

بهینه سازی معادله‌ی کلبروک - وایت بر اساس داده‌های تجربی

سعید دریایی (کارشناس ارشد)

محمد اعلایی* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۴۰۱)
دوری ۳-۲، شماره ۲، ص. ۵۴-۴۷، (پژوهشی)

اصطکاک در توزیع سرعت، تنش برشی، لایه‌ی مرزی، افت انرژی و فرسایش نقش مهمی دارد. درافت فشار ضریب اصطکاک رابطه‌ی مستقیم با عدد رینولدز در جریان‌های آرام، توربولانسی و انتقالی از آرام به توربولانسی دارد. به دلیل کاربردهای گسترده‌ی آن، محاسبه‌ی دقیق روابط حاکم بر ضریب اصطکاک دارای اهمیت بسیار زیادی است. تلاش‌های فراوانی برای بهبود معروف‌ترین معادله‌ی ضریب اصطکاک یعنی معادله‌ی کلبروک در قرن گذشته و از دهه‌ی ۱۹۳۰ میلادی صورت پذیرفت، اما تطابق کاملی با داده‌های تجربی حاصل نشد. هدف این تحقیق بهبود معادله‌ی کلبروک و ارائه‌ی معادله‌ی با دقت بیشتر در نواحی رینولدزی گسترده‌تر و انطباق آن با داده‌های تجربی و آزمایشگاهی است و تلاش شده است تا با کم‌ترین تغییر در معادله‌ی کلبروک و بیشترین دقت با داده‌های تجربی محاسبات انجام شود. روش مورد استفاده در این تحقیق، بررسی خطا در روابط مختلف در تمامی نواحی رینولدزی است. در ۶۳/۵٪ از بازه‌های رینولدزی، معادله‌ی تحقیق از آخرین معادلات ارائه شده دقت بیشتری دارد.

واژگان کلیدی: ضریب اصطکاک، معادله‌ی کلبروک، عدد رینولدز، نمودار مودی.

۱. مقدمه

خود به دست آورده بود معادله‌ی دقیق‌تر ارائه کرد.^[۵] اما تمامی معادله‌های ارائه شده برای لوله‌هایی کاربرد داشتند که در آنها از زبری سطح لوله صرف نظر شده بود. ون‌کارمن (۱۹۳۳) بار دیگر با همان داده‌هایی که نیکورادزه به دست آورده بود، برای لوله‌هایی با زبری مختلف، معادله‌ی پیشنهاد داد که در آن نسبت زبری با نمایه $\frac{e}{D}$ نشان داده شد. کلبروک و وایت^[۶] (۱۹۳۷) هم نشان دادند که برای نسبت‌های زبری مختلف می‌توان معادله‌ی دقیق‌تری محاسبه کرد.^[۶]

مودی^[۷] (۱۹۴۴) معادله‌ی محاسبه شده را به صورت نمودار ترسیم کرد.^[۷] در این نمودار، خطوط با نسبت‌های زبری مختلف و در رینولدزهای مشخص ترسیم شده‌اند. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت زبری در رینولدزهای پایین، ضریب اصطکاک بزرگ‌تر است، ولی وایت (۱۹۴۴) بر اساس تجربیات شخصی خود دریافت که تعیین زبری یک لوله، کاری بسیار دشوار و طاقت‌فرسا است. وی نشان داد که نمودار مودی در حالت کلی تنها تا ۱۵٪ قابل اعتماد است. با این حال امروزه بعد از قریب به ۷۰ سال هنوز به این معادله و نمودار رجوع می‌شود.^[۸]

در دهه‌های گذشته چندین تقریب برای معادله‌ی کلبروک و وایت پیشنهاد شده است و هنوز هم ارائه‌ی معادلات جدید ادامه دارد. از رویکردهای جدید می‌توان انتظار داشت که هزینه‌های محاسباتی کم‌تری تحمیل شود. میانگین تقریبی دقت با بیشترین خطای نسبی کم‌تر از ۲/۵٪ توسط چندین

