونشاندن ارتعاشات انجام می‌شود در حالی‌که فقط از دو عملگر گشتاور معمول داخل بدنه‌ی اصلی استفاده می‌شود.

• کنترل‌گر مورد نظر علاوه بر تأمین پایداری، امکان تنظیم خصوصیات رفتار گذرا در دینامیک وضعیت ماهواره را فراهم می‌کند.

• در مقالات موجود معمولاً ساختار ماهواره به صورت تیر چرخان که بدنه‌ی اصلی در وسط آن قرار دارد مدل شده است. اما در این پژوهش تلاش شده است به شرایط واقعی نزدیک‌تر شویم. در این راستا چندقسمتی بودن صفحات خورشیدی بازشونده لحاظ شده است.

بدین منظور معادلات دینامیکی به کمک اصل هامیلتون محاسبه می‌شود. مشاهده‌گر و سپس کنترل‌کننده‌ی مرزی طراحی و اثبات پایداری سیستم حلقه بسته انجام می‌شود. به منظور شبیه‌سازی مدل دینامیکی به روش اجزای محدود نیز به دست می‌آید و عملکرد کنترل‌کننده‌ی مبنی بر مشاهده‌گر ارائه شده بررسی می‌شود.

۲.۱. فرضیات

صفحات خورشیدی دارای مقطع مستطیل شکل و به لحاظ هندسی و خواص فیزیکی یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بدنه‌ی اصلی یک مکعب صلب است. صفحات خورشیدی با نظریه‌ی تیرکلاسیک مدل می‌شود یعنی از تغییر شکل مقطع^{۱۰} صرف نظر می‌شود. نظر به شعاع بسیار بزرگ حرکت مداری ماهواره، ثابت زمانی دینامیک مربوطه بسیار بزرگتر از دینامیک وضعیت ماهواره همچنین ارتعاشات است؛ لذا ارتباط حرکات تغییر وضعیت و مداری ماهواره قابل صرف نظر کردن است. این فرضیات همگی در میان مقالات مربوط به کنترل معادلات جزئی وضعیت و ارتعاشات ماهواره رایج است. [۱۵-۱۹]

با توجه به ابعاد و شکل هندسی، سختی خمشی در راستای محور لولاهای قطعات پانل بسیار کمتر از سختی خمشی در راستای دیگر است. به این دلیل دامنه‌ی جابه‌جایی ارتعاشی عمود بر صفحات بیشتر قابل توجه است. در خمش، روابط تیر اولر - برنولی^{۱۱} لحاظ و با توجه به وجود دو محور تقارن در هر مقطع، معادلات پیش و خمش به صورت غیر مرتبط^{۱۲} به دست می‌آید. [۳۴] در واقع به لحاظ هندسی هر مقطع دارای دو محور تقارن و توزیع جرم نیز در صفحات خورشیدی و هاب به صورت یکنواخت فرض می‌شود.

$$R_{bl} = -EI[h w'''_{l\lambda}|_0 - w''_{l\lambda}|_0]$$

$$= -EIh w'''_{l\lambda}|_0 + k_b w'_{l\lambda}|_0 + c_b \dot{w}'_{l\lambda}|_0$$

$$R_{br} = -EI[h w'''_{r\lambda}|_0 - w''_{r\lambda}|_0]$$

$$= -EIh w'''_{r\lambda}|_0 + k_b w'_{r\lambda}|_0 + c_b \dot{w}'_{r\lambda}|_0 \quad (10-2)$$

$$\rho I_p \ddot{\Phi}_{r/l\ n} - G I_p \varphi''_{r/l\ n} = 0 \quad (11-1)$$

$$J_x \ddot{\phi} = \tau_x + R_{tl} + R_{tr}, R_{tl} = G I_p \varphi'_{l\lambda}|_0 + c \dot{\varphi}_{l\lambda}|_l$$

$$R_{tr} = G I_p \varphi'_{r\lambda}|_0 + c \dot{\varphi}_{r\lambda}|_l \quad (11-2)$$

در روابط فوق اندیس (r/l, n) سمت راست یا چپ و شماره قسمت مورد نظر از صفحات خورشیدی را تعیین می‌کند. به علاوه R_{tr} , R_{tl} , R_{br} , R_{bl} گشتاورهای عکس‌العملی در خمش و پیچش هستند که از جانب صفحات سمت چپ و راست به بدنه اصلی اعمال می‌شوند.

۳. طراحی مشاهده‌گر

با فرض آن که تنها مقادیر وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره اندازه‌گیری می‌شود، تمامی متغیرهای حالت دیگر به وسیله مشاهده‌گر تخمین زده می‌شود. برای محاسبه‌ی معادلات مشاهده‌گر که به فرم دیفرانسیل مرتبط معمولی و جزئی است، معادلات دینامیکی سیستم چنین بازنویسی می‌شود:

$$\rho \ddot{A}y_{r/l\ n} + EI \dot{w}'''_{r/l\ n} = 0 \quad (12-1)$$

$$J_z \ddot{\theta} = \tau_z + \hat{R}_{bl} + \hat{R}_{br} - k_{bop} \tilde{\theta} - k_{bod} \dot{\tilde{\theta}}; \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

$$\hat{R}_{bl} = -EI[h \hat{w}'''_{l\lambda}|_0 - \hat{w}''_{l\lambda}|_0]$$

$$= -EIh \hat{w}'''_{l\lambda}|_0 + k_b \hat{w}'_{l\lambda}|_0 + c_b \dot{\hat{w}}'_{l\lambda}|_0$$

$$\hat{R}_{br} = -EI[h \hat{w}'''_{r\lambda}|_0 - \hat{w}''_{r\lambda}|_0]$$

$$= -EIh \hat{w}'''_{r\lambda}|_0 + k_b \hat{w}'_{r\lambda}|_0 + c_b \dot{\hat{w}}'_{r\lambda}|_0 \quad (12-2)$$

$$\rho I_p \ddot{\Phi}_{r/l\ n} - G I_p \hat{\varphi}''_{r/l\ n} = 0 \quad (13-1)$$

$$J_x \ddot{\phi} = \tau_x + \hat{R}_{tl} + \hat{R}_{tr} - k_{top} \tilde{\phi} - k_{tod} \dot{\tilde{\phi}}; \tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$$

$$\hat{R}_{tl} = G I_p \hat{\varphi}'_{l\lambda}|_0 + c \dot{\hat{\varphi}}_{l\lambda}|_l$$

$$\hat{R}_{tr} = G I_p \hat{\varphi}'_{r\lambda}|_0 + c \dot{\hat{\varphi}}_{r\lambda}|_l \quad (13-2)$$

نمادهای $(\hat{\cdot})$ و $(\tilde{\cdot})$ به ترتیب معرف مقادیر تخمینی و خطای تخمین متغیرهاست. ضرایب k_{tod} و k_{top} , بهره‌های مثبت مشاهده‌گر هستند. به طور مشابه روابط شرایط مرزی ۶ و ۷ قابل بازنویسی است. در ۱۲-۲ و ۱۳-۲ خطاهای تخمین وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره به عنوان ورودی در معادلات مشاهده‌گر استفاده شده است. با تفریق روابط بالا از معادلات دینامیکی سیستم، دینامیک خطا به دست می‌آید:

$$\rho \ddot{A}y_{r/l\ n} + EI \tilde{w}'''_{r/l\ n} = 0 \quad (14-1)$$

$$J_z \ddot{\tilde{\theta}} = \tilde{R}_{bl} + \tilde{R}_{br} - k_{bop} \tilde{\theta} - k_{bod} \dot{\tilde{\theta}}; \tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$$

$$\tilde{R}_{bl} = -EI[h \tilde{w}'''_{l\lambda}|_0 - \tilde{w}''_{l\lambda}|_0]$$

$$\delta w'_{r\lambda}|_l : EI w''_{r\lambda}|_l - k_s (w'_{r\lambda}|_0 - w'_{r\lambda}|_l)$$

$$- c_s (\dot{w}'_{r\lambda}|_0 - \dot{w}'_{r\lambda}|_l) = 0 \quad (6-2)$$

$$\delta w'_{r\lambda}|_0 : -EI w''_{r\lambda}|_0 + k_s (w'_{r\lambda}|_0 - w'_{r\lambda}|_l)$$

$$+ c_s (\dot{w}'_{r\lambda}|_0 - \dot{w}'_{r\lambda}|_l) = 0 \quad (6-3)$$

$$\delta w'_{l\lambda}|_0 : k_b w'_{l\lambda}|_0 - EI w''_{l\lambda}|_0 + c_b \dot{w}'_{l\lambda}|_0 = 0 \quad (6-4)$$

