

تحلیل المان محدود غیرخطی رشد پوست با استفاده از مدل غشای هایپیرالاستیک

ناصر فیروزی (دانشجوی دکتری)

فرزام دادگراد* (دانشیار)

سید رضا فلاحتگر (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۱)
دوری ۳-۲۸، شماره ۱، ص. ۳۳-۳۴، (پژوهشی)

هدف این مقاله فرمول‌بندی و شبیه‌سازی عددی پدیده‌ی رشد در پوست تحت بارگذاری مکانیکی است. ویژگی اصلی و نوآوری تحقیق حاضر آن است که پوست را به عنوان یک غشای دارای انحنای اولیه در نظر می‌گیرد که از معادلات ساختاری مواد هایپیرالاستیک تبعیت می‌کند. در ابتدا سینماتیک غشاها تحت تغییر شکل‌های بزرگ فرمول‌بندی شده و تانسورهای اساسی مربوطه معرفی می‌شوند. سپس فرمول‌بندی مکانیک رشد و حالت خاص آن برای غشاها ارائه می‌شود. در ادامه، جهت حل عددی معادلات حاکم، یک فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی لاگرانژی کامل توسعه داده می‌شود. در نهایت دو مثال عددی برای رشد و تغییر شکل بزرگ پوست به صورت صفحه‌ی تخت و با سه هندسه‌ی مربعی، دایره‌ای و مستطیلی و همچنین در حالت غیر تخت با انحنای اولیه به صورت یک قطاع استوانه‌ای تحت اعمال فشار خارجی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرند. با وجود آن که مدل ارائه شده در این مقاله بسیار ساده‌تر از مطالعات پیشین است، اما نتایج حاصل از آن با نتایج موجود در مطالعات پیشین مطابقت می‌کند. همچنین، حجم محاسبات عددی و مقدار فضای حافظه‌ی مورد نیاز به میزان قابل توجهی توسط فرمول‌بندی حاضر کاهش می‌یابد، به طوری که تعداد المان‌های غشای به کار رفته در مدل‌سازی کنونی کم‌تر از ۱/۵ درصد تعداد المان‌های سه‌بعدی است که در تحقیقات پیشین مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین، نسبت جرمی حاصل از رشد پوست نیز برای سطح مقطع‌های متفاوت محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که جرم پوست حاصل از رشد در مثال‌های در نظر گرفته شده، بیش از سه برابر جرم پوست پیش از رشد است.

واژگان کلیدی: مکانیک رشد، پوست، غشا، هایپیرالاستیسیت، المان محدود غیرخطی.

۱. مقدمه

غشاهای پلیمری دارد در این است که پوست یک موجود زنده است و رشد می‌کند.

در برخی موارد، بر سطح پوست ضایعه‌های بزرگی ایجاد می‌شود؛ به گونه‌ای که امکان ترمیم آن توسط پوست مجاور زخم فراهم نیست. برای این که باله‌ی پوستی^۱ کافی برای پوشاندن زخم فراهم شود نیاز است که پوست مجاور ضایعه پیش از ترمیم رشد یابد که این کار معمولاً توسط انبساط‌دهنده‌ها^۲ صورت می‌گیرد. انبساط‌دهنده در نزدیکی ضایعه کاشته می‌شود تا امکان رشد پوست را مهیا کند و همچنین پوست رشد یافته از نظر ضخامت، چگالی، رنگ، سختی و خواص دیگر مشابه پوست اطراف باشد.^۳ جنس انبساط‌دهنده‌ها الاستومر سیلیکونی بوده و به طور هفتگی با تزریق محلول نمکی^۴ باد می‌شوند و این عمل به مدت ۶ تا ۸ هفته ادامه می‌یابد. این الاستومرها در اندازه‌ها و شکل‌های گوناگون در دسترس اند که از آن جمله می‌توان

پوست یک غشای نازک است که تمام سطح بدن را می‌پوشاند و علاوه بر این که باید به اندازه‌ی کافی محکم باشد تا آسیب نبیند، باید به قدر کافی انعطاف‌پذیر باشد تا مانع از حرکت آزادانه‌ی بدن نشود. پوست پوششی است که از بدن در برابر میکروب‌های مضر و خطرات محیط اطراف و ضربه‌های مکانیکی جلوگیری می‌کند. همچنین بزرگ‌ترین اندام در بدن انسان است که ناحیه‌ی سطحی ۱/۸ تا ۲ متر مربع و ۱۶ درصد از وزن بدن را در بر می‌گیرد. از نظر متابولیکی نیز اندامی فعال با تنوعی از عملکردهای لازم در حفاظت از بدن است.^[۱] تفاوت منحصر به فردی که پوست با سایر غشاها مانند

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۳/۲۲، اصلاحیه ۱۴۰۰/۹/۱۳، پذیرش ۱۴۰۱/۱/۲۱.

DOI: 10.24200/j40.2022.58307.1599

firozi@phd.guilan.ac.ir
dadgar@guilan.ac.ir
falahatgar@guilan.ac.ir

به هندسه‌های مستطیلی، دایره‌ای، مربعی و هلالی^۴ اشاره کرد.^[۲] چرخه‌ی باد کردن انبساط‌دهنده، رشد و آرمیدگی^۵ بارها تکرار می‌شود تا پوست در حد مطلوبی رشد یابد. از این فرایند در جراحی ترمیمی^۶ استفاده می‌شود. نیومن^[۵] برای اولین بار بسط پوست را برای ترمیم نقص موجود در گوش انجام داد و از یک بالون لاستیکی برای این کار استفاده کرد. انبساط یافت در ابتدا بیشتر برای ترمیم سر و چانه به کار می‌رفت، اما امروزه تقریباً برای ترمیم تمامی قسمت‌های بدن مورد استفاده قرار می‌گیرد.^[۶]

در تحقیقی که در سال ۱۹۸۹ توسط بیوچنه و همکاران^[۲] انجام شد، آزمایشی روی ۲۴ حیوان صورت گرفت. آنها به مدت ۳۲ روز پوست این جانوران را بسط دادند. نتایج به دست آمده نشان داد که کشش پوست در زمان باد شدن به شدت افزایش می‌یابد اما در پایان ۳۲ روز به مقادیر عادی کاهش یافته و ضخامت پوست که در ابتدا کاهش یافته بود، به حد عادی خود در انتهای آزمایش برمی‌گردد. در آزمایشی که توسط محققین^[۷] انجام شد، آزمون برش خالص^۷ برای نمونه‌های بافت پوست خوک در ضخامت‌های مشخص بوده است. ژائو و همکاران^[۸] به بررسی چروک روی پوست با توجه به افزایش سن پرداختند. این محققین با استفاده از مدل‌سازی سه‌بعدی المان محدود از پوست جوان و پیر به عنوان ماده‌ی کامپوزیتی از دو تا شش لایه‌ی مجزا، تأثیر سن روی پوست را تحلیل کردند. تونگه و همکاران^[۹] آزمایش اعمال فشار روی پوست انسان را انجام دادند و از این آزمون برای اندازه‌گیری خواص ناهمسانگرد غیرخطی پوست انسان استفاده کردند. در مطالعه‌ی که توسط اسمالزو و همکاران^[۱۰] انجام شد، اثر ضخامت، ترکیب بافت و سن در خواص زیست‌مکانیکی پوست در سه بخش بدن تعیین شده است. این متغیرها، در قسمت کتف، ران و ساق ۳۰ فرد مختلف تعیین شده است. نتایج به دست آمده نشان داد که ضخامت پوست در سختی، جذب انرژی و الاستیسیته‌ی زیست‌شناختی در کتف اثرگذار است. در مقاله‌ی پاپلر - متی و همکاران^[۱۱] خواص مکانیکی ویسکوالاستیک پوست مصنوعی با استفاده از آزمایش نفوذ بار - آرمیدگی تعیین شد. همچنین، عفونت محل جراحی یکی از نکات مهمی است که توسط سجادی و همکاران^[۱۲] مورد بررسی قرار گرفت و در آن از پوست یا زخم‌های پوستی به عنوان عاملی مهم در این نوع عفونت ذکر شد. در ادامه، سجادی و همکاران^[۱۳] هوای اطراف زخم‌های پوستی و ارتباط آن با عفونت‌های محل جراحی را شبیه‌سازی کردند. کوماراسوامی و همکاران^[۱۴] مدل ساختاری مناسب برای پوست و تعیین خواص جامع پوست را که مستقل از تغییرپذیری نوع بیمار باشد تعیین و کالیبره کردند. در تحقیقی که توسط باربارینو و همکاران^[۱۵] انجام شد، تلاش بر این بوده که تعیین مشخصات مکانیکی در محیط زنده از بافت‌های سطحی چهره بهبود یابد. افسرکازرونی و همکاران^[۱۶] رفتار ویسکوالاستیک پوست در بارگذاری تناوبی را مطالعه کردند. آنها مدل ویسکوالاستیک ارائه شده را با نتایج آزمایشگاهی انجام شده بر پوست موش و خوک مقایسه کردند. نتایج بیانگر آن است که مدل ارائه شده می‌تواند به خوبی بارگذاری، باربرداری و نیز بارگذاری مجدد روی پوست ویسکوالاستیک را مدل‌سازی کند. در تحقیقی که توسط جوبانیوتا و همکاران^[۱۷] انجام گرفت، اثر سن بر خواص لمسی پوست مورد بررسی قرار گرفت. محققان برای این منظور، پوست را به صورت ماده‌ی چهارلایه‌ی هایپرالاستیک مدل کرده و اثرکشیده شدن پوست روی یک سطح صلب را با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. فلین و همکاران^[۱۸] توانایی تابع انرژی آگدن^۸ با ویسکوالاستیسیته و تنش اولیه‌ی ناهمسانگرد در مدل‌سازی رفتار پوست انسان را مورد مطالعه قرار دادند. مقایسه‌ی رفتار پوست انسان و موش در قالب یک مدل هایپرالاستیک ناهمسانگرد توسط گراوس و همکاران^[۱۹] ارائه شد. در مطالعه‌ی پامپلونا و همکاران^[۲۰] بافت پوست بدون در نظر گرفتن رشد، انبساط یافت.

از نرم‌افزار آباکوس برای تعیین پارامترهای معادله‌ی ساختاری الاستیک نمایی دلفینو و همکاران^[۲۱] استفاده شده است. رماچه و همکاران^[۲۲] اثرات کشش پی‌درپی و نیز آزمون‌های تنش - آرمیدگی را بر خواص مکانیکی پوست خوک مورد مطالعه قرار دادند.