در گذشته تجزیه و تحلیل جریان در داخل لوله‌های رسوب گرفته، اندازه‌گیری میزان اصطکاک و محاسبات مربوط به لوله‌های دایره‌ای و غیردایره‌ای و همچنین شناخت نوع جریانی که درون لوله‌ها به وجود می‌آید، از اهمیت بسیاری در بین مهندسان برخوردار بود.^[۱] آبی که به وسیله‌ی خطوط لوله انتقال می‌یابد و حتی خونی که در بدن ما در جریان است همگی به دلیل اصطکاک دچار افت فشار می‌شوند. امروزه گسترش فزاینده‌ی خطوط و شبکه‌های جریان سیالات اهمیت شناخت مسائل مرتبط با این موضوع را بیشتر آشکار می‌سازد. ژولیوس ویزباخ^[۱] در سال ۱۸۴۵ ارتباطی بین سرعت، ثابت ویزباخ، قطر و طول لوله یافت. از آن پس بسیاری تلاش کردند که ثابت ویزباخ را محاسبه کنند.^[۲] ویلیام داریسی^[۲] (۱۸۷۵) همگام با ویزباخ مطالعاتی در این خصوص انجام داد و به لطف نتایجی که رینولدز^[۳] به دست آورده بود موفق به محاسبه‌ی ضریب اصطکاک یا همان ثابت ویزباخ شد^[۳] که برای جریان‌های آرام تا رینولدز $10^3 \times 2$ قابل ارجاع و مسبب پیشرفت‌های خوبی بود. پس از آن بلازیوس^[۴] (۱۹۱۳) برای لوله‌های صیقلی (بدون زبری) برای رینولدز $10^3 \times 4$ تا $10^4 \times 8$ معادله‌ی ارائه کرد.^[۴]

در نهایت ون‌کارمن^[۵] (۱۹۳۰) با داده‌هایی که نیکورادزه^[۶] از آزمایش‌های

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۲۹، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۴۰۰/۱۲/۲۱.

DOI:10.24200/J40.2022.58681.1611

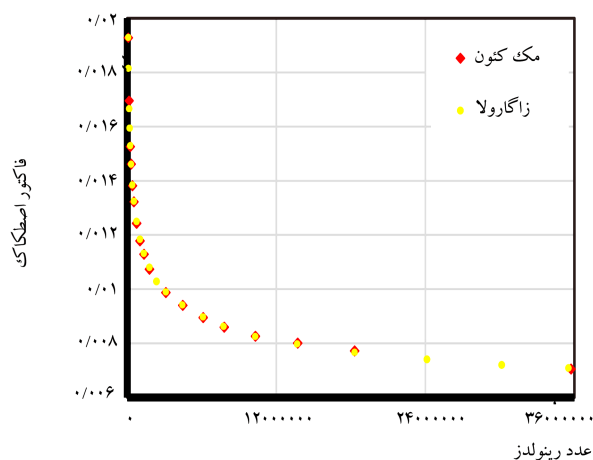
محقق پیشنهاد شده است که معروف‌ترین آنها معادلات چرچیل^۹ (۱۹۷۳)، سوامی و جین^{۱۰} (۱۹۷۶)، هالند^{۱۱} (۱۹۸۳)، شیخ^{۱۲} (۲۰۱۵)، آفر - آلابی^{۱۳} (۲۰۱۶)، وطنخواه^{۱۴} (۲۰۱۸) و عزیزی و همکاران^{۱۵} (۲۰۱۸) است. به هرحال تلاش برای ارائه‌ی یک راه حل ساده و کامل برای ضریب اصطکاک از اهمیت عملی برخوردار خواهد بود. معادله‌ی آفر - آلابی برای عامل اصطکاک بر دقت و کارایی محاسباتی تمرکز می‌کند. وطنخواه و عزیزی نیز راه حل‌های تحلیلی برای معادله‌ی کلیبروک را با کمترین تعداد لگاریتم‌های طبیعی و توان‌های غیرصحیح^{۱۶} (با هزینه محاسباتی کمتر) پیشنهاد کردند.^۹ اما بر اساس تجزیه و تحلیل مقایسه‌ی انجام شده در بین ۴۲ معادله‌ی صریح مختلف ارائه شده برای برآورد ضریب اصطکاک کلیبروک، راه حل نیازکار^{۱۷} (۲۰۱۹) دقیق‌ترین معادله است.