$$\delta w'_{l\lambda}|_l : EI w''_{l\lambda}|_l - k_s (w'_{l\lambda}|_0 - w'_{l\lambda}|_l)$$

$$- c_s (\dot{w}'_{l\lambda}|_0 - \dot{w}'_{l\lambda}|_l) = 0 \quad (6-5)$$

$$\delta w'_{l\lambda}|_0 : -EI w''_{l\lambda}|_0 + k_s (w'_{l\lambda}|_0 - w'_{l\lambda}|_l)$$

$$+ c_s (\dot{w}'_{l\lambda}|_0 - \dot{w}'_{l\lambda}|_l) = 0 \quad (6-6)$$

$$\varphi_{r\lambda}|_l = \varphi_{r\lambda}|_0 \rightarrow \delta \varphi_{r\lambda}|_l : G I_p (\varphi'_{r\lambda}|_l - \varphi'_{r\lambda}|_0) = 0 \quad (7-1)$$

$$\delta \varphi_{r\lambda}|_l : G I_p \varphi'_{r\lambda}|_l + c \dot{\varphi}_{r\lambda}|_l = 0 \quad (7-2)$$

$$\varphi_{l\lambda}|_l = \varphi_{l\lambda}|_0 \rightarrow \delta \varphi_{l\lambda}|_l : G I_p (\varphi'_{l\lambda}|_l - \varphi'_{l\lambda}|_0) = 0 \quad (7-3)$$

$$\delta \varphi_{l\lambda}|_l : G I_p \varphi'_{l\lambda}|_l + c \dot{\varphi}_{l\lambda}|_l = 0 \quad (7-4)$$

از جمع معادلات شرایط مرزی ۶ برای تیرهای سمت راست و تیرهای سمت چپ، خواهیم داشت:

$$k_b w'_{r\lambda}|_0 + c_b \dot{w}'_{r\lambda}|_0 + EI (w''_{r\lambda}|_l - w''_{r\lambda}|_0 - w''_{r\lambda}|_0) = 0 \quad (8-1)$$

$$k_b w'_{l\lambda}|_0 + c_b \dot{w}'_{l\lambda}|_0 + EI (w''_{l\lambda}|_l - w''_{l\lambda}|_0 - w''_{l\lambda}|_0) = 0 \quad (8-2)$$

پس از جایگذاری روابط ۸ در ۴-۵ و ۷ در ۵-۵ خواهیم داشت:

$$J_z \ddot{\tilde{\theta}} = \tau_z - EIh (w'''_{r\lambda}|_0 + w'''_{l\lambda}|_0) + k_b (w'_{r\lambda}|_0 + w'_{l\lambda}|_0) + c_b (\dot{w}'_{r\lambda}|_0 + \dot{w}'_{l\lambda}|_0) \quad (9-1)$$

$$J_x \ddot{\tilde{\phi}} = \tau_x + G I_p (\varphi'_{r\lambda}|_0 + \varphi'_{l\lambda}|_0) + c \dot{\varphi}_{r\lambda}|_l + c \dot{\varphi}_{l\lambda}|_l \quad (9-2)$$

معادلات ۹ نشان می‌دهد چگونه ارتعاشات صفحات خورشیدی دینامیک وضعیت بدنه اصلی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. جملات دوم، سوم و چهارم در سمت راست رابطه‌ی ۹-۱ به ترتیب مبین گشتاور اعمال شده از طریق نیروی برشی و گشتاور ناشی از سختی ارتجاعی و میرایی ویسکوز در اتصال بین صفحات خورشیدی با بدنه اصلی ماهواره است. همچنین جمله‌ی دوم در سمت راست معادله‌ی ۹-۲ معرف گشتاور برشی ناشی از پیچش صفحات خورشیدی در محل اتصال با هاب است.

برای یک فرم کلی از ماهواره‌ها با صفحات متشکل از هر تعداد قسمت در دو یا یک سمت، دستگاه معادلات دینامیکی حاکم، شامل ۱-۱ و ۱۱-۱ را برای هر قسمت از صفحات به همراه ۲-۱ و ۱۱-۲ به عنوان دینامیک وضعیت، می‌توان نوشت:

$$\rho A \ddot{y}_{r/l\ n} + EI w'''_{r/l\ n} = 0 \quad (10-1)$$

$$J_z \ddot{\theta} = \tau_z + R_{bl} + R_{br}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^l \ddot{w}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \ddot{w}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} + \int_0^l \ddot{w}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \ddot{w}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} \\
 \dot{E}_{to} = & \rho I_p \left[\int_0^l \ddot{\Phi}_{r\tau} \ddot{\Phi}_{r\tau} d\xi_{r\tau} + \int_0^l \ddot{\Phi}_{r\tau} \ddot{\Phi}_{r\tau} d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \ddot{\Phi}_{1\tau} \ddot{\Phi}_{1\tau} d\xi_{1\tau} + \int_0^l \ddot{\Phi}_{1\tau} \ddot{\Phi}_{1\tau} d\xi_{1\tau} \left. + \right. \\
 G I_p \left[\int_0^l \dot{\varphi}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{\varphi}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{\varphi}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{\varphi}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} \left. \right] \quad (17-2)
 \end{aligned}$$

انتگرال‌های انرژی جنبشی را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \rho A \dot{y}_{r\tau} \ddot{y}_{r\tau} d\xi_{r\tau} & = \int_0^l -E \dot{I} y_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \\
 -E I [\dot{y}_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau}]_0^l & - \int_0^l \dot{y}'_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \\
 -E I \{ [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r\tau}]_l \ddot{w}'_{r\tau} \}_0^l & - h \dot{\theta} \ddot{w}'_{r\tau} \}_0^l \\
 - [\dot{y}'_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau}]_0^l & - \int_0^l \ddot{w}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{y}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} \} \\
 \int_0^l \rho A \dot{y}_{r\tau} \ddot{y}_{r\tau} d\xi_{r\tau} & = \int_0^l -E \dot{I} y_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \\
 -E I [\dot{y}_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau}]_0^l & - \int_0^l \dot{y}'_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \\
 -E I \{ [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r\tau}]_l \ddot{w}'_{r\tau} \}_0^l & - [(h+l)\dot{\theta} + \dot{w}_{r\tau}]_0 \ddot{w}'_{r\tau} \}_0^l \\
 - [\dot{y}_{r\tau} \ddot{w}'_{r\tau}]_0^l & - \int_0^l \ddot{w}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{y}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} \} \quad (18-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I) \int_0^l \rho I_p \ddot{\Phi}_{r\tau} \ddot{\Phi}_{r\tau} d\xi_{r\tau} & \stackrel{(15)}{=} \int_0^l \ddot{\Phi}_{r\tau} G I_p \dot{\varphi}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \\
 G I_p \ddot{\Phi}_{r\tau} \dot{\varphi}'_{r\tau} \Big|_0^l & - \int_0^l G I_p \dot{\Phi}'_{r\tau} \dot{\varphi}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} = G I_p \{ -\dot{\Phi} \dot{\varphi}'_{r\tau} \}_0^l \\
 + (\dot{\Phi} + \dot{\varphi}_{r\tau}|_l) \dot{\varphi}'_{r\tau} \Big|_0^l & - \int_0^l \dot{\varphi}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{\Phi}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} \} \quad (19-1)
 \end{aligned}$$

$$\text{II) } \int_0^l \rho I_p \ddot{\Phi}_{r\tau} \ddot{\Phi}_{r\tau} d\xi_{r\tau} = \int_0^l \ddot{\Phi}_{r\tau} G I_p \dot{\varphi}'_{r\tau} d\xi_{r\tau} =$$

$$\begin{aligned}
 & = -E I h \ddot{w}'_{1\tau} \Big|_0^l + k_b \ddot{w}'_{1\tau} \Big|_0^l + c_b \dot{w}'_{1\tau} \Big|_0^l \\
 \dot{R}_{br} & = -E I [h \ddot{w}'_{r\tau} \Big|_0^l - \ddot{w}'_{r\tau} \Big|_0^l] \\
 & = -E I h \ddot{w}'_{r\tau} \Big|_0^l + k_b \ddot{w}'_{r\tau} \Big|_0^l + c_b \dot{w}'_{r\tau} \Big|_0^l \quad (14-2) \\
 \rho I_p \ddot{\Phi}_{r\tau} \Big|_n - G I_p \dot{\varphi}'_{r\tau} \Big|_n & = 0 \quad (15-1) \\
 J_x \ddot{\phi} & = \dot{R}_{tl} + \dot{R}_{tr} - k_{top} \dot{\phi} - k_{toad} \dot{\phi}; \ddot{\phi} = \phi - \hat{\phi} \\
 \dot{R}_{tl} & = G I_p \dot{\varphi}'_{1\tau} \Big|_0^l + c \dot{\varphi}_{1\tau} \Big|_l \\
 \dot{R}_{tr} & = G I_p \dot{\varphi}'_{r\tau} \Big|_0^l + c \dot{\varphi}_{r\tau} \Big|_l \quad (15-2)
 \end{aligned}$$