سوکي و همکاران^[۲۳] در مقاله‌ی خود، نخستین تحقیق غیرتجربی در مورد رشد پوست را ارائه دادند و رشد پوست با سطح مقطع دایره‌ای را به صورت متقارن محوری در نظر گرفتند. در تحقیقی که توسط تیوله و همکاران^[۲۴] انجام شد، مدل ایزوتروپیک عرضی^۹ بر مبنای میکروساختار را که توسط آرودا و بويس^[۲۵] برای مواد پلیمری پیشنهاد شده بود، در رشد پوست مورد استفاده قرار دادند. آنها از این مدل برای رشد حاصل از کاشت انبساط‌دهنده با هندسه‌های مختلف در زیر پوست در نرم‌افزار تجاری آباکوس استفاده کردند. در تحقیقی که توسط زولنرو و همکاران^[۲۶] انجام شد، با استفاده از تابع انرژی تئوهوکن^{۱۰} تراکم‌پذیر، مدل‌سازی رشد در سه بخش شامل پوست سر، پیشانی و چانه صورت گرفت. در مدلی که زولنرو و همکاران^[۲۷] برای رشد پوست سر ارائه دادند، از تابع انرژی تراکم‌پذیر تئوهوکن استفاده شده است. تیوله و همکاران^[۲۸] در مطالعه‌ی رشد پوست، با استفاده از مدل هایپرالاستیک ایزوتروپیک عرضی^[۲۷]، مدلی برای بافت مردگی^{۱۱} در جراحی پلاستیک ارائه کردند.

مطالعه‌ی مقالات گذشته نشان می‌دهد که برای مدل‌سازی رشد پوست، در تمامی موارد از مدل‌های سه‌بعدی و المان‌های محدود سه‌بعدی استفاده شده است. همچنین، تمامی شبیه‌سازی‌های در نرم‌افزارهای تجاری مانند آباکوس انجام شده است. هدف این مقاله، مدل‌سازی تغییرشکل‌های بزرگ پوست با استفاده از المان‌های دوبعدی غشا و با در نظر گرفتن اثرات رشد است. این المان‌ها به مراتب از المان‌های سه‌بعدی ساده‌تر است و حجم محاسباتی کم‌تری می‌طلبند. همچنین در این تحقیق نشان داده خواهد شد که کارایی آنها به خوبی المان‌های سه‌بعدی است.

در ادامه‌ی این مقاله، در بخش دوم سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ غشاها ارائه می‌شود. در بخش سوم، فرمول‌بندی رشد بیان شده و معادلات ساختاری حاکم بر تغییرشکل‌های بزرگ غشاها با در نظر گرفتن تأثیر پدیده‌ی رشد بیان می‌شوند. در بخش چهارم، فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی برای حل عددی معادلات حاکم ارائه می‌شود. در بخش پنجم، به منظور اعتبارسنجی و بررسی عملکرد فرمول‌بندی ارائه شده، تغییرشکل و رشد پوست با سه هندسه‌ی متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج به دست آمده با مطالعات پیشین مقایسه می‌شود.

۲. سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ یک غشا

در این بخش، کمیت‌های سینماتیکی اساسی که تغییرشکل‌های بزرگ غشاها را در فضای سه‌بعدی را توصیف می‌کنند ارائه می‌شود. چنان که در شکل ۱ نشان داده شده، یک دستگاه مختصات کارتزین^{۱۲} $\{x_1, x_2, x_3\}$ با بردارهای پایه‌ی یک‌ه‌ی متعامد^{۱۳} $\{e_1, e_2, e_3\}$ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که Ω_0 یک غشای نازک دارای انحنا قبل از تغییر شکل باشد. همچنین S_0 به عنوان صفحه‌ی میانی^{۱۴} Ω_0 معرفی می‌شود. در ادامه، یک دستگاه مختصات منحنی الخط^{۱۵} $\{z^1, z^2, z^3\}$ در هر نقطه از سطح میانی در نظر گرفته می‌شود. غشای Ω_0 بعد از تغییرشکل به غشای Ω در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌شود. مکان یک نقطه‌ی دلخواه واقع بر سطح میانی غشا در قبل و بعد از تغییرشکل مطابق روابط ۱ و ۲ قابل نمایش هستند:

$$\mathbf{X}(z^1, z^2, z^3) = \mathbf{R}(z^1, z^2) + z^3 \mathbf{n}_0(z^1, z^2) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3) = \mathbf{r}(\vartheta^1, \vartheta^2) + \vartheta^3 \lambda_2 \mathbf{n}(\vartheta^1, \vartheta^2) \quad (2)$$

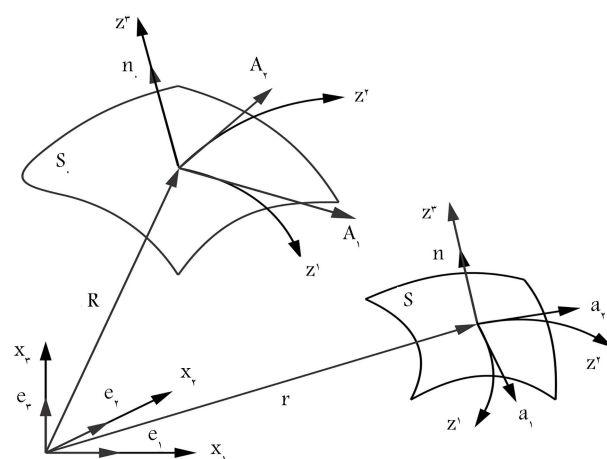
همچنین، مشتق جزئی ناورداهای اصلی I_A ($A = 1, 2, 3$) و دترمینان ژاکوبین $J = \sqrt{\det \mathbf{C}}$ نسبت به تانسور \mathbf{C} عبارت خواهد بود از [۲۸]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right\}, \\ I_3 &= J^2 = \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن \mathbf{I} تانسور همانی در فضای سه بعدی است. به علاوه، تانسور کرنش گرین-سن ونان \mathbf{E}^2 و مؤلفه های غیرصفر آن به شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \\ E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}), \quad E_{rr} = \frac{1}{2} (\lambda_r^2 - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن اندیس های α و β فقط مقادیر ۱ و ۲ را به خود می گیرند. همچنین $\delta_{\alpha\beta}$ نیز بیانگر مؤلفه های دلتای کرونگر δ_{ij} در فضای دوبعدی هستند.



شکل ۱. هندسه ی غشا و دستگاه های مختصات مختلف.

در این روابط \mathbf{r} و \mathbf{R} بردارهای مکان به ترتیب در پیکربندی مرجع و پیکربندی کنونی است. همچنین، \mathbf{n} و \mathbf{n}_0 بردارهای عمود بر غشا در فضای پیش و پس از تغییرشکل هستند که چنین محاسبه می شوند:

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}, \quad (3)$$

\mathbf{a}_i و \mathbf{A}_i بردارهای پایه ی هموردا^{۱۶} روی صفحه ی میانی به ترتیب در پیکربندی اولیه و کنونی بوده و از روابط ۴ قابل محاسبه اند:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial R_i}{\partial z^\alpha} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2) \\ \mathbf{a}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial r_i}{\partial z^\alpha} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

در نهایت، کشیدگی^{۱۷} در راستای ضخامت (λ_3) و نیز بردار جابه جایی \mathbf{u} تعریف می شوند:

$$\lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (5)$$

تانسور گرادیان تغییرشکل^{۱۸} روی صفحه میانی از رابطه ی ۶ به دست می آید:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & \lambda_3 n_1 \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & \lambda_3 n_2 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & \lambda_3 n_3 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

نمایش ماتریسی تانسور راست کوشی-گرین در فضای سه بعدی و با در نظر گرفتن تغییر ضخامت غشا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{33} = \lambda_3^2. \quad (7)$$

به طور کلی، هر تانسور مثبت معین متقارن \mathbf{C} دارای سه مقدار ویژه ی مثبت λ_A^2 ($A = 1, 2, 3$) و سه ناوردای اصلی I_A ($A = 1, 2, 3$) است. سه ناوردای اصلی تانسور \mathbf{C} چنین تعریف می شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right\}, \\ I_3 &= J^2 = \det \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (8)$$

۳. فرمول بندی رشد پوست تحت بارگذاری مکانیکی

در این قسمت، ابتدا مبانی فرمول بندی رشد تحت اعمال بارمکانیکی شرح داده می شود و سپس شکل خاص آن برای مسئله ی رشد غشا مورد استفاده قرار می گیرد. اساس نظریه ی رشد در فضای سه بعدی، تجزیه ی ضربی^{۲۲} گرادیان تغییرشکل است که چنین بیان می شود: [۲۹، ۳۰]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^g \quad (11)$$

که در آن تانسور گرادیان تغییرشکل به یک بخش الاستیک برگشت پذیر \mathbf{F}^e و به یک بخش رشد برگشت ناپذیر \mathbf{F}^g تجزیه شده است. اگر dV و dV_0 حجم اولیه و حجم بعد از تغییرشکل یک المان کوچک باشند، آن گاه ژاکوبین کلی تغییرشکل از رابطه ی ۱۲ به دست می آید:

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e \mathbf{F}^g) = J^e J^g \quad (12)$$

که به نوبه ی خود به قسمت نسبت حجم برگشت پذیر $J^e = \det(\mathbf{F}^e)$ و نسبت حجم برگشت ناپذیر $J^g = \det(\mathbf{F}^g)$ تجزیه می شود. حال فرض می شود که \mathbf{n}_0 بردار یکه ی عمود بر صفحه ی پوست قبل از تغییرشکل باشد. معمولاً فرض می شود که پاسخ پوست در راستای ضخامت \mathbf{n}_0 کاملاً الاستیک است. بر این اساس، می توان تانسور رشد \mathbf{F}^g را به شکل ساده زیر با نمایش ماتریسی 3×3 در نظر گرفت: [۲]

$$\mathbf{F}^g = \sqrt{\vartheta^g} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) + \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \quad (13)$$

حال با توجه به رابطه ی $J^g = \det(\mathbf{F}^g) = (\sqrt{\vartheta^g})^2$ ، تساوی $J^g = \vartheta^g$ برقرار خواهد بود. بر اساس رابطه ی فوق، مدل سازی رشد پوست ناشی از بارگذاری مکانیکی، توسط تعیین متغیر اسکالر ϑ^g امکان پذیر خواهد بود که رشد سطحی پوست را توصیف می کند. مقدار کشیدگی سطحی^{۲۳}، یعنی نسبت سطح تغییرشکل یافته به سطح اولیه، توسط فرمول نسون^{۲۴} [۲۱] و نیز با کمک گرفتن از روابط ۱۲ و ۱۳ قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{dA}{dA_0} = \left\| J (\mathbf{F}^e)^{-T} (\mathbf{F}^g)^{-T} \mathbf{n}_0 \right\| \\ &= \left\| J^e (\mathbf{F}^e)^{-T} \mathbf{n}_0 \right\| \vartheta^g = \vartheta^e \vartheta^g \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $\|$ نماد اندازه و همچنین dA و dA^* اندازه‌ی مساحت یک المان سطحی کوچک به ترتیب در قبل و بعد از تغییر شکل هستند. همچنین $\vartheta^e = \|J^e (\mathbf{F}^e)^{-T} \mathbf{n}^0\|$ قسمت الاستیک تغییر سطح است. فرمول فوق نشان می‌دهد که کشیدگی سطحی نیز از تجزیه ضربی پیروی کرده و به دو بخش کشیدگی سطحی الاستیک برگشت پذیر ϑ^e و کشیدگی سطح رشد یافته برگشت ناپذیر ϑ^g قابل تجزیه خواهد بود.