۲. مشاهدات آزمایشگاهی

داده‌هایی که در این تحقیق از آنها بهره گرفته شده‌اند مربوط به نتایج دو آزمایش مستقلی است که به دروش در دانشگاه پرینستون^{۱۸} به کوشش زاگارولا - مک‌کنون - اسمیت و دانلی^{۱۹} در $Re(3/554 \times 10^4)$ و مک‌کنون - لی - ژیانگ - موریسون و اسمیت^{۲۰} در $Re(3/5724 \times 10^4)$ و $7/4345 \times 10^4$ انجام شده است. هر دو داده در شکل ۱ رسم و با یکدیگر مقایسه شده است. در دانشگاه ارگان^{۲۱} نیز آزمایش مشابهی توسط سوانسون^{۲۲} در محدوده‌ی رینولدز ۱۱ تا $10^6 \times 1/5$ و با به‌کارگیری ابزار دقیق در لوله‌ی صیقلی و جریان آرام انجام شد. شریط آزمایش و هندسه‌ی هر دو لوله چنین بود:

لوله پرینستون ۲۵ تَن وزن داشت و با هوای فشرده پر شده بود و در لوله‌های ارگان با دماهای متفاوت برای رینولدزهای پایین مخلوطی از گازهای هلیوم، نیتروژن، دی‌اکسید کربن، اکسیژن و هگزاfluorاید سولفور در نظر گرفته شده بود و برای رینولدزهای بالا نیز از هلیوم مایع استفاده شده بود. لوله‌ها وزنی در حدود یک انس داشتند.^{۱۱۱}

قطر لوله‌های صیقلی برابر ۶۴/۶۸ میلی‌متر و ضخامت زبری آنها ۰/۱۵ میکرومتر بود (در این تحقیق برای مقایسه‌ی میزان دقت و همخوانی روابط از مقادیر لوله‌ی صیقلی استفاده شده است)، لوله‌های زبر نیز قطری برابر ۶۴/۹۲ میلی‌متر و ضخامت زبری ۵ میکرومتر داشتند.^{۱۲۲}



شکل ۱. مقایسه‌ی داده‌های مرجع.

۳. معرفی و تحلیل معادلات مختلف

نیکورادزه (۳-۱۹۳۲) آزمایش معروف خود را با شش لوله‌ی محتوای آب و با مقادیر مختلف زبری (ایجاد زبری با استفاده از دانه‌های شن و ماسه) انجام داد. انتقال جریان در آن آزمایش از آرام به مغشوش انجام شد.^{۱۲۳}

جوزف و یانگ^{۲۳} با داده‌های نیکورادزه نشان دادند که عدد رینولدز و ضریب اصطکاک در جریان توربالانسی در لوله‌ی صیقلی با داده‌های جریان آرام در لوله‌ی زبر همخوانی دارد.^{۱۲۴} کلیبروک و مودی (۱۹۳۷) بر روی نتایج نیکورادزه در ناحیه‌ی انتقال جریان از آرام به مغشوش در لوله‌های صیقلی و زبر مطالعات بسیاری انجام دادند و از نتایج به دست آمده، معادله‌های ریاضی و نمودارهای مرتبط با آن را ترسیم کردند. تا به امروز بسیاری از دانشمندان و ریاضی‌دانان نیز سعی در بهبود معادله‌ی آنها دارند.^{۱۲۵}

معادله‌های ۱ تا ۴ در محدوده‌های رینولدزی مشخص با دقتی بسیار زیاد و قابل قبول برای داده‌های به دست آمده از زاگارولا در ذیل ارائه شده است.^{۱۲۶}

از دهه‌ی ۷۰ و ۸۰ میلادی با استفاده از رایانه‌های پیشرفته، حل معادلات با روش صریح^{۲۴} امکان‌پذیر شد. حل‌های دشوار و پیچیده^{۱۲۷،۱۲۸} و حتی با دقت بالا^{۱۲۹،۱۳۰} نیز به راحتی امکان‌پذیرند. علی‌رغم فراوانی و تعدد معادله‌های ریاضی برای محاسبه‌ی ضریب اصطکاک، تعداد محدود و پراکندگی که در علوم مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند در معادلات ۵ تا ۱۶ نشان شده است.^{۱۳۱} دقت برخی از آن معادلات در محدوده‌های رینولدزی مختلف در مرجع^{۱۳۰} ذکر شده است.