به منظور اثبات پایداری این مشاهده‌گر، یک تابع کاندید لیاپانوف تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 V_o & = E_{bo} + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k_{bop} \tilde{\theta}^2 \\
 & + \frac{1}{2} J_x \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} k_s [(\dot{w}'_{r\tau})_0 - \dot{w}'_{r\tau}|_l]^2 \\
 & + E_{to} + \frac{1}{2} k_{top} \dot{\phi}^2 + (\dot{w}'_{1\tau}|_0 - \dot{w}'_{1\tau}|_l)^2 \\
 & + \frac{1}{2} k_b [(\dot{w}'_{r\tau})_0]^2 + (\dot{w}'_{1\tau}|_0)^2 \quad (16-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{bo} & = \frac{1}{2} \rho A \left[\int_0^l \dot{y}_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{y}_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{y}_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{y}_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} \left. + \frac{1}{2} E I \left[\int_0^l \dot{w}'_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} \right. \right. \\
 & + \int_0^l \dot{w}'_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{w}'_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{w}'_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} \left. \right] \quad (16-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{to} & = \frac{1}{2} \rho I_p \left[\int_0^l \dot{\Phi}_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{\Phi}_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{\Phi}_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{\Phi}_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} \left. + \frac{1}{2} G I_p \left[\int_0^l \dot{\varphi}'_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} \right. \right. \\
 & + \int_0^l \dot{\varphi}'_{r\tau}^2 d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{\varphi}'_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{\varphi}'_{1\tau}^2 d\xi_{1\tau} \left. \right] \quad (16-3)
 \end{aligned}$$

سپس مشتق زمانی تابع کاندید لیاپانوف مثبت معین بالا را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_o & = J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + k_{bop} \tilde{\theta} \ddot{\theta} + J_x \dot{\phi} \ddot{\phi} + k_{top} \dot{\phi} \ddot{\phi} \\
 & + k_b [(\dot{w}'_{r\tau})_0] (\dot{w}'_{r\tau})_0 + (\dot{w}'_{1\tau}|_0) (\dot{w}'_{1\tau}|_0) \\
 & + k_s [(\dot{w}'_{r\tau}|_0 - \dot{w}'_{r\tau}|_l) (\dot{w}'_{r\tau}|_0 - \dot{w}'_{r\tau}|_l)] + \dot{E}_{bo} \\
 & + (\dot{w}'_{1\tau}|_0 - \dot{w}'_{1\tau}|_l) (\dot{w}'_{1\tau}|_0 - \dot{w}'_{1\tau}|_l) + \dot{E}_{to} \quad (17-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{bo} & = \rho A \left[\int_0^l \dot{y}_{r\tau} \ddot{y}_{r\tau} d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{y}_{r\tau} \ddot{y}_{r\tau} d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{y}_{1\tau} \ddot{y}_{1\tau} d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{y}_{1\tau} \ddot{y}_{1\tau} d\xi_{1\tau} \left. + \right. \\
 E I \left[\int_0^l \dot{w}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{w}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} + \int_0^l \dot{w}'_{r\tau} \left(\frac{\partial \dot{w}'_{r\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{r\tau} \right. \\
 & + \int_0^l \dot{w}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \dot{w}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} + \int_0^l \dot{w}'_{1\tau} \left(\frac{\partial \dot{w}'_{1\tau}}{\partial t} \right) d\xi_{1\tau} \left. \right]
 \end{aligned}$$

محاسبه کنیم، قوانین کنترلی عبارت خواهند بود از:

$$\begin{aligned} \tau_z &= -k_{bd}\dot{\theta} - k_{bp}e_\theta - k_{bc}(\hat{w}'_{r1}|_o + \hat{w}'_{l1}|_o) \\ e_\theta &= \theta - \theta_d \end{aligned} \quad (22-1)$$

$$\begin{aligned} \tau_x &= -k_{td}\dot{\phi} - k_{tp}e_\phi - k_{tc}(\hat{\varphi}'_{r1}|_o + \hat{\varphi}'_{l1}|_o) \\ e_\phi &= \phi - \phi_d \end{aligned} \quad (22-2)$$

و دینامیک مدار بسته‌ی وضعیت عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} J_z\ddot{\theta} &= R_{bl} + R_{br} - k_{bd}\dot{\theta} - k_{bp}e_\theta \\ &- k_{bc}(\hat{w}'_{r1}|_o + \hat{w}'_{l1}|_o) \end{aligned} \quad (23-1)$$

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\phi} &= R_{tl} + R_{tr} - k_{td}\dot{\phi} - k_{tp}e_\phi \\ &- k_{tc}(\hat{\varphi}'_{r1}|_o + \hat{\varphi}'_{l1}|_o) \end{aligned} \quad (23-2)$$

در واقع به منظور محاسبه‌ی پاسخ‌دهندها بایستی معادلات دینامیکی مشاهده‌گر با شرایط اولیه‌ی تخمینی به صورت همزمان حل شود. در این راستا روش اجزای محدود را به دلیل دقت بالای آن به کار می‌گیریم. مشابه فرایند اثبات پایداری برای روش کنترل ارائه شده، لازم است پایداری سیستم کنترلی مبنی بر مشاهده‌گر نیز اثبات شود. بنابراین مشابه قبل فرایند انتخاب تابع کاندید لیاپانوف و روند اثبات را در پیش می‌گیریم:

$$\begin{aligned} V_c &= E_t + \frac{1}{2}J_x\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\alpha_t e_\phi^2 + E_b \\ &+ \frac{1}{2}\beta_t(e_\phi + \frac{\varepsilon_t}{\beta_t}Sgn(\dot{\phi}))^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 \\ &+ \frac{1}{2}\beta_b(e_\theta + \frac{\varepsilon_b}{\beta_b}Sgn(\dot{\theta}))^2 + \frac{1}{2}\alpha_b e_\theta^2 \\ &+ \frac{1}{2}k_s[(w'_{r1}|_o - w'_{r1}|_l)^2 + (w'_{l1}|_o - w'_{l1}|_l)^2] \\ &+ \frac{1}{2}k_b[(w'_{r1}|_o)^2 + (w'_{l1}|_o)^2] \end{aligned} \quad (24-1)$$

$$\begin{aligned} E_b &= \frac{1}{\rho}A[\int_0^l \dot{y}'_{r1} d\xi_{r1} + \int_0^l \dot{y}'_{l1} d\xi_{l1} \\ &+ \int_0^l \dot{y}'_{i1} d\xi_{i1} + \int_0^l \dot{y}'_{i2} d\xi_{i2}] + \frac{1}{\rho}EI[\int_0^l w''_{r1} d\xi_{r1} \\ &+ \int_0^l w''_{r2} d\xi_{r2} + \int_0^l w''_{l1} d\xi_{l1} + \int_0^l w''_{l2} d\xi_{l2}] \end{aligned} \quad (24-2)$$

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{\rho}I_p[\int_0^l \dot{\Phi}'_{r1} d\xi_{r1} + \int_0^l \dot{\Phi}'_{l1} d\xi_{l1} \\ &+ \int_0^l \dot{\Phi}'_{i1} d\xi_{i1} + \int_0^l \dot{\Phi}'_{i2} d\xi_{i2}] + \frac{1}{\rho}GI_p[\int_0^l \varphi'_{r1} d\xi_{r1} \\ &+ \int_0^l \varphi'_{r2} d\xi_{r2} + \int_0^l \varphi'_{l1} d\xi_{l1} + \int_0^l \varphi'_{l2} d\xi_{l2}] \end{aligned} \quad (24-3)$$

ضرایب β_b/t ، α_b/t و β_t/t در ادامه تعیین خواهد شد. مشتق زمانی تابع لیاپانوف

$$\begin{aligned} GI_p \dot{\Phi}'_{r1} \varphi'_{r1}|_o - \int_0^l GI_p \dot{\Phi}'_{r1} \varphi'_{r1} d\xi_{r1} = \\ GI_p \{(\dot{\phi} + \dot{\varphi}'_{r1}|_l) \varphi'_{r1}|_l - (\dot{\phi} + \dot{\varphi}'_{r1}|_o) \varphi'_{r1}|_o \\ - \int_0^l \dot{\varphi}'_{r1} (\frac{\partial \varphi'_{r1}}{\partial t}) d\xi_{r1}\} \end{aligned} \quad (19-2)$$