نکته‌ی دیگری که باید بدان توجه داشت آن است که پدیده‌ی رشد با افزایش جرم همراه خواهد بود. اگر dM جرم اولیه‌ی یک المان دیفرانسیلی با حجم dV و چگالی ρ_0 باشد، جرم آن در زمان t برابر با dm خواهد شد. رابطه‌ی بین dM و dm عبارت است از: [۳۰]

$$dm = dM + \int_0^t \int_V r_g^g dt dV. \quad (15)$$

که در آن پارامتر اسکالر r_g^g بیانگر نرخ نفوذ جرم بر واحد حجم اولیه به جسم در حال رشد است که از رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$r_g^g = \rho_0 \det(\mathbf{F}^g) \text{tr}(\mathbf{L}^g), \quad \mathbf{L}^g = \dot{\mathbf{F}}^g (\mathbf{F}^g)^{-1} \quad (16)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۳، تانسور گرادیان سرعت رشد از رابطه‌ی ۱۷ قابل محاسبه خواهد بود:

$$\mathbf{L}^g = \frac{\dot{\vartheta}^g}{\vartheta^g} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2) \quad (17)$$

لذا با مشخص شدن $\dot{\vartheta}^g$ در روابط بعدی، مقدار r_g^g از رابطه‌ی ۱۶ قابل محاسبه خواهد بود که از آن مقدار dm به دست می‌آید. در علم مکانیک رشد، معمولاً رشد به صورت فرایندی در نظر گرفته می‌شود که بر اساس اعمال کرنش یا اعمال تنش قابل فرمول بندی است. در فرمول بندی بر اساس اعمال کرنش، معادله‌ی نرخ تغییرات رشد سطحی که به آن معادله‌ی تکاملی [۲۵] اطلاق می‌شود به صورت زیر است [۳۰]:

$$\dot{\vartheta}^g = k^g(\vartheta^g) \phi^g(\vartheta^e) \quad (18)$$

و در آن $k^g(\vartheta^g)$ تابع وزن [۲۶] و $\phi^g(\vartheta^g)$ تابع معیار رشد [۲۷] مشابه تابع تسلیم در نظریه‌ی پلاستیسیته است. برای تابع وزن، معمولاً رابطه‌ی ۱۹ پیشنهاد می‌شود که مقدار رشد بیشینه را کنترل می‌کند [۳۰]:

$$k^g = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\vartheta^{\max} - \vartheta^g}{\vartheta^{\max} - 1} \right)^\gamma \quad (19)$$

در رابطه‌ی ۱۹، سرعت انطباق τ و پارامتر شکل برای منحنی انطباق γ ، سرعت سازگاری و مطابقت را کنترل می‌کنند. همچنین رشد سطحی بیشینه ϑ^{\max} حالت تعادل زیست‌شناختی را تعریف می‌کند. برای معیار رشد، فرض می‌شود که رشد توسط کشیدگی سطحی الاستیک ϑ^e تحریک شود:

$$\phi^g = \max\{0, \vartheta^e - \vartheta^{\text{crit}}\} \quad (20)$$

ϑ^{crit} مقداری از کشیدگی سطحی است که به ازای آن فرایند رشد آغاز می‌شود. در گام بعد، تابع چگالی انرژی کرنشی چنین در نظر گرفته می‌شود [۲۵]:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{F}^g) \quad (21)$$

در این صورت مقدار تنش دوم پیولا - کرشف [۲۹] از رابطه‌ی ۲۲ به دست خواهد آمد [۳]:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}^e} : \frac{\partial \mathbf{C}^e}{\partial \mathbf{C}} = (\mathbf{F}^g)^{-1} \mathbf{S}^e (\mathbf{F}^g)^{-T} \quad (22)$$

که در آن: نماد استاندارد ضرب داخلی دوگانه [۳۰] است. تابع انرژی کرنشی نتوهوگین تراکم پذیر در مقاله‌ی حاضر مطابق رابطه‌ی ۲۳ در نظر گرفته می‌شود [۲۸]:

$$\Psi = \frac{\mu}{\nu} \left(J^e^{-\nu/\nu} \mathbf{C}^e : \mathbf{I} - 3 \right) + \frac{1}{D_1} (J^e - 1)^2 \quad (23)$$

که در آن، μ مدول برشی بوده و رابطه‌ی $D_1 = E/\nu(1 - \nu)$ برقرار است. بدیهی است که E و ν نیز به ترتیب مدول یانگ [۳۱] و نسبت پواسون [۳۲] هستند. در این حالت تانسور تنش دوم پیولا - کرشف ناشی از تغییر شکل الاستیک غشا به صورت زیر خواهد شد:

$$\mathbf{S}^e = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}^e} = \mu J^{e-\nu/\nu} \mathbf{I} + \left[\frac{-\mu}{\nu} J^{e-\nu/\nu} I_1^e + \frac{2}{D_1} J^e (J^e - 1) \right] \mathbf{C}^{e-1} \quad (24)$$

با مشتق گیری از تانسور تنش \mathbf{S}^e نسبت به تانسور تغییر شکل راست کوشی - گرین الاستیک \mathbf{C}^e ، عبارت مربوط به تانسور مرتبه‌ی چهار الاستیک \mathbf{C}^e چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^e}{\partial \mathbf{C}^e} = & -\frac{2}{\nu} \mu J^{e-\nu/\nu} \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{e-1} + \mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{I} \right) \\ & + \left[\frac{2}{\nu} \mu J^{e-\nu/\nu} I_1^e + \frac{2}{D_1} J^e (2J^e - 1) \right] \\ & \times (\mathbf{C}^{e-1} \otimes \mathbf{C}^{e-1}) + (\mathbf{C}^{e-1} \odot \mathbf{C}^{e-1}) \times \\ & \left[\frac{\mu}{\nu} J^{e-\nu/\nu} I_1^e - \frac{2}{D_1} J^e (J^e - 1) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه‌ی ۲۵ عبارت $\mathbf{C}^{e-1} \odot \mathbf{C}^{e-1}$ مشاهده می‌شود که نیازمند توضیح بیشتر در خصوص ضرب تانسوری \odot است. در این راستا، اگر $\tilde{\mathbf{A}}$ و $\tilde{\mathbf{B}}$ دو تانسور مرتبه‌ی دوم باشند، ضرب تانسوری $\tilde{\mathbf{A}} \odot \tilde{\mathbf{B}}$ به صورت رابطه‌ی ۲۶ تعریف می‌شود:

$$(\tilde{\mathbf{A}} \odot \tilde{\mathbf{B}})_{ijkl} = \tilde{A}_{ik} \tilde{B}_{jl} + \tilde{A}_{il} \tilde{B}_{jk} \quad (26)$$

که در آن \tilde{A}_{ik} و \tilde{B}_{jl} بیانگر مؤلفه‌های دو تانسور $\tilde{\mathbf{A}}$ و $\tilde{\mathbf{B}}$ هستند. همچنین، تانسور تنش پیولا - کرشف دوم کل از انتقال تنش \mathbf{S}^e روی جسم تغییر شکل نیافته از رابطه‌ی ۲۲ به دست می‌آید. لذا تانسور مرتبه چهار کل به شکل تقریبی زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \approx (\mathbf{F}^g)^{-1} \mathbf{C}^e (\mathbf{F}^g)^{-T} \quad (27)$$

توجه شود که تانسور مرتبه چهار \mathbf{C} به \mathbf{F}^{g-1} و لذا به متغیر رشد ϑ^g وابسته است که باید از حل معادله‌ی تکاملی ۱۸ تعیین شود. در ادامه، به منظور محاسبه ϑ^g از روش تفاضلات متناهی [۳۳] برای متغیر زمان استفاده می‌شود. بر این اساس، اگر ϑ_n^g و ϑ_{n+1}^g بیانگر مقدار ϑ^g در دو زمان t_n و $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ باشند، آنگاه مقدار ϑ^g در زمان t_{n+1} بر اساس مشتق گیری پسروی اویلر [۳۴] به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\vartheta_{n+1}^g = (\vartheta_{n+1}^g - \vartheta_n^g) / \Delta t \quad (28)$$

در ادامه، صفحه‌ی میانی پیش از تغییر شکل S_0 به صورت $S_0 \approx \cup_{e=1}^m S_e^0$ به صورت گسسته‌سازی می‌شود که S_e^0 یک المان بوده و m بیانگر تعداد المان‌ها در هندسه‌ی گسسته‌سازی شده^{۳۹} است. در فرمول‌بندی کنونی، هندسه‌ی اولیه و میدان جابه‌جایی با استفاده از تابع درون‌یابی مشابه تقریب زده می‌شود. به عبارت دیگر، فرض می‌شود که المان به کار رفته در تحلیل از نوع ایزوپارامتریک^{۴۰} است. در این صورت، بردار مکان \mathbf{R} و بردار جابه‌جایی \mathbf{u} در یک المان توسط روابط ۳۷ تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{R} = \sum_{I=1}^{n_e} N_I \mathbf{R}_I, \quad \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{n_e} N_I \mathbf{u}_I, \quad (37)$$

که N_I توابع درون‌یابی، \mathbf{u}_I بردار جابه‌جایی در گره I ام و n_e تعداد گره در المان است. همچنین، مؤلفه‌های تانسور کرنش مجازی $\delta \mathbf{E}$ چنین به دست می‌آید:

$$\delta E_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} (F_{i\alpha} \delta F_{i\beta} + F_{i\beta} \delta F_{i\alpha}) \quad (38)$$

در نتیجه، با توجه به رابطه‌ی $\delta F_{i\alpha} = \delta u_{i,\alpha}$ ، تقریب المان محدود نمایش برداری کرنش مجازی $\delta \tilde{\mathbf{E}}$ به صورت رابطه‌ی ۳۹ نوشته می‌شود:

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \sum_{I=1}^{n_e} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I, \quad (39)$$

که در آن ماتریس کرنش - جابه‌جایی \mathbf{B}_I به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,1} F_{11} & N_{I,1} F_{12} \\ N_{I,2} F_{12} & N_{I,2} F_{22} \\ N_{I,1} F_{12} + N_{I,2} F_{11} & N_{I,1} F_{22} + N_{I,2} F_{11} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