ضریب اصطکاک و محدوده رینولدز (مطابق با زاگارولا):

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{Re} < 2300 \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \times 10^{-16} \times Re^2 \quad 2900 < Re < 3050 \quad (2)$$

$$\lambda = 0.351 \times Re^{-0.255} \quad 3050 < Re < 240000 \quad (3)$$

$$\lambda = 0.118 \times Re^{-0.165} \quad 240000 < Re \quad (4)$$

نمونه‌یی از روابط کاربردی:

کلیبروک (۱۹۳۷)

$$\lambda = \frac{0.25}{\log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)} \quad (5)$$

یک (۱۹۶۳)

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.715D} + \frac{15}{Re} \right) \quad (6)$$

بار (۱۹۷۱)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{5.51}{Re^{0.892}} \right) \quad (7)$$

چرچیل (۱۹۷۳)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.715D} + \left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} \right) \quad (8)$$

جین (۱۹۷۶)

$$10^{-6} \langle \text{Re} \rangle^{10^{-2}} \text{ و } 5 \times 10^3 \langle \text{Re} \rangle^{10^8} \quad (17)$$

معادله‌ی کلیبروک یک رابطه‌ی ضمنی^{۲۵} است که نیاز به یک حل عددی تقریبی یا یک راه حل تحلیلی دقیق برای تخمین عامل اصطکاک دارد. میکاتا ووالچاک^{۲۶} (۲۰۱۷) پیشنهاد وجود سه نوع راه حل برای معادله‌ی کلیبروک را ارائه کردند. راه حل‌های نسل اول مطابق تقریب‌ها و براساس تنظیم منحنی‌ها با داده‌های به دست آمده از معادله‌ی کلیبروک است. راه حل‌های نسل دوم مطابق با راه حل‌های ارائه شده توسط برکیچ^{۲۷} (۲۰۱۱) بر اساس تابع دبلویو لامبرت^{۲۸}، راه حل بوید^{۲۹} (۲۰۱۷) با استفاده از تابع جابه‌جایی، راه حل بری و همکاران^{۳۰} (۲۰۰۰) و در نهایت راه حل پیشنهادی وینتسکی^{۳۱} (۲۰۰۳) ارائه می‌شود. راه حل‌های نسل سوم با تخمین و بر اساس راه حل‌های تحلیلی دقیق با معادله‌ی کلیبروک مطابقت دارد.^[۳۲]

همه‌ی معادله‌های ارائه شده و مورد استفاده فقط در یک بازه خاص، از دقت یا از خطای کم‌تری برخوردارند. بنابراین ارائه‌ی معادله‌ی که بازه رینولدزی بیشتری را پوشش دهد کاربرد فراوان‌تری خواهد داشت. در این تحقیق سعی شده است که همه‌ی نواحی رینولدزی که امکان بیشترین خطا در آنها وجود دارند، مخصوصاً در نواحی رینولدزی بالا و محدوده‌هایی که کاربردی‌ترند، مشخص شوند و معادله در آن قسمت‌ها تصحیح شود.

به کمک نرم‌افزار مهندسی گراف^{۳۲} (برنامه‌ی متن باز^{۳۳} است که از آن برای ترسیم نمودارهای ریاضی و استخراج توابع در سیستم مختصات استفاده می‌شود و همچنین امکان انجام برخی محاسبات ریاضی روی توابع را نیز فراهم می‌کند) داده‌های مرجع با روش نسل اول به صورت نمودار ترسیم شدند. برای استخراج معادله‌ی که انطباق بیشتری با داده‌ها داشته باشد، ضروری است با استفاده از شناخت نقاط شکست و خطا در معادلات گذشته و تأثیر ضرایب عددی و توانی در معادلات لگاریتمی، معادله‌ی دقیق‌تری ارائه شود. بدین منظور برای جایگزینی با معادله‌ی وطنخواه (۲۰۱۸)، عزیزی (۲۰۱۸) و نیازکار (۲۰۱۹) آخرین معادله‌ی دقیق حاضر، یعنی معادله‌ی ۱۸ برای برخی از نواحی رینولدزی ارائه می‌شود.

$$\lambda = \left(\frac{1,325}{\left[\text{Ln} \left(\frac{\varepsilon}{4,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right]^2} \right) + 0,000234 \quad (18)$$

$$4 \times 10^3 \langle \text{Re} \rangle^3 \times 10^7 \text{ و } 10^{-6} \langle \varepsilon/D \rangle^{0,05} \quad (18)$$

۵. نتایج و بحث

میزان انطباق معادله‌ی تحقیق حاضر با هر سه داده‌ی آزمایشگاهی پرینستون (زاگرولا - مک‌کئون - اسمیت و دانلی)، (مک‌کئون - لی - ژانگ - موریسون و اسمیت) و دانشگاه ارگان (سوانسون) و همچنین مقدار دقت آن با معادله‌ی کلیبروک در محدوده‌های مختلف رینولدزی به کمک تحلیل نموداری مقایسه و بررسی می‌شود.