پس از بسط دادن مشابه برای صفحات سمت چپ و با اعمال شرایط مرزی و مقداری ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{bo} &= -(\dot{w}'_{r1}|_o - \dot{w}'_{r1}|_l)[k_s(\hat{w}'_{r1}|_o - \hat{w}'_{r1}|_l) \\ &+ c_s(\dot{w}'_{r1}|_o - \dot{w}'_{r1}|_l)] + hE\dot{T}\dot{\theta} \hat{w}'''_{l1}|_o \\ &- (\dot{w}'_{r1}|_o + \dot{\theta})[k_b \hat{w}'_{r1}|_o + c_b \dot{w}'_{r1}|_o] \\ &- (\dot{w}'_{l1}|_o + \dot{\theta})[k_b \hat{w}'_{l1}|_o + c_b \dot{w}'_{l1}|_o] \\ &- (\dot{w}'_{l1}|_o - \dot{w}'_{l1}|_l)[k_s(\hat{w}'_{l1}|_o - \hat{w}'_{l1}|_l) \\ &+ c_s(\dot{w}'_{l1}|_o - \dot{w}'_{l1}|_l)] + hE\dot{T}\dot{\theta} \hat{w}'''_{l1}|_o \end{aligned} \quad (20-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{to} &= -c(\dot{\varphi}'_{r1}|_l + \dot{\varphi}'_{l1}|_l) \\ &- \dot{\phi}[GI_p(\dot{\varphi}'_{r1}|_o + \dot{\varphi}'_{l1}|_o) + c(\dot{\varphi}'_{r1}|_l + \dot{\varphi}'_{l1}|_l)] \end{aligned} \quad (20-2)$$

با لحاظ ۱۴ و ۱۵، از ۲۰ در ۱۷ جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \dot{\theta}[-\tilde{R}_{bl} - \tilde{R}_{br}] - c(\dot{\varphi}'_{r1}|_l + \dot{\varphi}'_{l1}|_l) \\ &+ \dot{\theta}[\tilde{R}_{bl} + \tilde{R}_{br} - k_{bop}\dot{\theta} - k_{bod}\dot{\theta}] + k_{bop}\dot{\theta}^2 \\ &- c_s[(\dot{w}'_{r1}|_o - \dot{w}'_{r1}|_l)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_o - \dot{w}'_{l1}|_l)^2] \\ &- c_b[(\dot{w}'_{r1}|_o)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_o)^2] + \dot{\phi}[-\tilde{R}_{tl} - \tilde{R}_{tr}] \\ &+ \dot{\phi}[\tilde{R}_{tl} + \tilde{R}_{tr} - k_{top}\dot{\phi} - k_{tod}\dot{\phi}] + k_{top}\dot{\phi}^2 \\ &= -k_{bod}\dot{\theta}^2 - k_{tod}\dot{\phi}^2 \\ &- c(\dot{\varphi}'_{r1}|_l + \dot{\varphi}'_{l1}|_l) - c_b[(\dot{w}'_{r1}|_o)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_o)^2] \\ &- c_s[(\dot{w}'_{r1}|_o - \dot{w}'_{r1}|_l)^2 + (\dot{w}'_{l1}|_o - \dot{w}'_{l1}|_l)^2] \end{aligned} \quad (21)$$

به طور مشخص مشتق زمانی تابع لیاپانوف منفی نیمه معین است؛ لذا تمامی جملات در این تابع مثبت معین و به عبارت دیگر خطاهای تخمین متغیرهای حالت مربوط به ارتفاعات و وضعیت ماهواره، محدود باقی می‌ماند. از این فراتر می‌توان نتیجه گرفت خطاهای تخمین متغیرها به صورت مجانبی به صفر میل می‌کند. این استنتاج در قضیه‌ی ۱ (بخش ۵) بر اساس اصل نوردایی لاسال^[۲۵] انجام گرفته است.

۴. طراحی کنترل‌کننده مرزی مبتنی بر مشاهده‌گر

با بهره‌گیری از مشاهده‌گر طراحی شده در بخش قبل، قادریم به کنترل مرزی وضعیت و ارتفاعات ماهواره بپردازیم. اگر فقط داده‌های وضعیت و سرعت زاویه‌ی هاب مورد نیاز باشد و سایر اطلاعات مرزی جهت پاسخ‌دهندها را با تخمین توسط مشاهده‌گر

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & -c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)^\tau] \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau] - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) \\ & - k_{td}\dot{\phi}^\tau - k_{bd}\dot{\theta}^\tau + \begin{cases} \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} < 0 \\ \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} > 0 \\ 0, \dot{\phi} = 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} < 0 \\ \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} > 0 \\ 0, \dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{V}_c \leq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

لذا پایداری به مفهوم لیاپانوف به اثبات رسید.

۵. اثبات پایداری مجانبی با حضور مشاهده‌گر

در قضیه‌ی ۱ مجموعه‌ی ناوردای کل سیستم مدار بسته مبتنی بر مشاهده‌گر تحلیل و محاسبه شده است. بدین جهت دو تابع لیاپانوف V_o و V_c جمع زده می‌شود تا تابع لیاپانوف ناظر بر کل سیستم به دست آید. مشتق زمانی این تابع کلی از روابط ۲۱ و ۲۹ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} V = & V_o + V_c \quad (30-1) \\ \dot{V} = & -c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)^\tau] \\ & + (\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)^\tau \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{r\tau}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_l)^\tau] \\ & - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) - k_{bd}\dot{\theta}^\tau - k_{td}\dot{\phi}^\tau \\ & - k_{bd}\dot{\theta}^\tau - k_{td}\dot{\phi}^\tau + \begin{cases} \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} < 0 \\ \dot{\phi}f_{t\tau} < 0, \dot{\phi} \geq 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} < 0 \\ \dot{\theta}f_{b\tau} < 0, \dot{\theta} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{V} \leq 0 \end{aligned} \quad (30-2)$$

بنابراین سیستم به مجموعه‌ی ناوردای خود میل می‌کند که از اتحاد $V^* = 0$ محاسبه می‌شود.

قضیه‌ی ۱: شرط لازم برای $V^* = 0$ عبارت است از $\dot{\theta} = 0$ & $\dot{\phi} = 0$ یعنی در چنین شرایطی، وضعیت و خطای تخمین آن مقادیری ثابت دارند که با $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ نام‌گذاری می‌شوند.

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_c = cte, \dot{\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI w''''_{r/l} = 0 \quad (31-1)$$

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_c = cte, \ddot{\theta} = 0 \quad (14)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI \dot{w}''''_{r/l} = 0 \quad (31-2)$$

$$\dot{\theta} = 0 - \dot{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\theta}_c = cte, \ddot{\theta} = 0 \quad (12)$$

$$\rho A \ddot{w}_{r/l} + EI \hat{w}''''_{r/l} = 0 \quad (31-3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & J_x \dot{\phi} \ddot{\phi} + \alpha_t e_\phi \dot{\phi} + \beta_t \dot{\phi} (e_\phi + \frac{\varepsilon_t}{\beta_t} Sgn(\dot{\phi})) \\ & + J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + \alpha_b e_\theta \dot{\theta} + \beta_b \dot{\theta} (e_\theta + \frac{\varepsilon_b}{\beta_b} Sgn(\dot{\theta})) \\ & + k_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l) + \dot{E}_t \\ & + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)] + \dot{E}_b \\ & + k_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)(\dot{w}'_{r\tau}|_s) + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)(\dot{w}'_{l\tau}|_s)] \end{aligned} \quad (25-1)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_b = & -(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)[k_s(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l) \\ & + c_s(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)] + hEI\dot{\theta} w''''_{l\tau}|_s \\ & - (\dot{w}'_{r\tau}|_s + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{r\tau}|_s + c_b \dot{w}'_{r\tau}|_s] \\ & - (\dot{w}'_{l\tau}|_s + \dot{\theta})[k_b \dot{w}'_{l\tau}|_s + c_b \dot{w}'_{l\tau}|_s] \\ & - (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)[k_s(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l) \\ & + c_s(\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)] + hEI\dot{\theta} w''''_{r\tau}|_s \end{aligned} \quad (25-2)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_t = & -c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) \\ & - \dot{\phi}[GI_p(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_s + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_s) + c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l)] \end{aligned} \quad (25-3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c = & -k_{bd}\dot{\theta}^\tau + \dot{\phi}[-k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_s + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_s) \\ & - k_{tp}e_\phi + \alpha_t e_\phi + \beta_t e_\phi + \varepsilon_t Sgn(\dot{\phi})] - k_{td}\dot{\phi}^\tau \\ & - c(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_l + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_l) + \dot{\theta}[-k_{bc}(\dot{w}'_{r\tau}|_s + \dot{w}'_{l\tau}|_s) \\ & - k_{bp}e_\theta + \alpha_b e_\theta + \beta_b e_\theta + \varepsilon_b Sgn(\dot{\theta})] \\ & - c_s[(\dot{w}'_{r\tau}|_s - \dot{w}'_{r\tau}|_l)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s - \dot{w}'_{l\tau}|_l)^\tau] \\ & - c_b[(\dot{w}'_{r\tau}|_s)^\tau + (\dot{w}'_{l\tau}|_s)^\tau] \end{aligned} \quad (26)$$