در نتیجه با مقادیر به دست آمده می‌توان انرژی درونی δU^{int} را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta U^{\text{int}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{int}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^{\text{int}} \quad (41)$$

with $\mathbf{f}_I^{\text{int}} = h_e \int_{A_e} \mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{S}} dA_e,$

که در آن بردار نیروی داخلی در گره شماره‌ی I و $\mathbf{A}_{e=1}^m$ عملگری^{۴۱} است که اثر تمام المان‌ها را لحاظ می‌کند. همچنین $\delta \mathbf{u}_e$ بردار جابه‌جایی مجازی تمام گره‌های المان است. به طور مشابه، فرم گسسته‌ی کار مجازی نیروهای خارجی را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\delta W^{\text{ext}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^{\text{ext}}, \quad (42)$$

در رابطه‌ی ۴۲، بردار نیروی خارجی است که برای هر گره از المان چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}_I^{\text{ext}} = \int_{A_e} N_I \tilde{\mathbf{b}} dA_e + \oint_{\Gamma_e} N_I \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma_e, \quad (43)$$

در نهایت اصل کار مجازی را می‌توان به شکل گسسته‌ی زیر بازنویسی کرد:

$$\delta U^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R}^* = \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}) \\ = \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T (\mathbf{f}_e^{\text{int}} - \mathbf{f}_e^{\text{ext}}) = 0, \quad (44)$$

هدف اصلی یافتن مقدار ϑ_{n+1}^g است. در ادامه اندیس $n+1$ جهت سادگی روابط حذف می‌شود. با جایگزینی معادله‌ی ۲۸ در رابطه‌ی ۱۸، معادله‌ی جبری غیرخطی $0 = \vartheta^g - \vartheta_n^g - k^g \phi^g \Delta t$ به دست می‌آید که توسط روش تکراری^{۴۵} نیوتن قابل حل است. بر این اساس، ابتدا مقدار باقی‌مانده^{۴۶} به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$R_\vartheta = \vartheta^g - \vartheta_n^g - k^g \phi^g \Delta t \quad (29)$$

که باید در نهایت به سمت صفر میل کند. با مشتق‌گیری از باقی‌مانده نسبت به ϑ^g ، شیب منحنی R_ϑ نسبت به ϑ^g به صورت رابطه‌ی ۳۰ قابل بیان است:

$$K_\vartheta = \frac{\partial R_\vartheta}{\partial \vartheta^g} = 1 - \left(\frac{\partial k^g}{\partial \vartheta^g} \phi^g + \frac{\partial \phi^g}{\partial \vartheta^g} k^g \right) \Delta t \quad (30)$$

در نتیجه در هر نمو از روش نیوتون، مقدار پارامتر رشد ϑ^g چنین به روز^{۴۷} می‌شود:

$$(\vartheta^g)_{n+1} = \vartheta^g + \Delta \vartheta^g = \vartheta^g - R_\vartheta / K_\vartheta \quad (31)$$

این فرایند تا آن‌جا که مقدار $\Delta \vartheta^g = -R_\vartheta / K_\vartheta$ به سمت صفر میل کند تکرار خواهد شد و بدین ترتیب مقدار ϑ_{n+1}^g محاسبه خواهد شد.

۴. فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی

به منظور حل عددی معادلات حاکم، یک فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی لاگرانژی کامل^{۴۸} برای تغییرشکل‌های بزرگ غشاهای هائیرالاستیک ارائه می‌شود. مهم‌ترین ابزار برای ارائه‌ی این فرمول‌بندی، اصل کار مجازی است به صورت زیر بیان می‌شود:^[۳۲]

$$\delta U^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}}, \quad (32)$$

که در آن δU^{int} انرژی درونی مجازی و δW^{ext} کار مجازی حاصل از نیروهای خارجی است. برای یک غشای نازک، این مقادیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta U^{\text{int}} = h_e \int_{A_e} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dA_e, \quad (33)$$

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{A_e} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dA_e + \oint_{\Gamma_e} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma_e, \quad (34)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{b}}$ نیرو بر واحد سطح میانی غشا و $\tilde{\mathbf{t}}$ نیرو بر واحد طول منحنی محیطی سطح میانی آن است. همچنین، A_e و Γ_e به ترتیب مساحت و منحنی مرزی در صفحه‌ی میانی پیش از تغییرشکل هستند. برای به دست آوردن فرمول‌بندی المان محدود با نمایش ماتریسی، به نمایش برداری کرنش مجازی $\delta \mathbf{E}$ و تانسور تنش دوم پیولا - کرشف \mathbf{S} نیاز است. بیان برداری این دو کمیت برای مدل غشا که یک هندسه‌ی دوبعدی دارای انحنا در فضا است مطابق رابطه‌ی ۳۵ انجام خواهد شد:

$$\delta \tilde{\mathbf{E}} = \{\delta E_{11}, \delta E_{22}, 2\delta E_{12}\}^T, \\ \tilde{\mathbf{S}} = \{S_{11}, S_{22}, S_{12}\}^T \quad (35)$$

براین اساس، انرژی درونی مجازی غشا به صورت رابطه‌ی ۳۶ قابل نمایش خواهد بود:

$$\delta U^{\text{int}} = h_e \int_{A_e} \delta \tilde{\mathbf{E}}^T \tilde{\mathbf{S}} dA_e. \quad (36)$$

که در آن δU بردار جابه‌جایی مجازی کل شده بوده و \mathbf{R}^* بردار باقی‌مانده‌ی کل شده است که می‌توان آن را به صورت رابطه‌ی ۴۵ نوشت:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{A}_{e=1}^m \mathbf{R}_e^* = \mathbf{A}_{e=1}^m (\mathbf{f}_e^{\text{int}} - \mathbf{f}_e^{\text{ext}}) = \mathbf{0}, \quad (45)$$

که در آن \mathbf{R}_e^* نیز بردار باقی‌مانده‌ی المان است. رابطه‌ی ۴۵ یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی برحسب جابه‌جایی‌های گرهی است که با استفاده از روش نیوتون - رافسون قابل حل است. برای این منظور، باید فرم خطی‌سازی شده‌ی اصل کار مجازی را محاسبه کرد. در این راستا، نمو^{۴۲} انرژی درونی مجازی چنین بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta \delta U^{\text{int}} &= \mathbf{A}_{e=1}^m h_e \int_{A_e} [(\delta \vec{\mathbf{E}}^T \Delta \vec{\mathbf{S}} + \Delta \delta \vec{\mathbf{E}}^T \vec{\mathbf{S}}) dA_e] \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^m \sum_{I=1}^{n_e} \sum_{J=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \Delta \mathbf{u}_J \\ &= \mathbf{A}_{e=1}^m \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (46)$$

در رابطه‌ی ۴۶ \mathbf{K}_{IJ} بلوک شماره‌ی IJ از ماتریس سفتی المان \mathbf{K}_e است که چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{IJ} = h_e \int_{A_e} (\mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_J + \mathbf{G}_{IJ}) dA_e. \quad (47)$$

در رابطه‌ی ۴۷، $\tilde{\mathbf{C}}$ ماتریس سفتی مادی است که در واقع نمایش ماتریسی تانسور مرتبه چهار \mathbf{C} است که در رابطه‌ی ۲۷ ارائه شد. به عبارت دیگر، با توجه به ترتیب مؤلفه‌های تنش و کرنش در معادله‌ی ۳۵، ماتریس $\tilde{\mathbf{C}}$ برحسب مؤلفه‌های تانسور نمایش داده می‌شود:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1111} & \mathbf{C}_{1122} & \mathbf{C}_{1133} \\ \mathbf{C}_{2211} & \mathbf{C}_{2222} & \mathbf{C}_{2233} \\ \mathbf{C}_{3311} & \mathbf{C}_{3322} & \mathbf{C}_{3333} \end{bmatrix} \quad (48)$$

همچنین در رابطه‌ی ۴۸، بلوک ماتریسی \mathbf{G}_{IJ} بخش هندسی ماتریس سفتی است که چنین بیان می‌شود:

$$\mathbf{G}_{IJ} = \left(\begin{bmatrix} N_{I,1} & N_{I,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{J,1} \\ N_{J,2} \end{bmatrix} \right) \mathbf{I}. \quad (49)$$

یادآوری می‌شود که تانسور مرتبه چهار \mathbf{C} و لذا ماتریس $\tilde{\mathbf{C}}$ به متغیر رشد ϑ^g وابسته است. بنابراین قبل از محاسبه‌ی \mathbf{K}_{IJ} ، باید از الگوریتم تعیین ϑ^g که در روابط ۲۸ تا ۳۱ شرح داده شد، در هر نقطه‌ی گausی اجرا شود. پس از تعیین ϑ^g مقدار ماتریس $\tilde{\mathbf{C}}$ محاسبه شده و براساس آن بلوک \mathbf{K}_{IJ} قابل محاسبه خواهد بود. پس از محاسبه‌ی ماتریس سفتی و بردار باقی‌مانده‌ی هر المان (یعنی \mathbf{K}_e و \mathbf{R}_e^*) و لحاظ کردن اثر تمام المان‌ها، دستگاه معادلات جبری خطی به دست می‌آید:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{A}_{e=1}^m \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{u}_e = -\mathbf{R}^*, \quad (50)$$

که از آن بردار نمو جابه‌جایی تمام گره‌ها (یعنی $\Delta \mathbf{U}$) حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در فرایند حل کافی است بلوک شماره‌ی IJ ام از ماتریس سختی المان توسط روابط ۲۷، ۴۷ و ۴۸ محاسبه شود. براساس آن، ماتریس سفتی المان محاسبه می‌شود. سپس با سرهم‌بندی^{۴۳} المان‌ها، رابطه‌ی ۴۹ به دست می‌آید که یک دستگاه معادلات جبری خطی است. یعنی در کل روش اجزای

محدود غیرخطی، ابتدا معادلات غیرخطی و پیچیده‌ی حاکم بر سیستم - که توسط رابطه‌ی ۴۵ بیان شده است - به دست می‌آید. سپس این معادلات توسط روش معروف نیوتون - رافسون خطی‌سازی می‌شود. کل فرایند خطی‌سازی در رابطه‌ی ۴۶ مشاهده می‌شود که منجر به پیدایش ماتریس سختی در رابطه‌ی ۴۷ شده است. در نهایت، این روش به معادله‌ی ساده‌ی خطی^{۵۰} می‌رسد که با روش‌های بسیار متنوعی مانند روش ژاکوبی، روش حذفی گاوس، روش تجزیه‌ی چولسکی^{۴۴} و روش گرادیان‌های مزدوج^{۴۵} قابل حل است. شایان ذکر است که برای ماتریس متقارن \mathbf{K} ، نرم‌افزار متلب از روش تجزیه‌ی چولسکی استفاده می‌کند. پس از یافتن بردار نمو جابه‌جایی، جابه‌جایی کل گره‌ها توسط رابطه‌ی $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}$ به روز می‌شود.