در شکل ۲ کلیه معادلات مرجع مطرح شده در این تحقیق از جمله معادله‌ی نیازکار که آخرین معادله‌ی پیشنهادی دقیق است، با داده‌های آزمایشگاهی از $3,113 \times 10^4 \langle \text{Re} \rangle^{3,554} \times 10^7$ تماماً مقایسه و ترسیم شده‌اند. به‌طور مشخص

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,715D} + \left(\frac{6,943}{\text{Re}} \right)^{0,9} \right)^{[25]} \quad (9)$$

سووامی (۱۹۷۶)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right)^{[26]} \quad (10)$$

هالند (۱۹۸۳)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{\text{Re}} \right)^{[27]} \quad (11)$$

شیخ (۲۰۱۵)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,25 \times \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{\left[1,14 - 2 \log \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) - 2 \text{Re} \right]} \right) \right]^{[28]} \quad (12)$$

آفر - آلایی (۲۰۱۶)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3,715D} - \frac{1,975}{\text{Re}} \left[\text{Ln} \left(\left(\frac{\varepsilon}{3,93D} \right)^{1,092} + \frac{7,627}{\text{Re} + 395,9} \right) \right] \right\}^{[29]} \quad (13)$$

وطنخواه (۲۰۱۸)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,8686 \text{Ln} \left(\frac{0,3984 \text{Re}}{\left(S - 0,645 \right)^{0,8686 S} / S + 0,39} \right) \quad (14)$$

$$S = 0,12363 \text{Re} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + \text{Ln} (0,3984 \text{Re})^{[30]}$$

عزیزی (۲۰۱۸)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,805 \log \left(\left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{1,108} + \left(\frac{5,164}{\text{Re}^{0,966}} \right) \right)^{[31]} \quad (15)$$

نیازکار (۲۰۱۹)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A}$$

$$A = -2 \log \left(\frac{\frac{D}{\varepsilon}}{3,7} + \frac{7,5527}{\text{Re}^{1,8787}} \right)$$

$$B = -2 \log \left(\frac{\frac{D}{\varepsilon}}{3,7} + \frac{7,551A}{\text{Re}} \right)$$

$$C = -2 \log \left(\frac{\frac{D}{\varepsilon}}{3,7} + \frac{7,551B}{\text{Re}} \right)^{[A]} \quad (16)$$

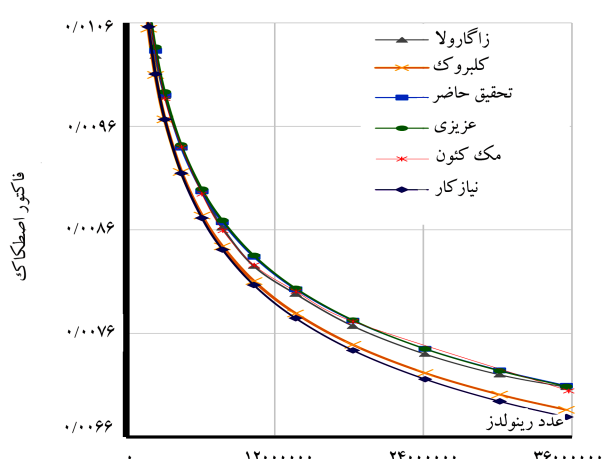
۴. بهبود معادله

معادله‌ی ۱۷ شکل صریح معادله‌ی کلیبروک - وایت، رایج‌ترین معادله برای محاسبه‌ی مقدار λ را نشان می‌دهد.^[۳۲]