طبق اثبات پایداری لیاپانوف برای مشاهده‌گر در بخش قبل، متغیرهای تخمین زده شده توسط مشاهده‌گر همیشه محدود می‌مانند. بنابراین همواره ضرایب $\alpha_{b/t}, \varepsilon_{b/t}$ و $\beta_{b/t}$ را می‌توان به کمک روابط زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} \forall k_{bp} > 0 : \exists \alpha_b, \beta_b > 0 | \alpha_b + \beta_b = k_{bp} \\ \forall t : \exists \varepsilon_b < 0 | \begin{cases} |\varepsilon_b| > |R_b| \\ R_b = k_{bc}(\dot{w}'_{r\tau}|_s + \dot{w}'_{l\tau}|_s) \end{cases} \end{aligned} \quad (27-1)$$

$$\begin{aligned} \forall k_{tp} > 0 : \exists \alpha_t, \beta_t > 0 | \alpha_t + \beta_t = k_{tp} \\ \forall t : \exists \varepsilon_t < 0 | \begin{cases} |\varepsilon_t| > |R_t| \\ R_t = k_{tc}(\dot{\varphi}'_{r\tau}|_s + \dot{\varphi}'_{l\tau}|_s) \end{cases} \end{aligned} \quad (27-2)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} R_b + \varepsilon_b Sgn(\dot{\theta}) = \begin{cases} f_{b\tau} = -\varepsilon_b + R_b > 0, \dot{\theta} < 0 \\ f_{b\tau} = +\varepsilon_b + R_b < 0, \dot{\theta} > 0 \end{cases} \\ R_t + \varepsilon_t Sgn(\dot{\phi}) = \begin{cases} f_{t\tau} = -\varepsilon_t + R_t > 0, \dot{\phi} < 0 \\ f_{t\tau} = +\varepsilon_t + R_t < 0, \dot{\phi} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{br\setminus j}|_o + k_b \chi'_{br\setminus j}|_o] \tilde{\eta}_{br\setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{bl\setminus i} \exp(\lambda_{bi} t) + \hat{a}_{bl\setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{bi} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{br\setminus j} \exp(\lambda_{bj} t) + \hat{a}_{br\setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{bj} t)] \quad (37-1) \\
\tilde{\tau}_{x^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} G I_p \chi'_{tl\setminus i}|_o \tilde{\eta}_{tl\setminus i}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G I_p \chi'_{tr\setminus j}|_o \tilde{\eta}_{tr\setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{tl\setminus i} \exp(\lambda_{ti} t) + \hat{a}_{tl\setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{ti} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{tr\setminus j} \exp(\lambda_{tj} t) + \hat{a}_{tr\setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{tj} t)] \quad (37-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{bl\setminus i}|_o + k_b \chi'_{bl\setminus i}|_o] \eta_{bl\setminus i}(t) \\
& - k_{bc} \chi'_{bl\setminus i}|_o \hat{\eta}_{bl\setminus i}(t) - k_{bc} \chi'_{bl\setminus j}|_o \hat{\eta}_{bl\setminus j}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{br\setminus j}|_o + k_b \chi'_{br\setminus j}|_o] \eta_{br\setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [b_{bl\setminus i} \exp(\lambda_{bi} t) + \hat{b}_{bl\setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{bi} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [b_{br\setminus j} \exp(\lambda_{bj} t) + \hat{b}_{br\setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{bj} t)] \quad (38-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{x^*} & = \sum_{i=1}^{\infty} G I_p \chi'_{tl\setminus i}|_o \eta_{tl\setminus i}(t) - k_{tc} \chi'_{tl\setminus i}|_o \hat{\eta}_{tl\setminus i}(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} G I_p \chi'_{tr\setminus j}|_o \eta_{tr\setminus j}(t) - k_{tc} \chi'_{tr\setminus j}|_o \hat{\eta}_{tr\setminus j}(t) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} [b_{tl\setminus i} \exp(\lambda_{ti} t) + \hat{b}_{tl\setminus i} \exp(\hat{\lambda}_{ti} t)] \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} [b_{tr\setminus j} \exp(\lambda_{tj} t) + \hat{b}_{tr\setminus j} \exp(\hat{\lambda}_{tj} t)] \quad (38-2)
\end{aligned}$$

عبارت $b_{t/btr\setminus j}, \hat{b}_{t/bl\setminus i}, b_{t/bl\setminus i}, \hat{a}_{t/btr\setminus j}, a_{t/btr\setminus j}, \hat{a}_{t/bl\setminus i}, a_{t/bl\setminus i}$ عبارات $b_{t/btr\setminus j}$ و $\hat{b}_{t/btr\setminus j}$ ضرایب مختصر ترکیب شده هستند. حاصل جمع توابع نمای متفاوت، برابر با یک مقدار ثابت شده است. این گزاره فقط و فقط زمانی برای همیشه برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{z^*} = \tau_{z^*} = 0 \\ \tilde{\tau}_{x^*} = \tau_{x^*} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\theta} = e_{\theta} = 0 \\ \tilde{\phi} = e_{\phi} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

رابطه‌ی ۳۹ حاکی از آن است که خطای تخمین وضعیت و خطای وضعیت نسبت به مطلوب با مقادیر صفر، عضو مجموعه‌ی ناورداست، حتی اگر از وجود میرایی صرف نظر شود. به علاوه چنان که در لم ۱ اثبات شده، خطای تخمین پارامترهای ارتعاشی و مقادیر واقعی آنها نیز با مقادیر صفر عضو مجموعه‌ی ناوردا هستند.

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \phi_0 = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (11)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l\setminus} - G I_p \varphi''_{r/l\setminus} = 0 \quad (32-1)$$

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (15)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l\setminus} - G I_p \varphi''_{r/l\setminus} = 0 \quad (32-2)$$

$$\hat{\phi} = \phi - \tilde{\phi} \Rightarrow \hat{\phi} = \hat{\phi}_0 = cte, \quad \ddot{\phi} = 0 \quad (13)$$

$$\rho A \ddot{\varphi}_{r/l\setminus} - G I_p \varphi''_{r/l\setminus} = 0 \quad (32-3)$$

صرف نظر از میرایی، به منظور تعیین مقادیر $\theta_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{\phi}_0$ و θ_0, ϕ_0 و سیستم مدار بسته‌ی ۲۳ را بازنویسی می‌کنیم. چهار مقدار ثابت از این روابط به دست می‌آید که با پارامترهای τ_{x^*}, τ_{z^*} و $\tilde{\tau}_{x^*}, \tilde{\tau}_{z^*}$ نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{z^*} \square k_{bop} (\theta_0 - \hat{\theta}_0) & = \\
& - E I h (\tilde{w}'_{l\setminus}|_o + \tilde{w}'_{r\setminus}|_o) + k_b (\tilde{w}'_{l\setminus}|_o + \tilde{w}'_{r\setminus}|_o) \quad (33-1)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\tau}_{x^*} \square k_{top} (\phi_0 - \hat{\phi}_0) = G I_p (\tilde{\varphi}'_{l\setminus}|_o + \tilde{\varphi}'_{r\setminus}|_o) \quad (33-2)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{z^*} \square k_{bp} (\theta_0 - \theta_d) & = -E I h (w'''_{l\setminus}|_o + w'''_{r\setminus}|_o) \\
& + k_b (w'_{l\setminus}|_o + w'_{r\setminus}|_o) - k_{bc} (\hat{w}'_{l\setminus}|_o + \hat{w}'_{r\setminus}|_o) \quad (34-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{x^*} \square k_{tp} (\phi_0 - \phi_d) & = G I_p (\varphi'_{l\setminus}|_o + \varphi'_{r\setminus}|_o) \\
& - k_{tc} (\hat{\varphi}'_{r\setminus}|_o + \hat{\varphi}'_{l\setminus}|_o) \quad (34-2)
\end{aligned}$$