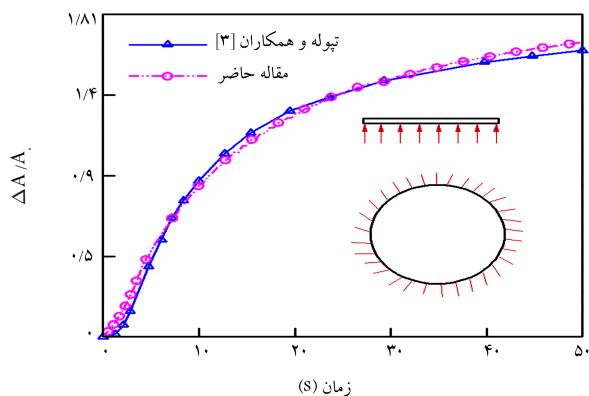
۵. مثال عددی

در این بخش، به منظور اعتبارسنجی و نیز بررسی عملکرد فرمول‌بندی ارائه شده در بخش‌های قبل، از آن‌جا که نرم‌افزارهای تجاری قابلیت مدل‌سازی پدیده‌ی رشد را ندارند، ابتدا یک کد المان محدود غیرخطی در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شده است. به عبارت دیگر، از هیچ نرم‌افزار تجاری برای تولید هندسه، مش‌بندی یا حل معادلات جبری استفاده نشده است. در کلیه‌ی شبیه‌سازی‌ها از المان‌های چهارضلعی چهارگره‌ای با سه درجه آزادی $\{u_1, u_2, u_3\}$ در هر گره برای گسسته‌سازی هندسه استفاده می‌شود. توجه شود که فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده در بخش قبل به ازای المان با هر تعداد گره قابل استفاده است. همچنین از قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوسی 2×2 برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها استفاده می‌شود.

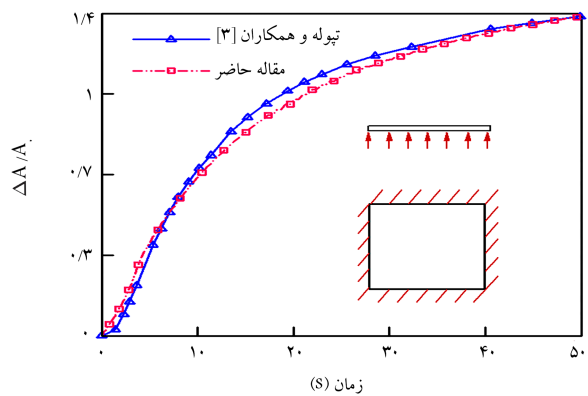
۱.۵. رشد پوست به صورت هندسه‌ی تخت

در این بخش یک مثال عددی ارائه می‌شود که شامل بررسی رشد پوست به صورت صفحه‌ی تخت با سه مقطع مربعی، دایره‌یی و مستطیلی است. مشابه کار محققین قبلی^[۳]، قسمتی از پوست با سه نوع سطح مقطع مربعی، دایره‌یی و مستطیلی در نظر گرفته می‌شود. ضخامت پوست در همه‌ی موارد برابر ۲ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. برای سطح مقطع دایروی و مربعی مقدار مساحت اولیه برابر ۳۷ سانتی‌متر مربع است. همچنین مرزهای پوست بدون حرکت در نظر گرفته می‌شوند (مشابه شکل‌های داخلی ۲ الف و ۲ ب). در شبیه‌سازی‌های انجام شده در این تحقیق، از مدل نئوهوکنین تراکم‌پذیر که در رابطه‌ی ۲۳ ارائه شد استفاده می‌شود. مطابق مطالعات قبلی^[۳]، مقادیر مدول برشی $\mu = 0.385$ و مگاپاسکال و نسبت بواسون $\nu = 0.46$ در نظر گرفته می‌شوند. سرعت انقباض و پارامتر شکل برای منحنی انقباض به ترتیب $\tau = 1$ و $\gamma = 2$ فرض می‌شود. همچنین، مقدار رشد سطحی بحرانی و بیشینه نیز به ترتیب به صورت $\vartheta^{\text{crit}} = 1/0.1$ و $\vartheta^{\text{max}} = 2/4$ لحاظ می‌شود.

شایان ذکر است که کاربرد عملی این مثال در جراحی ترمیمی پوست است که هدف آن ترمیم ناهنجاری‌های پوستی است. مواردی مانند خال‌های گوشتی مادرزادی، ناحیه‌ی آسیب‌دیده توسط سرطان پستان یا ناحیه‌ی تخریب شده توسط سوختگی از مهم‌ترین مثال‌های ناهنجاری پوستی به شمار می‌رود. به لحاظ عملی، پوست در ناحیه‌ی دارای ناهنجاری برش خورده و یک انبساط‌دهنده‌ی سیلیکونی معمولاً با سطح مقطع مربعی، دایره‌یی یا مستطیلی در زیر آن قرار داده می‌شود. سپس، با تزریق آب نمک دارای فشار به داخل انبساط‌دهنده، پوست نیز تحت فشار قرار می‌گیرد و اصطلاحاً دچار فراکشش می‌شود. در واقع همین فشار مکانیکی که



ب) سطح مقطع دایره‌یی.



الف) سطح مقطع مربعی.

شکل ۲. تغییرات $\Delta A/A_0$ برحسب زمان برای سطح مقطع مربعی و دایره‌یی.

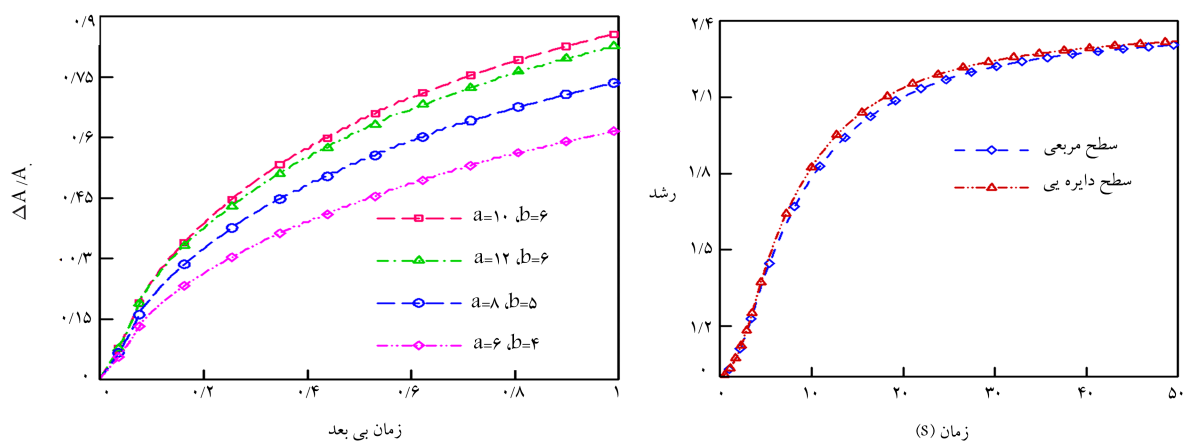
برای سطح مقطع دایره‌یی قابل مشاهده است، نتایج حاصل از این مدل‌سازی که فقط با ۲۵ المان در مدل یک‌چهارم به دست آمده است، با نتایج پیشین^[۳] مطابقت بسیار خوبی دارد. شایان ذکر است که در مدل‌سازی المان محدود ارائه شده توسط این محققین، از ۱۷۲۸ المان سه‌بعدی هشت‌گره‌ای (۲۵۰ گره) برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. باید توجه داشت که در مطالعات پیشین^[۳] سه ردیف المان ۸ گره‌ای در راستای ضخامت قرار داده شده است، در حالی که در تحقیق حاضر کل پوست با یک المان سطحی غشا مدل‌سازی می‌شود. این نکته نشان می‌دهد که فرمول‌بندی ارائه شده در مقاله، به لحاظ محاسباتی بسیار کاراتر از فرمول‌بندی پیشین^[۳] است و حجم محاسبات بسیار کم‌تری می‌طلبد. نمودار متغیر رشد ϑ^g برحسب زمان در شکل ۳ الف برای سطح مقطع‌های مربعی و دایره‌یی نشان داده شده است. بر اساس منحنی‌های به دست آمده، مقدار نهایی متغیر رشد در مدل‌سازی کنونی برای سطح مقطع مربعی $\vartheta^g = 2/33$ و برای سطح مقطع دایره‌یی $\vartheta^g = 2/34$ به دست می‌آید. این مقادیر بسیار نزدیک به مقادیر متناظر $\vartheta^g = 2/35$ و $\vartheta^g = 2/36$ گزارش شده در مطالعات محققین^[۳] است.

در گام بعد، رشد پوست در سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. طول و عرض مستطیل به ترتیب با a و b نشان داده شده و نسبت منظر به صورت b/a تعریف می‌شود. شکل ۳ ب منحنی تغییرات زمانی $\Delta A/A_0$ (افزایش مساحت به مساحت اولیه) به ازای مقادیر متفاوت a و b برحسب سانتی‌متر را نمایش می‌دهد. آزمایش‌های بالینی با هندسه‌های مشابه توسط ون - رپرد و همکاران^[۳۵] بر روی پوست بافت زنده (پوست خوک) انجام گرفته است. شایان ذکر است که خواص پوست خوک بسیار شبیه به پوست انسان است.^[۳۵] نتایج حاصل از شبیه‌سازی حاضر و آزمایش‌های بالینی در جدول ۱ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، سطح حاصل از مدل‌سازی مقاله‌ی حاضر مطابقت خوبی با آزمایش بالینی انجام شده دارد، به طوری که مقدار متوسط خطا حدود ۴ درصد است. شایان ذکر است که در مرجع^[۳۵] تنها از یک تک فرمول ساده‌ی ریاضی جهت پیش‌بینی مقدار رشد استفاده شده بود. در مقاله‌ی کنونی، از نظریه‌ی مکانیک رشد در ترکیب با علم تغییرشکل‌های بزرگ استفاده شده است. لذا نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که نظریه‌ی مکانیک رشد قابلیت پیش‌بینی رشد پوست با دقت مناسب را دارد. در ادامه، توزیع متغیر رشد ϑ^g برای سطح مقطع مربعی در شکل ۴ نشان داده شده است. به صورت مشابه، پروفیل توزیع متغیر رشد ϑ^g برای سطح مقطع دایره‌یی در شکل ۵ الف و ۵ ب به ترتیب در زمان‌های ۴ و ۵۰ ثانیه به تصویر کشیده شده