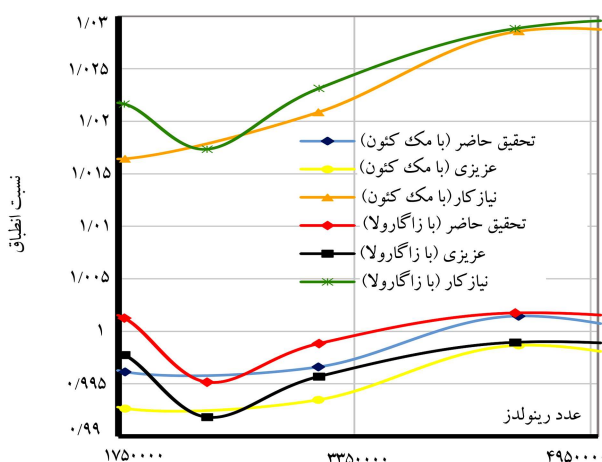
$$\lambda = \frac{1,325}{\left[\text{Ln} \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right]^2}$$



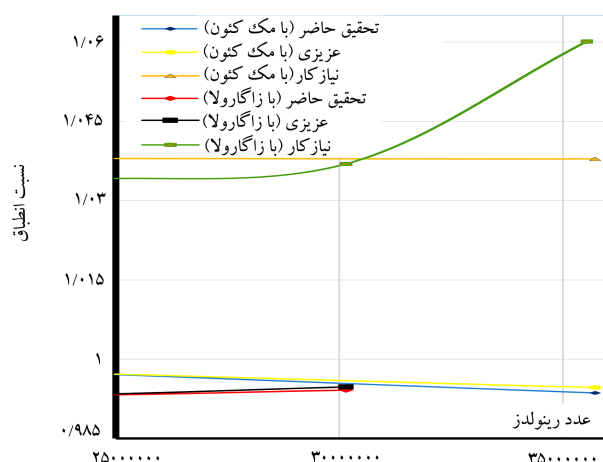
شکل ۴. معادله‌ی عزیز و تحقیق حاضر در $(2.5 \times 10^6 \text{Re})$.



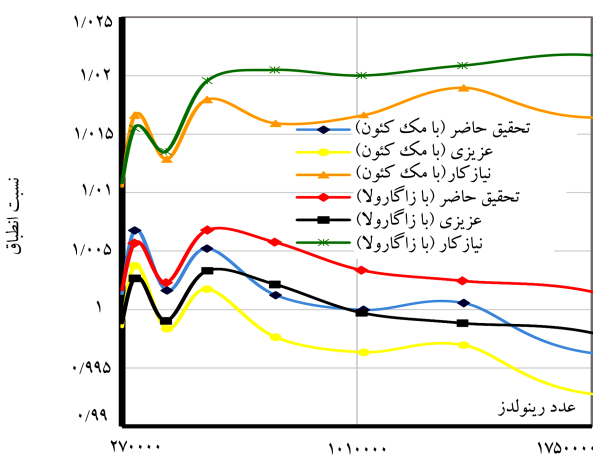
شکل ۵. معادله‌ی کپروک، تحقیق حاضر و عزیز با داده‌های تجربی.



شکل ۶. معادله‌ی عزیز و تحقیق حاضر در $(5 \times 10^6 \text{Re})$.



شکل ۷. معادله‌ی عزیز و تحقیق حاضر در $(3.554 \times 10^7 \text{Re})$.



شکل ۸. معادله‌ی عزیز و تحقیق حاضر در $(1.75 \times 10^6 \text{Re})$.

معادله‌ی ارائه شده در تحقیق حاضر از دقت بالاتری برخوردار است، اما با توجه به همخوانی و انطباق بسیار زیاد معادله‌ی تحقیق حاضر، عزیز و نیازکار با داده‌های آزمایشگاهی لازم است در بازه‌های رینولدزی مختلف میزان دقت هر معادله به طور مجزا مورد بررسی قرار گیرد.

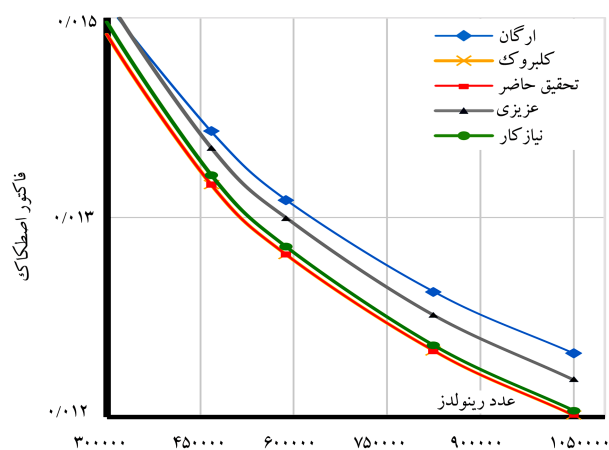
در شکل ۳ و در محدوده‌ی $(3.554 \times 10^7 \text{Re})$ معادله‌ی تحقیق حاضر با داده‌های زاگارولا و مک‌کتون همخوانی و تطابق کم‌تری نسبت به معادله‌ی عزیز دارد. اما در محدوده‌ی رینولدزی $(3.554 \times 10^7 \text{Re})$ فقط در بازه $(2.7 \times 10^5 \text{Re})$ است که همخوانی درست و دقیقی ارائه نمی‌دهد ولی در سایر نواحی از معادله‌ی نیازکار دقت و تطابق بیشتری نشان می‌دهد.