به منظور حل معادلات فوق با کمک جداسازی متغیرها داریم:

$$\begin{aligned}
w & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{bi}(x) \eta_{bi}(t) \\
\eta_{bi}(t) & = a_{b^*,i} \exp(\lambda_{bi} t), \quad \lambda_{bi} = \sigma_{bi} + j\omega_{bi} \quad (35-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{w} & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{bi}(x) \hat{\eta}_{bi}(t) \\
\hat{\eta}_{bi}(t) & = \hat{a}_{b^*,i} \exp(\hat{\lambda}_{bi} t), \quad \hat{\lambda}_{bi} = \hat{\sigma}_{bi} + j\hat{\omega}_{bi} \quad (35-2)
\end{aligned}$$

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{bi}(x) \tilde{\eta}_{bi}(t), \quad \tilde{\eta}_{bi}(t) = \eta_{bi}(t) - \hat{\eta}_{bi}(t) \quad (35-3)$$

$$\begin{aligned}
\varphi & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{ti}(x) \eta_{ti}(t) \\
\eta_{ti}(t) & = a_{t^*,i} \exp(\lambda_{ti} t), \quad \lambda_{ti} = \sigma_{ti} + j\omega_{ti} \quad (36-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi} & = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{ti}(x) \hat{\eta}_{ti}(t) \\
\hat{\eta}_{ti}(t) & = \hat{a}_{t^*,i} \exp(\hat{\lambda}_{ti} t), \quad \hat{\lambda}_{ti} = \hat{\sigma}_{ti} + j\hat{\omega}_{ti} \quad (36-2)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{ti}(x) \tilde{\eta}_{ti}(t), \quad \tilde{\eta}_{ti}(t) = \eta_{ti}(t) - \hat{\eta}_{ti}(t) \quad (3-36)$$

با استفاده از روابط ۳۵ و ۳۶ می‌توان روابط ۳۳ و ۳۴ را بسط داد تا بدون در نظر گرفتن میرایی، روابط زیر حاصل شود.

$$\tilde{\tau}_{z^*} = \sum_{i=1}^{\infty} [-E I h \chi'''_{bl\setminus i}|_o + k_b \chi'_{bl\setminus i}|_o] \tilde{\eta}_{bl\setminus i}(t)$$

لم: ۱ طبق معادله ۲۱ داریم:

جنبشی و پتانسیل عبارتند از:

$$[m_b] = \frac{\rho A l_e}{42} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[k_b] = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$[m_t] = \frac{\rho I_p l_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, [k_t] = \frac{GI_p}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

پارامترهای شبیه‌سازی طبق جدول ۱ در نظر گرفته شده‌اند. قانون کنترلی مبنی بر مشاهده‌گر که در این فصل معرفی شد اعمال شده است. در شبیه‌سازی اول همه متغیرهای حالت به جز موارد ذیل از شرایط اولیه صفر و با زاویه مطلوب ۲۵ درجه برای رول و پیچ هاب لحاظ و یک شرایط اولیه فرضی برای مشاهده‌گر در نظر گرفته شده است.

می‌دانیم مشاهده‌گر بایستی از کنترل‌کننده سریع‌تر باشد لذا بهره‌های مربوطه ده برابر بزرگ‌تر انتخاب شده است. شرایط اولیه و ضرایب مشاهده‌گر و کنترل‌کننده عبارت‌اند از:

$$k_{bp} = 1/5, k_{bd} = 2, k_{bc} = 2, k_{tp} = 3, k_{td} = 1, k_{tc} = 5$$

$$k_{bop} = 15, k_{bod} = 20, k_{top} = 3, k_{tod} = 10$$

$$t = 0 :$$

$$\begin{cases} w'_{r2}|_0 = w'_{l2}|_0 = -1, w'_{r1}|_0 = w'_{l1}|_0 = 15, \theta = 0 \text{ deg} \\ \hat{w}'_{r2}|_0 = \hat{w}'_{l2}|_0 = 5, \hat{w}'_{r1}|_0 = \hat{w}'_{l1}|_0 = -5, \hat{\theta} = -10 \text{ deg} \\ \varphi_{r2}|_0 = \varphi_{l2}|_0 = 5, \varphi_{r1}|_0 = \varphi_{l1}|_0 = 10, \phi = -5 \text{ deg} \\ \hat{\varphi}_{r2}|_0 = \hat{\varphi}_{l2}|_0 = -5, \hat{\varphi}_{r1}|_0 = \hat{\varphi}_{l1}|_0 = 5, \hat{\phi} = 5 \text{ deg} \end{cases}$$

مقدار ناچیزی برای ضرایب میرایی (۰،۲) فرض شده است که نسبت میرایی معادل آن $\zeta = 0/006$ است تا کیفیت پایداری کنترل‌کننده مستقل‌تر بررسی شود. با توجه به حجم بالای محاسبات، این میزان ناچیز میرایی از تأثیر مخرب خطاهای محاسباتی جلوگیری می‌کند.

نکته ۱: یک موضوع قابل بررسی تعیین تعداد مناسب المان‌ها برای مدل‌سازی هر تیر است. شبیه‌سازی با تغییر تعداد المان‌ها از یک تا بیش از ۵ عدد نشان داد با ۵ المان همگرایی مناسبی حاصل می‌شود و تعداد بیشتر از آن تنها فرکانس‌های بالاتر از ۱۰۰ هرتز را اضافه و یا مقادیرشان را تغییر می‌دهد. در واقع دو فرکانس طبیعی اول تقریباً بدون تغییر هستند و تا فرکانس پنجم تغییر جزئی می‌یابد. می‌دانیم رفتار غالب توسط فرکانس‌های پایین‌تر شکل می‌گیرد و عملاً تعداد بیش از ۵ المان

جدول ۱. پارامترهای شبیه‌سازی.

پارامتر	I_p	I	G	E	A	ρ	h	c	c_b, c_s	k_b, k_s	j_w, j_z	l	تعداد المان‌ها
مقدار	$2e-5$	$6e-7$	$2e-10$	$5e-10$	$0/01$	$2e3$	$0/3$	$0/2$	$0/2$	200	4	$0/8$	در هر تیر

$$\dot{V}_0 = 0 \Rightarrow \dot{w}'_{r2}|_0 - \dot{w}'_{r1}|_l = \dot{w}'_{l2}|_0 - \dot{w}'_{l1}|_l = 0$$

$$\dot{w}'_{r1}|_0 = \dot{w}'_{l1}|_0 = \dot{\varphi}_{r2}|_l = \dot{\varphi}_{l2}|_l = 0$$

$$\Rightarrow \hat{w}'_{r2}|_0 - \hat{w}'_{r1}|_l, \hat{w}'_{l2}|_0 - \hat{w}'_{l1}|_l, \hat{w}'_{r1}|_0, \hat{w}'_{l1}|_0, \hat{\varphi}_{r2}|_l, \hat{\varphi}_{l2}|_l = cte \quad (40)$$

اما می‌دانیم $\hat{w}_{r/l1}$ پارامتری است که در معادله ارتعاش تیر ۲-۳۱، با شرایط مرزی لولا و فنر در دو سر تیر صدق می‌کند. بنابراین اگر شیب آن در مکان صفر ثابت بماند، بدین معناست که تیر ارتعاش ندارد. یعنی $\hat{w}_{r/l1}(x, t) = 0$. در خصوص $\hat{w}_{r/l2}(x, t) = 0$ می‌توان از رابطه ۴۱ نتیجه مشابه گرفت. همچنین ثابت ماندن $\hat{\varphi}_{r/l2}$ که در معادله ۲-۳۲ پیش‌تیر با شرایط مرزی یک سر آزاد یک سر درگیر صدق می‌کند، به معنای عدم ارتعاش پیش‌تیر است $\hat{\varphi}_{r/l2}(x, t) = 0$. با توجه به شرایط مرزی یعنی قفل بودن تیرها به لحاظ پیش‌تیر در محل تماس با یکدیگر داریم $\hat{\varphi}_{r/l2}(x, t) = 0$.

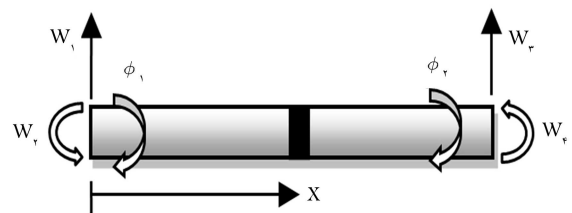
$$\hat{w}'_{r2}|_0 - \hat{w}'_{r1}|_l = cte, \hat{w}'_{l1}|_0 = 0 \Rightarrow \hat{w}'_{r2}|_0 = 0 \quad (41)$$

مشابه بحث فوق روی دینامیک خطا، در خصوص متغیرهای ارتعاشی در معادلات دینامیک ماهواره نیز با در نظر گرفتن روابط ۲۹، ۳۱، ۳۲ و شرایط مرزی، استنتاج می‌شود.