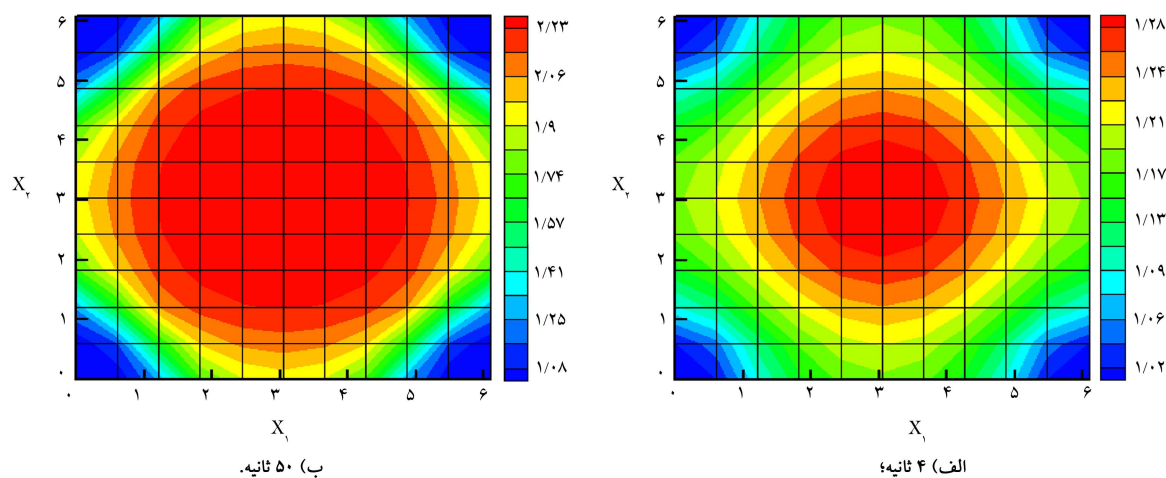
از طریق انبساط‌دهنده به پوست اعمال می‌شود، با گذشت زمان سبب رشد پوست با اعمال تنش و کرنش مکانیکی می‌شود. در واقع بدن موجود زنده، به منظور کاهش درد ناشی از کشیده شدن پوست به دلیل اعمال فشار، شروع به تولید پوست جدید می‌کند تا با بزرگ‌تر شدن سطح مقطع، مقدار تنش و درد را کاهش دهد. به عبارت دیگر، اعمال فشار توسط انبساط‌دهنده بدن موجود زنده را وادار به تولید پوست جدید می‌کند. پس از آن که رشد پوست به اندازه‌ی کافی صورت گرفت، توسط عمل جراحی، قسمت‌های نامطلوب پوست (مانند خال گوشتی) بریده و حذف شده و قسمت‌های جدید رشد یافته و بدون عیب، به هم دوخته می‌شود. لذا پوست آسیب دیده با پوست تازه‌ی بدون عیب جایگزین می‌شود. نکته‌ی اساسی استفاده از پوست رشد یافته آن است که ساختار آن دقیقاً از نوع پوست در ناحیه‌ی آسیب دیده است. لذا استفاده از این نوع عمل جراحی، به لحاظ کیفیت پوست، بهتر از جایگزینی پوست با پوست‌های برداشته شده از نواحی دیگر بدن است.

نکته‌ی دیگری که باید بدان اشاره شود آن است که انبساط‌دهنده بین درم و هایپودرم جاسازی می‌شود و در واقع اپیدرم و درم روی انبساط‌دهنده قرار می‌گیرند. اما در شبیه‌سازی این مقاله، پوست به صورت یک لایه مدل‌سازی می‌شود. مطالعات تجربی نشان می‌دهند که نقش اصلی را درم بر عهده دارد و میزان نقش اپیدرم در رفتار پوست در مقایسه با درم بسیار ناچیز است، زیرا که درم ضخامت و مدول بزرگ‌تری نسبت به اپیدرم دارد و اجزای مهم پوست شامل فولیکول‌های مو و رگ‌های خونی را در بر می‌گیرد.^[۳۳، ۳۴]

فرایند بارگذاری بدین گونه است که پوست در بازه زمانی $0 < t < 4$ s تحت فشار قرار می‌گیرد، به گونه‌یی که مقدار آن از صفر شروع شده و با افزایش به صورت خطی به مقدار بیشینه p_{max} می‌رسد. سپس فشار بیشینه‌ی فوق در بازه $4 < t < t_{max} = 50$ s ثابت نگه داشته می‌شود تا به پوست اجازه‌ی رشد داده شود. برای پوست با سطح مقطع دایره‌یی و مربعی مقدار بیشینه فشار 0.2 / 0.112 مگاپاسکال است. برای سطح مقطع مستطیلی این مقدار 0.112 / 0.05 مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. به دلیل تقارن، در هر سه سطح مقطع تنها یک‌چهارم غشا در شبیه‌سازی المان محدود در نظر گرفته می‌شود. آنالیز همگرایی نشان می‌دهد که در هر سه مورد یک‌م‌ش‌بندی با $4 \times 4 = 16$ المان برای دست یافتن به منحنی همگرا کفایت می‌کند. با این وجود، یک‌م‌ش‌بندی با $5 \times 5 = 25$ المان در نظر گرفته می‌شود که منحنی‌های هموارتری حاصل شود. در شکل ۲، منحنی تغییرات نسبت تغییر سطح به سطح اولیه (یعنی $\Delta A/A_0$) برحسب زمان ترسیم شده است. چنان که در شکل ۲ الف برای سطح مقطع مربعی و در شکل ۲ ب



شکل ۳. نمودار بیشینه پارامتر رشد پوست برحسب زمان برای سطح مقطع مربعی و دایره‌ای.



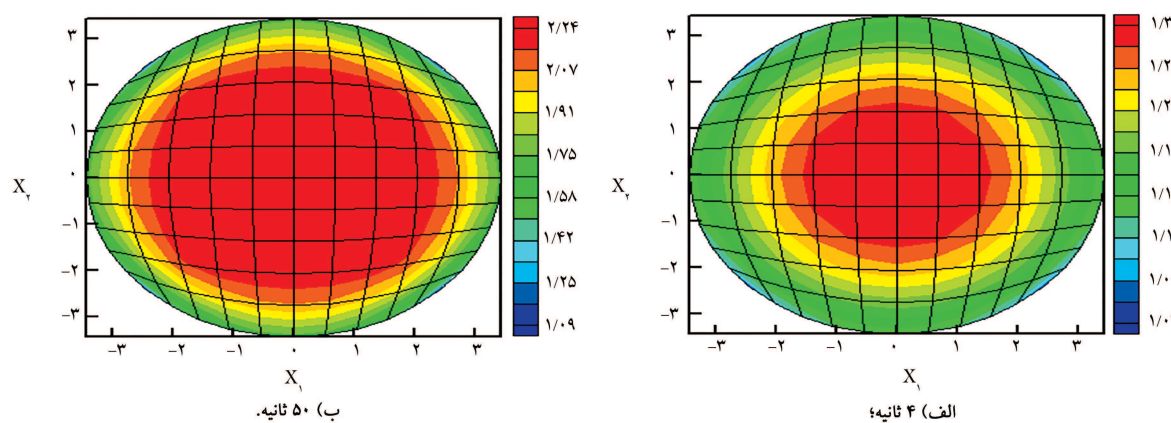
شکل ۴. توزیع متغیر رشد v_g در پوست با سطح مقطع مربعی در زمان.

جدول ۱. مقایسه‌ی مقدار افزایش سطح ناشی از رشد پوست در نوشتار حاضر نسبت به مطالعه‌ی بالینی پیشین [۳۵] برای پوست با سطح مقطع مستطیلی (ابعاد برحسب سانتی‌متر بوده و مساحت برحسب سانتی‌متر مربع است).

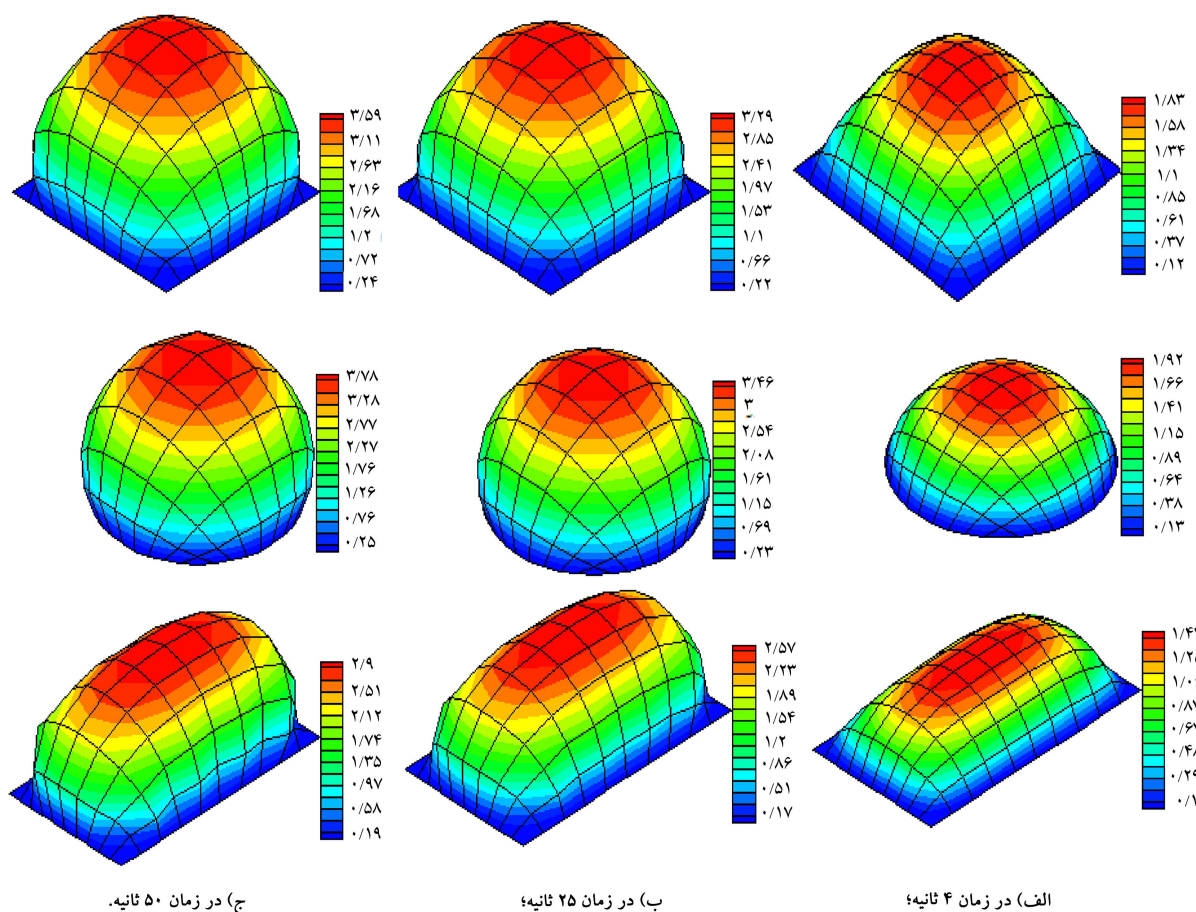
طول و عرض انبساط‌دهنده	افزایش سطح مرجع [۳۵]	افزایش سطح مقاله حاضر	درصد خطا (%)
$a = 12, b = 6$	۶۲/۹۰	۶۰/۱۲	۴/۴
$a = 10, b = 6$	۴۶/۵۵	۴۹/۸۷	۶/۷
$a = 8, b = 5$	۴۰/۰۴	۳۸/۹۶	۲/۷
$a = 6, b = 4$	۱۶/۲۴	۱۵/۴۳	۴/۹