در شکل‌های ۴ و ۵ نتایج حاصله در محدوده‌ی $(2.5 \times 10^6 \text{Re})$ نشان می‌دهد که داده‌های زاگارولا و مک‌کتون همخوانی و تطابق بیشتری با معادله‌ی تحقیق حاضر نسبت به معادله‌ی عزیز و نیازکار دارد.

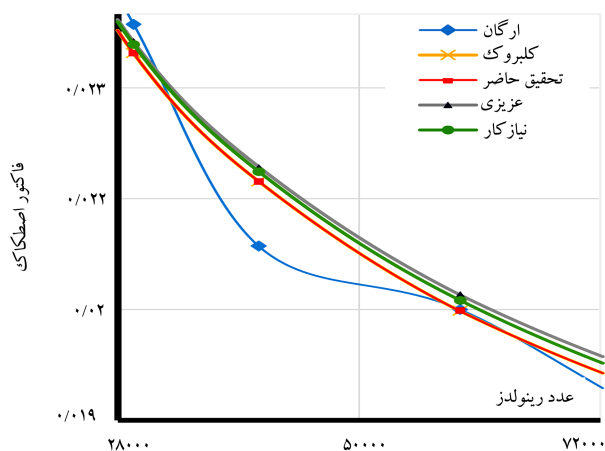
در شکل‌های ۶ و ۷ نتیجه و همخوانی مشخصی با بررسی نمودارهای ترسیم شده در محدوده‌ی رینولدزی $(1.75 \times 10^6 \text{Re})$ حاصل نمی‌شود، به عبارت دیگر معادله‌ی تحقیق حاضر در $(1.75 \times 10^6 \text{Re})$ با داده‌های مک‌کتون در $(2.7 \times 10^5 \text{Re})$ و با داده‌های زاگارولا تطابق بیشتری دارند. بنابراین در این تحقیق برای بررسی دقیق‌تر در محدوده‌ی

$(1.05 \times 10^6 \text{Re})$ از داده‌های ارگان استفاده می‌شود. در شکل ۸ با بررسی داده‌های زاگارولا و مک‌کتون در محدوده‌ی $(1.75 \times 10^7 \text{Re})$ دقت معادله‌ی تحقیق حاضر، به معادله‌های نیازکار و عزیز نشان داده می‌شود.

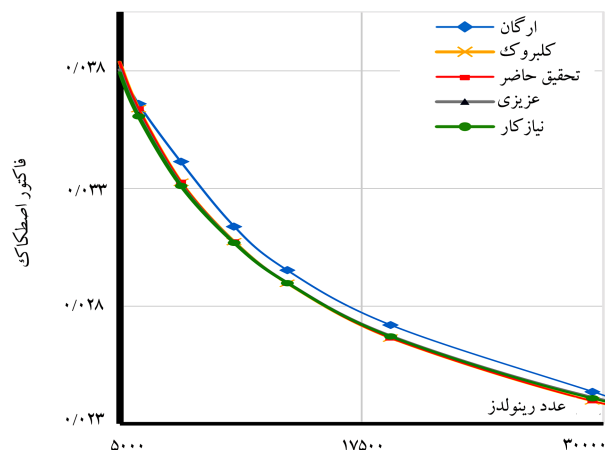
چنان که در شکل ۹ نشان داده شده، داده‌های ارگان در محدوده‌ی 7.2×10^7



شکل ۱۰. میزان دقت نسبت به زاگارولا ($Re(2.4 \times 10^7)$) در (1.7×10^6) .