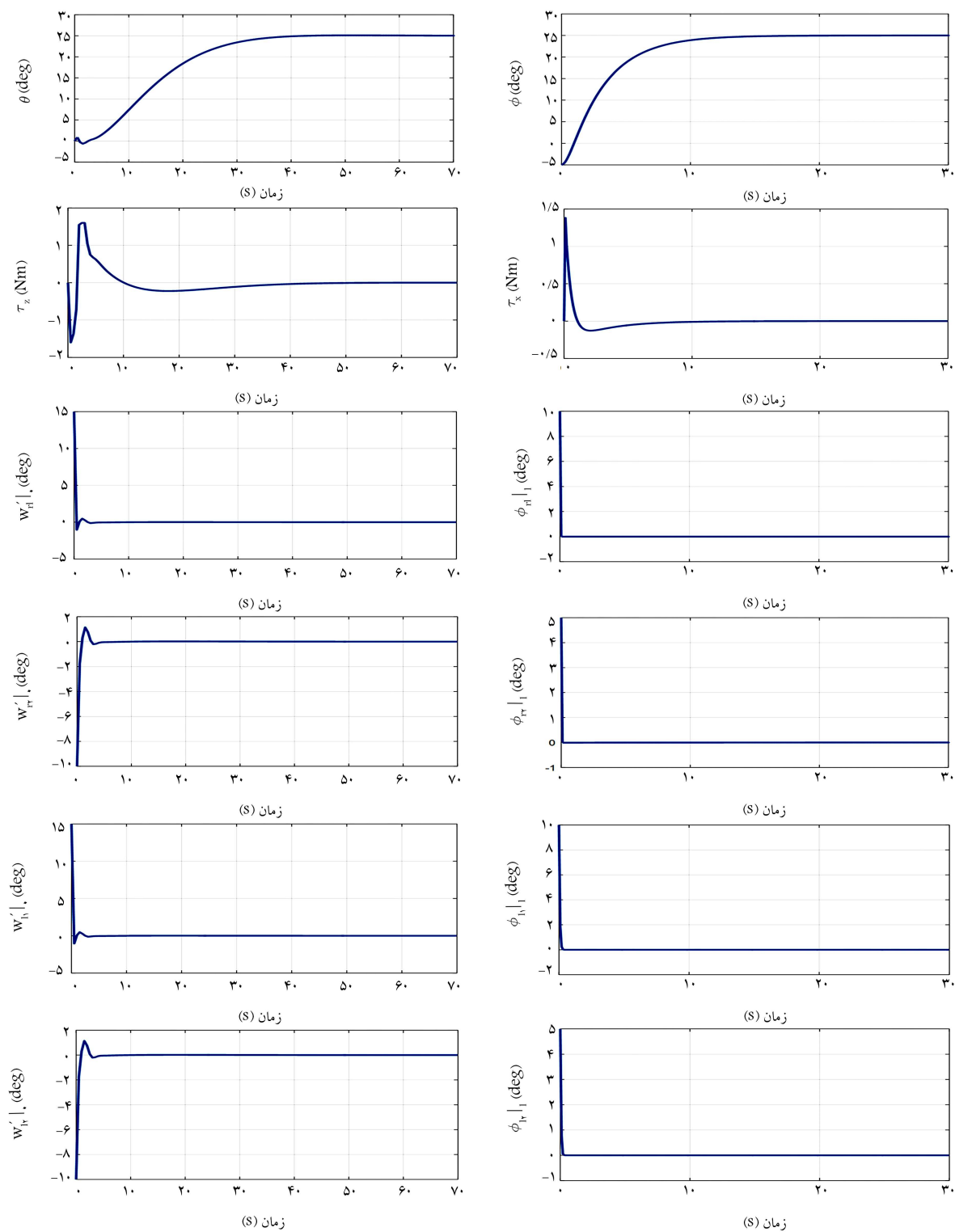
۶. شبیه‌سازی و بحث روی نتایج

روش المان محدود جهت مدل‌سازی ماهواره مطابق شکل ۱ اتخاذ شده است. بخش‌های صفحات خورشیدی به وسیله المان‌های تیر اولر - برنولی مدل شده است. به علاوه دو مختصات تعمیم‌یافته پیش‌تیر به هر المان افزوده شده است. به منظور محاسبه ماتریس‌های سختی و اینرسی در تغییر شکل خمشی توابع شکل مود چندجمله‌یی مرتبه ۳ و در تغییر شکل پیش‌تیر تابع شکل مود خطی استفاده شده است.^[۲۶] شکل ۲ المان مورد نظر را به همراه مختصات تعمیم‌یافته اش ($\phi_1, \phi_2, w_1, w_2, w_3, w_4$) نشان می‌دهد.

ماتریس‌های معادل اینرسی و سختی مربوطه برای هر المان از روابط انرژی



شکل ۲. یک المان تیر اولر - برنولی به اضافه پیش‌تیر.



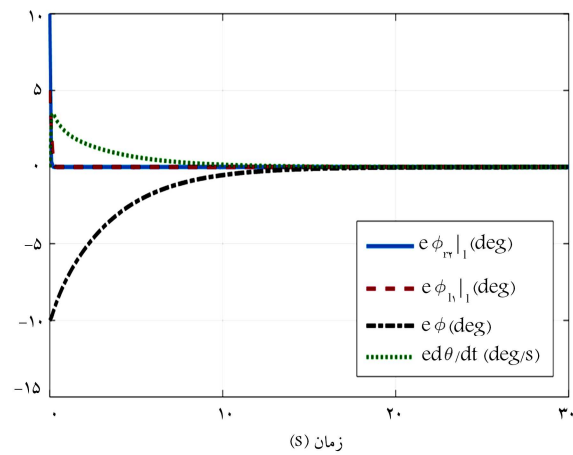
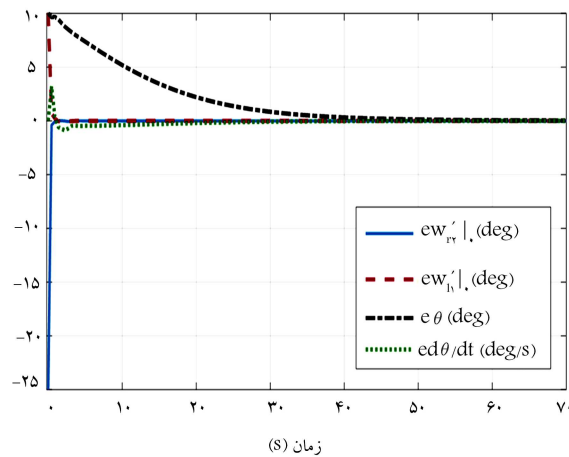
شکل ۳. نتایج شبیه‌سازی روی سیستم مدار بسته مبنی بر مشاهده‌گر.

قسمت‌های صفحات خورشیدی در لبه‌های نزدیک به هاب در دو سمت آن و پیچش - پیچ شامل زاویه‌ی پیچ هاب و تغییر شکل پیچشی قسمت‌های صفحات خورشیدی در لبه‌های دور از هاب در دو سمت آن رسم شده‌اند. نتایج حاکی از عملکرد خوب روش کنترل ارائه شده است. فراجبهش ناچیز همزمان با زمان نشست مناسب و عدم وجود خطای ماندگار مشخصات خوب برای رفتارگذرای پاسخ هستند. همچنین طبق

علی‌رغم افزایش بسیار زیاد هزینه و زمان محاسبات، افزایش دقت محسوس‌ی به دست نمی‌دهد.

به علاوه خطاهای همگرایی مشاهده‌گر برای تعدادی از متغیرهای حالت وضعیت و ارتفاعات طی این شبیه‌سازی در شکل ۴ نشان داده شده است.

در شکل ۳ نمودارهای پاسخ خمش - رول شامل زاویه رول هاب و شیب‌های



شکل ۴. خطاهای تخمین مشاهده‌گر.

به همراه کنترل‌کننده مرزی به منظور کنترل همزمان دینامیک وضعیت و ارتعاشات صفحات خورشیدی برای یک فرم کلی از ماهواره‌های منعطف، تنها با استفاده از عملگرهای گشتاور داخل هاب، طراحی شد. همچنین تغییر شکل پیچشی علاوه بر خمش در نظر گرفته شد.

این واقعیت که صفحات خورشیدی بازشونده عموماً از قسمت‌هایی تشکیل یافته‌اند در معادلات دینامیک منظور شد. حاصل آن است که کنترل مرزی بدون نیاز به اندازه‌گیری فراتر از وضعیت و سرعت زاویه‌ی ماهواره محقق شده است. پایداری مجانبی برای مشاهده‌گر و همچنین کل سیستم مدار بسته مبنی بر مشاهده‌گر به اثبات رسید و عملکرد آن طی شبیه‌سازی‌ها به روش اجزای محدود نشان داده شد.