که سبب تغییر شکل بیشتر پوست در کنار افزایش مقدار v_g می‌شود. همچنین توزیع نسبت جرم کنونی به جرم اولیه، یعنی dm/dM ، برای پوست با هندسه‌های مربعی، دایره‌ای و نیز مستطیلی با نسبت منظر ۹/۱۶ و در زمان ۵۰ ثانیه در شکل ۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نسبت جرم در قسمت‌های میانی این سه هندسه کمی بیشتر از ۳ است. به عبارت دیگر، اگر جرم اولیه‌ی یک المان کوچک دیفرانسیلی در مرکز هندسه برابر dm باشد، در اثر رشد پوست و نفوذ جرم جدید به داخل آن، جرم جدید حدود $3dm$ خواهد شد. همچنین بیشترین افزایش جرم در پوست با سطح مقطع مربعی رخ می‌دهد که مقدار بیشینه dm/dM حدوداً $3/24$ است.

است. از شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان دریافت که متغیر رشد v_g که در زمان ۴ ثانیه به مقدار حدود $1/3$ رسیده و تمرکز آن در بخش مرکزی پوست بوده، پس از گذشت زمان و در فشار ثابت، افزایش قابل توجهی یافته و به حدود $2/5$ می‌رسد و همچنین به مناطق وسیع‌تری از سطح پوست توزیع می‌شود. در نهایت، شکل‌های مربوط به تغییر شکل و رشد پوست در زمان‌های مختلف برای سطح مقطع‌های مربعی، دایره‌ای و مستطیلی به‌ازای فشار یکسان $2/0/0$ مگاپاسکال برای همه‌ی هندسه‌ها در شکل ۶ نمایش داده شده است. یادآوری می‌شود که مقدار فشار در زمان ۴ ثانیه بیشینه می‌شود و پس از آن ثابت می‌ماند. لذا در بازه زمانی $4 < t < 50$ ثانیه صرفاً رشد پوست رخ می‌دهد



شکل ۵. توزیع متغیر رشد θ^g در پوست با سطح مقطع دایره‌ای در زمان.

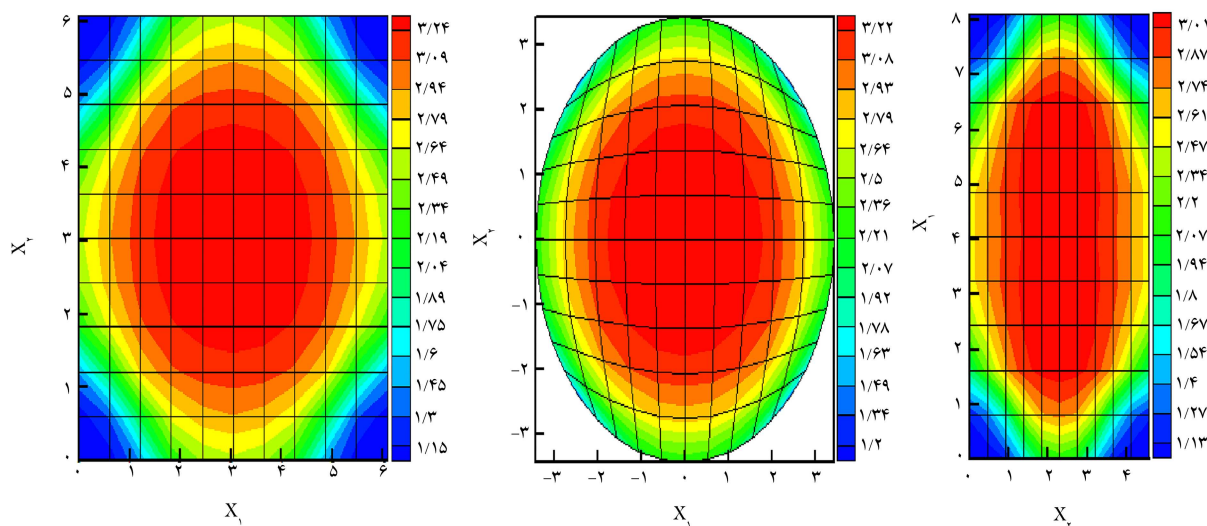


شکل ۶. توزیع مؤلفه‌ی جابه‌جایی u_2 برای حالت تغییر شکل یافته‌ی پوست به ترتیب برای سطح مقطع مربعی، دایره‌ای و مستطیلی (با نسبت منظر ۹/۱۶) در زمان‌های مختلف.

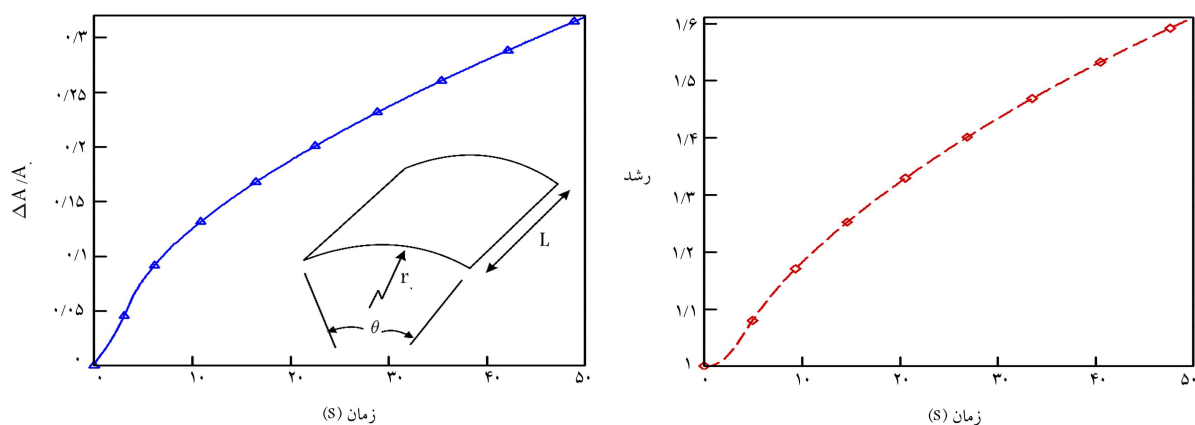
در نظر گرفته می‌شود. تمامی لبه‌های قطاع ثابت فرض می‌شوند. فرایند بارگذاری بدین گونه است که پوست در بازه زمانی $0 < t < 4S$ تحت فشار قرار می‌گیرد، به گونه‌ی که مقدار آن از صفر شروع شده و با افزایش به صورت خطی به مقدار بیشینه‌ی $p = 0.00035$ می‌رسد. سپس فشار بیشینه‌ی $p = 0.00035$ در بازه‌ی $4 < t < 50S$ ثابت نگه داشته می‌شود تا به پوست اجازه‌ی رشد داده شود. از مدل نئوهوکن تراکم‌پذیر برای مدل‌سازی استفاده می‌شود. تمامی خواص مادی و

۲.۵. رشد پوست به صورت قطاع استوانه‌ای

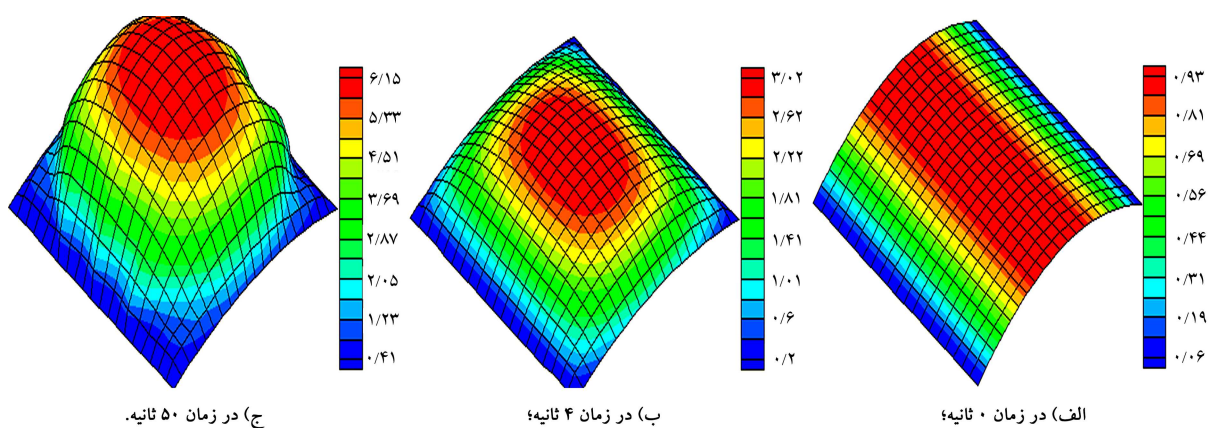
در این مثال، رشد پوست به صورت غشایی با انحنای اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد. به دلیل این که پوست در تمامی سطح بدن دارای انحناست، لذا در نظر گرفتن انحنای اولیه تعبیر درست‌تری از فیزیک مسئله به دست خواهد داد. یک قطاع استوانه‌ای با شعاع $r_0 = 50$ و طول $L = 20$ سانتی‌متر و زاویه‌ی $\theta = 4^\circ$ رادیان



شکل ۷. توزیع نسبت جرمی dm/dM به ترتیب از چپ به راست برای پوست با سطح مقطع مربعی، دایره‌ای و مستطیلی (با نسبت منظر ۹/۱۶) در زمان ۵۰ ثانیه.



شکل ۸. نمودار بیشینه میزان پارامتر رشد پوست برحسب زمان.



شکل ۹. توزیع مؤلفه‌ی x_2 برای حالت تغییر شکل یافته‌ی پوست به صورت قطاع استوانه‌یی.

هموارتری حاصل شود. نمودار متغیر رشد Δ^g برحسب زمان در شکل ۸ الف نشان داده شده است. همچنین، شکل ۸ ب منحنی تغییرات زمانی $\Delta A/A_0$ را نمایش می‌دهد. شکل‌های مربوط به تغییر شکل پوست در زمان‌های مختلف در شکل ۹ نشان داده شده است.

پارامترهای مربوط به رشد مانند مسئله‌ی قبل در نظر گرفته می‌شود. به دلیل تقارن، تنها یک چهارم مقطع مدل می‌شود. تحلیل همگرایی نشان می‌دهد که یک مش بندی با $8 \times 8 = 64$ المان برای دست یافتن به منحنی همگرایی می‌کند. با این وجود، یک مش بندی با $100 = 10 \times 10$ المان در نظر گرفته می‌شود که منحنی‌های

۶. نتیجه گیری

بسیار نزدیک به مقادیر متناظر گزارش شده در مطالعات پیشین هستند. از دیدگاه محاسباتی، از آنجا که در فرمول بندی حاضر المان دوبعدی غشا (با ۱۲ درجه آزادی در المان ۴ ضلعی) جایگزین المان های سه بعدی (با ۲۴ درجه آزادی در المان ۸ گرهی) شده است، مدل کنونی به مراتب ساده تر از تحقیقات پیشین بوده و حجم محاسبات را به میزان قابل توجهی کاهش می دهد. به عبارت دیگر، تعداد المان ها در تحقیق حاضر کم تر از ۱/۵ درصد تعداد المان های در نظر گرفته شده در تحقیقات مشابه است. همچنین توزیع نسبت جرم کنونی به جرم اولیه نیز مورد بررسی قرار گرفت و ملاحظه شد که در اثر رشد پوست و نفوذ جرم جدید به داخل آن، جرم جدید در مثال های بررسی شده بیش از ۳ برابر جرم اولیه خواهد شد. برای پوست با سطح مقطع مستطیلی، سطح حاصل از رشد بر اساس فرمول بندی ارائه شده در این مقاله با نتایج بالینی گزارش شده در مرجع [۲۵] مقایسه شد و مطابقت خوبی بین نتایج کنونی و نتایج مرجع مذکور حاصل شد. همچنین، مسئله ی رشد برای سطح دارای انحنای اولیه نیز مورد بررسی قرار گرفت و بر اساس بارگذاری صورت گرفته، بیش از ۳۰ درصد رشد در مساحت پوست حاصل شد.

در این مقاله، پدیده ی رشد در پوست تحت اعمال بار مکانیکی مورد بررسی قرار گرفت. به عنوان نقطه ی تمایز این تحقیق از تحقیقات مشابه، پوست به صورت یک غشای هایپرلاستیک مدل سازی شد. فرمول بندی لازم برای ترکیب رشد و تغییر شکل مکانیکی ارائه شد و رشد پوست توسط یک کمیت اسکالر به همراه یک معادله ی تکاملی مناسب در محاسبات مد نظر قرار گرفت. سپس یک فرمول بندی المان محدود در شکل لاگرانژی کامل توسعه داده شد. جهت اعتبارسنجی، مدل سازی رشد پوست تحت اعمال فشار بازای هندسه های مختلف در دو حالت، یعنی غشای اولیه ی تخت (بدون انحنای) و نیز غشای دارای انحنای اولیه صورت گرفت. نتایج حاصل نشان می دهد که مدل غشای ارائه شده برای رشد پوست به خوبی با نتایج مطالعات پیشین مطابقت می کند. به ویژه آن که منحنی های مقدار رشد سطحی پوست بسیار نزدیک به منحنی های موجود در مطالعات پیشین هستند. همچنین مقدار نهایی متغیر رشد در مدل سازی کنونی برای سطح مقطع های مربعی و دایره یی

پانویس ها

1. skin flap
2. expanders
3. saline solution
4. crescent shape
5. relaxation
6. reconstructive surgery
7. pure shear
8. Ogden strain energy
9. transversely isotropic
10. neo-Hookean
11. tissue necrosis
12. Cartesian coordinate system
13. orthonormal
14. midsurface
15. curvilinear coordinate system
16. covariant basis vectors
17. stretch
18. deformation gradient tensor
19. invariant
20. Green-Saint Venant strain tensor
21. Kronecker delta
22. multiplicative decomposition
23. area stretch
24. Nanson's formula
25. evolution equation
26. weighting function
27. growth criterion
28. adaptation speed
29. second Piola-Kirchhoff stress tensor
30. double contraction
31. Young's modulus
32. Poisson's ratio
33. finite difference
34. Euler backward differentiation
35. iterative
36. residual

37. update
38. Total Lagrangian
39. discretized geometry
40. isoparametric
41. assembly operator
42. increment
43. assembly of elements
44. Cholesky factorization method
45. Conjugate gradients method

منابع (References)

1. Albanna, M.Z. and Holmes, J.H. *Skin Tissue Engineering and Regenerative Medicine*, Academic Press, pp.1-17 (2016).
2. Beauchenne, J.G., Chambers, M.M., Peterson, A.E. and et al. "Biochemical, biomechanical, and physical changes in the skin in an experimental animal model of the therapeutic tissue expansion", *Journal of Surgical Research*, **47**, pp. 507-514 (1989).
3. Tepole, A.B., Ploch, C.J., Wong, J. and et al. "Growing skin: A computational model for skin expansion in reconstructive surgery", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, bf 59, pp. 2177-2190 (2011).
4. Tepole, A.B., Gosain, A.K. and Kuhl, E. "Stretching skin: The physiological limit and beyond", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **47**, pp. 938-949 (2012).
5. Neumann, C.G. "The expansion of an area of skin by progressive distension of a subcutaneous balloon; use of the method for securing skin for subtotal reconstruction of the ear", *Plastic and Reconstructive Surgery*, **19**, pp. 124-130 (1957).

6. Agrawal, K. and Agrawal, S. "Tissue regeneration during tissue expansion and choosing an expander", *Indian Journal of Plastic Surgery*, **45**, pp. 7-15 (2012).
7. Hollestein, M., Ehert, A.E., Itskov, M. and et al. "A novel experimental procedure based on pure shear testing of dermatome-cut samples applied to porcine skin", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **10**, pp. 651-661 (2011).
8. Zhao, Y., Feng, B., Lee, J. and et al. "A multi-layered computational model for wrinkling of human skin predicts aging effects", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **103**, 103552 (2019).
9. Tonge, T.K., Altan, L.S., Voo, L.M. and et al. "Full-field bulge test for planar anisotropic tissues: Part I- experimental methods applied to human skin tissue", *Acta Biomaterialia*, **9**, pp. 5913-5925 (2013).
10. Smalls, L.K., Wickett, R. and Visscher, M.O. "Effect of dermal thickness, tissue composition, and body site on skin biomechanical properties". *Journal of Skin Research and Technology*, **12**, pp. 43-49 (2006).
11. Pailler-Mattei, C., Laquieze, L., Debret, R. and et al. "Rheological behavior of reconstructed skin", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **37**, pp. 251-263 (2014).
12. Sajadi, B., Saidi, M.H. and Ahmadi, G. "Numerical evaluation of the operating room ventilation performance: Ultra-Clean Ventilation (UCV) systems", *Scientica Iranica B*, **26**, pp. 2394-2406 (2019).
13. Sajadi, B., Saidi, M.H. and Ahmadi, G. "Computer modeling of the operating room ventilation performance in connection with surgical site infection", *Scientica Iranica B*, **27**, pp. 704-714 (2020).
14. Kumaraswamy, N., Khatam, H., Reece, G.P. and et al. "Mechanical response of human female breast skin under uniaxial stretching", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **74**, pp. 164-175 (2017).
15. Barbarino, G.G., Jabareen, M. and Mazza, E. "Experimental and numerical study on the mechanical behavior of the superficial layers of the face", *Journal of Skin Research and Technology*, **17**, pp. 434-444 (2011).
16. Afsar Kazerooni, N., Srinivasa, A.R. and Criscione, J.C. "A multinet network inelastic model for the hysteretic response during cyclic loading of pig and rat skin", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **126**, 103555 (2020).
17. Jobanputra, R.D., Boyle, C.J., Dini, D. and et al "Modelling the effects of age-related morphological and mechanical skin changes on the stimulation of tactile mechanoreceptors", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **112**, 104073 (2020).
18. Flynn, C., Taberner, A. and Nielsen, P. "Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D force-sensitive micro-robot and finite element analysis", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **10**, pp. 27-38 (2011).
19. Groves, R.B., Coulman, S.A., Birchall, J.C. and et al. "An anisotropic, hyperelastic model for skin: experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin", *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **18**, pp. 167-180 (2013).
20. Pamplona, D.C., Velloso, R.Q. and Radwanski, H.N. "On skin expansion", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **29**, pp. 655-662 (2014).
21. Delfino, A., Stergiopoulos, N., Moore, J.E. and et al. "Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation", *Journal of Biomechanics*, **30**, pp. 777-786 (1997).
22. Rémache, D., Caliez, M., Gratton, M. and et al. "The effects of cyclic tensile and stress-relaxation tests on porcine skin", *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **77**, pp. 242-249 (2018).
23. Socci, L., Rennati, G., Gervaso, F. AND ET AL. "An axisymmetric computational model of skin expansion and growth", *Journal of Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **6**, pp. 177-188 (2007).
24. Zollner, A.M., Tepole, A.B. and Kuhl, E. "On the biomechanics and mechanobiology of growing skin", *Journal of Theoretical Biology*, **297**, pp. 166-175 (2012).
25. Zollner, A.M., Tepole, A.B., Gosain, A.K. and et al. "Growing skin: tissue expansion in pediatric forehead reconstruction", *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **11**, pp. 855-867 (2012).
26. Tepole, A.B., Gosain, A.K. and Kuhl, E. "Computational modeling of skin: Using stress profiles as predictor for tissue necrosis in reconstructive surgery", *Computers & Structures*, **143**, pp.32-39 (2014).
27. Holzapfel, G.A., Gasser, T.C. and Ogden, R.W. "A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models", *Journal of Elasticity*, **61**, pp. 1-48 (2000).
28. Holzapfel, G.A. *Nonlinear Solid Mechanics*, Wiley- Lane, pp.55-108(2000).
29. Rodriguez, E.K., Hoger, A. and McCulloch, A.D., "Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues", *Journal of Biomechanics*, **27**, 455-467 (1994).
30. Lubarda, A. and Hoger, A. "On the mechanics of solids with a growing mass", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 4627-4664 (2002).
31. Ogden, R.W. *Nonlinear Elastic Deformations*, Ellis Horwood (1984).
32. Wriggers, P. *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag, pp.103-148 (2008).
33. Joodaki, H. and Panzer, M. B. "Skin mechanical properties and modeling: A review", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, **232**, pp. 323-343 (2018).
34. Lynch B., Pagoon, H., Le Blay H. and et al. "A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis", *Scientific Reports*, **12**, pp. 849, (2022).
35. van Rappard, J.H.A., Molenaar, J., van Doorn, K. and et al. "Surface-area increase in tissue expansion", *Plastic and Reconstructive Surgery*, **82**, pp. 833-839 (1988).