شکل ۴ تخمین پارامترها توسط مشاهده‌گر معادلات جزئی نیز با کیفیت مطلوبی صورت پذیرفته است.

۷. نتیجه‌گیری

اخیراً کاربردهای کنترل معادلات جزئی توجه بیشتری معطوف خود ساخته است اما روش‌های ارائه شده در مقالات به حسگرهای اضافی روی سطح جسم گسترده و با روی مرزهای آن نیاز دارد که بسیاری از آنها عملیاتی نیست. مشاهده‌گر می‌تواند در این زمینه کمک کند. لذا در این پژوهش برای نخستین بار یک مشاهده‌گر معادلات جزئی

پانویس‌ها

1. ODE-PDE
2. linear quadratic regulator (LQR)
3. spill-over instability
4. early lumping
5. late lumping
6. finite difference
7. eigen function expansion
8. orthogonal decomposition
9. cascade systems
10. warping
11. Euler-Bernoulli
12. uncoupled

منابع (References)

1. Chen, X., Ren, Y., Cai, Y. and et al. "Integrated control of attitude maneuver and vibration suppression of flexible spacecraft based on magnetically suspended control moment gyros", *Proc IMechE C: J Mechanical Engi-*

neering Science, DOI: 10.1177/0954406220942801, Epub ahead of print 22 July (2020).

2. Gasbarri, P., Monti, R. and et al. "Effects of uncertainties and flexible dynamic contributions on the control of a spacecraft full-coupled model", *Acta Astronaut*, **94**, pp. 515-526 (2014).
3. Hu, Y., Wu, B., Geng, Y. and et al. "Smooth time-optimal attitude control of spacecraft", *Proc IMechE G: J Aerospace Eng*, **233**, pp.2331-2343 (2019).
4. Cao, X., Yue, C. and Liu, M. "Flexible satellite attitude maneuver via constrained torque distribution and active vibration suppression", *Aerosp Sci Technol*, **67**, pp. 387-397 (2017).
5. Fakoor, M., Nikpay, S. and Kalhor, A. "On the ability of sliding mode and LQR controllers optimized with PSO in attitude control of a flexible 4-DOF satellite with time-varying payload", *Adv Space Res*, **67**, pp. 334-349 (2021).
6. Gasbarri, P., Sabatini, M. and Pisculli A. "Dynamic modeling and stability parametric analysis of a flexible spacecraft with fuel slosh", *Acta Astronaut*, **127**, pp. 141-159 (2016).

7. Ji, N. and Liu, J. "Vibration control for a flexible satellite with adaptive actuator fault-tolerant and input quantization", *Trans. Inst. Measurement Control*, **42**, pp. 451-460 (2020).
8. Tao, J., Zhang, T. and Nie, Y. "Attitude maneuvering and vibration reducing control of flexible spacecraft subject to actuator saturation and misalignment", *Shock Vib*, 3129834, DOI: 10.1155/2018/3129834 (2018).
9. TayyebTaher, M. and Esmaelzadeh, M. "Model predictive control of attitude maneuver of a geostationary flexible satellite based on genetic algorithm", *Adv Space Res*, **60**, pp. 57-64 (2017).
10. Wang, E., Wu, S., Liu, Y. and et al. "Distributed vibration control of a large solar power satellite", *Astrodyn*, **3**, pp. 189-203 (2019).
11. Zhang, L., Xu, S. et al. "Active vibration suppression for flexible satellites using a novel component synthesis method", *Adv Space Res*, **67**, pp. 1968-1980 (2021).
12. Karagiannis, D. and Radisavljevic-Gajic, V. "Exponential stability for a class of boundary conditions on an euler-bernoulli beam subject to disturbances via boundary control", *Journal of Sound and Vibration*, **446**, pp. 387-411 (2019).
13. Cao, F. and Liu, J. "Boundary vibration control for a two-link rigid-flexible manipulator with quantized input", *Journal of Vibration and Control*, **25**(23-24), pp. 2935-2945 (2019).
14. Entessari, F., Najafi, A. and Alasty, A. "Exponential stabilization of flexural sway vibration of gantry crane via boundary control method", *Journal of Vibration and Control*, **26**(1-2), pp. 36-55 (2020).
15. He, W. and Ge, SS. "Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **51**(2), pp. 1422-1431 (2015).
16. Ji, N. and Liu, J. "Vibration control for a flexible satellite with input constraint based on Nussbaum function via backstepping method", *Aerospace Science and Technology*, **77**, pp. 563-572 (2018).
17. Meng, T., He, W., Yang, H. and et al. "Vibration control for a flexible satellite system with output constraints", *Nonlinear Dynamics*, **85**, pp. 2673-2686 (2016).
18. Rad, HK., Salarieh, H., Alasty, A. and et al. "Boundary control of flexible satellite vibration in planar motion", *Journal of Sound and Vibration*, **432**, pp. 549-568 (2018).
19. Rad, HK., Salarieh, H., Alasty, A. and et al. "Boundary control of anti-symmetric vibration of satellite with flexible appendages in planar motion with exponential stability", *Acta Astronautica*, **147**, pp. 219-230 (2018).
20. Hidayat, Z. and et al. "Observers for linear distributed-parameter systems: A survey", *2011 IEEE International Symposium on Robotic and Sensors Environments (ROSE)*, Montreal, Canada, 17-18 September, NJ: IEEE, pp. 166-171 (2011).
21. Cao, X., Yue, C. and Liu, M. "Flexible satellite attitude maneuver via constrained torque distribution and active vibration suppression", *Aerospace Science and Technology*, **67**, pp. 387-397 (2017).
22. Duraffourg, E., Burlion, L. and Ahmed-Ali, T. "Finite-time observer-based back stepping control of a flexible launch vehicle", *Journal of Vibration and Control*, **24**(8), pp. 1535-1550 (2016).
23. Smyshlyaev, A. and Krstic, M. "Backstepping observers for a class of parabolic PDEs", *Systems & Control Letters*, **54**(7), pp. 613-625 (2005).
24. Jiang, T., Liu, J. and He, W. "A robust observer design for a flexible manipulator based on a PDE model", *Journal of Vibration and Control*, **23**(6), pp. 871-882 (2017).
25. Dogan, M. and Morgul, O. "Boundary control of a rotating shear beam with observer feedback", *Journal of Vibration and Control*, **18**(14), pp. 2257-2265 (2012).
26. Liang, X., Wang, Q., Hu, C. and et al. "Observer-based H8 fault-tolerant attitude control for satellite with actuator and sensor faults", *Aerospace Science and Technology*, DOI: 10.1016/j.ast.2019.105424, Epub ahead of print September (2019).
27. Zhu, Q., Ma, G., Wang, X. and et al. "Attitude control without angular velocity measurement for flexible satellites", *Chinese Journal of Aeronautics*, **31**(6), pp. 1345-1351 (2018).
28. Fan, L., Huang, H., Sun, L. and et al. "Robust attitude control for a rigid-flexible-rigid microsatellite with multiple uncertainties and input saturations", *Aerospace Science and Technology*, DOI: 10.1016/j.ast.2019.105443, Epub ahead of print 27 September (2019).
29. Zhang, L. and Liu, J. "Nonlinear PDE observer design for a flexible two-link manipulator", *2012 American Control Conference (ACC)*, Montreal, Canada, NJ: IEEE, pp. 5336-5341 (2012).
30. Yang, H., Liu, J. and Lan, X. "Observer design for a flexible-link manipulator with PDE model", *Journal of Sound and Vibration*, **341**, pp. 237-245 (2015).
31. Jin, F. and Guo, B. "Boundary output tracking for an euler-bernoulli beam equation with unmatched perturbations from a known exosystem", *Automatica*. Epub ahead of print 30 July 2019. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.108507 (2019).
32. Hasan, A. "Boundary observer design for hyperbolic PDE-ODE cascade systems", *Automatica*, **68**, pp. 75-86 (2016).
33. Liu, Y., Fu, Y., He, W. and et al. "Modeling and observer-based vibration control of a flexible spacecraft with external disturbances", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **66**(11), pp. 8648-8658 (2018).
34. Rao, SS. *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, Hoboken, new Jersey, United States of America (2007).
35. Khalil, HK. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall (2002).
36. Kashani, MT., Jayasinghe, S. and Hashemi, SM. "On the flexural-torsional vibration and stability of beams subjected to axial load and end moment", *Shock Vib*, 153532. DOI: 10.1155/2014/153532 (2014).