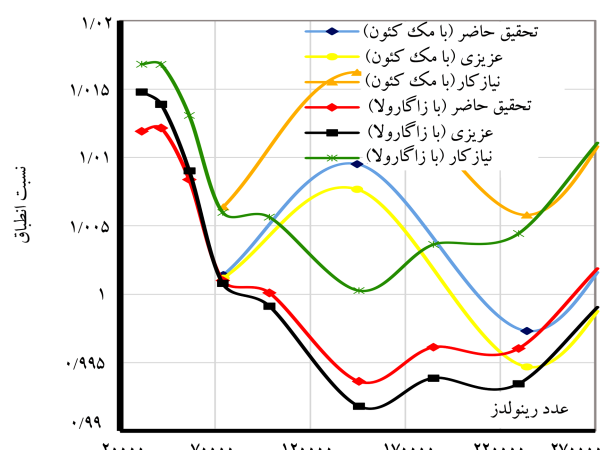
شکل ۱۱. میزان دقت نسبت به زاگارولا ($Re(7.2 \times 10^4)$) در (2.8×10^4) .



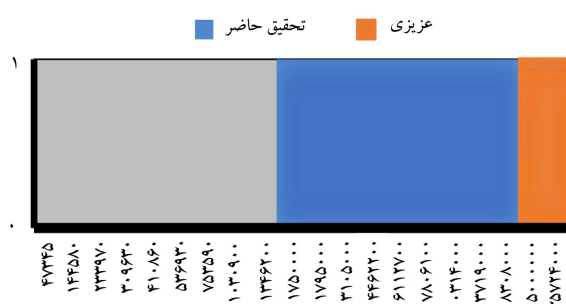
شکل ۱۲. میزان دقت نسبت به زاگارولا ($Re(2.8 \times 10^4)$) در (5×10^3) .

در شکل ۱۴ دقت و همخوانی معادله‌ی تحقیق حاضر با داده‌های تجربی ارگان در طول بازه‌ی ($Re(1.05 \times 10^6)$) نسبت به معادله‌ی عزیزی نشان داده شده است.

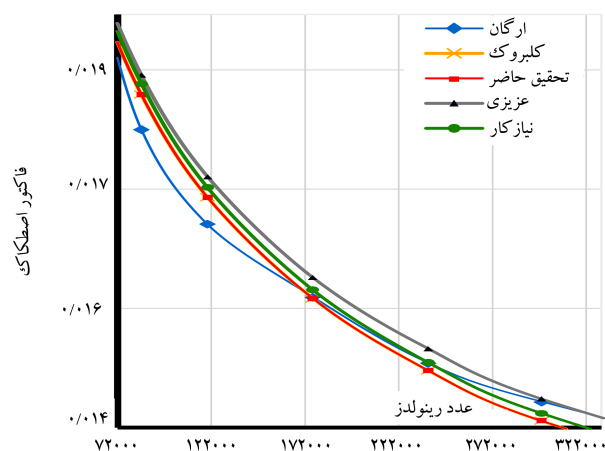
شکل ۱۵ نتیجه‌ی نهایی مقاله حاضر را نشان می‌دهد. محدوده‌ی دقت معادله‌ی تحقیق حاضر نسبت به معادله‌ی عزیزی در محدوده‌ی 3.1131×10^4



شکل ۱۳. معادله‌ی عزیزی و تحقیق حاضر در $(Re(2.7 \times 10^5))$ در (3.1131×10^4) .



شکل ۱۴. دقت معادله‌ی عزیزی و تحقیق حاضر در $(Re(3.554 \times 10^7))$ در (1.75×10^7) .



شکل ۱۵. میزان دقت نسبت به زاگارولا ($Re(3.554 \times 10^7)$) در (2.4×10^7) .

$Re(3.5 \times 10^5)$ تطابق بیشتری با معادله‌ی تحقیق حاضر نسبت به معادله‌ی عزیزی و نیازکار دارد.

در شکل ۱۶ مشاهده می‌کنیم که در محدوده‌ی $Re(1.05 \times 10^6)$ در 3×10^5 ارگان تطابق بیشتری با معادله‌ی عزیزی و نیازکار نسبت به معادله‌ی تحقیق حاضر دارد و معادله‌ی تحقیق حاضر همخوانی کم‌تری با ارگان دارد.

شکل ۱۱ در $Re(2.8 \times 10^4)$ دقت معادله‌ی تحقیق حاضر را نشان می‌دهد. همچنین نتایج حاصله از نمودارهای ترسیم شده شکل‌های ۱۲ و ۱۳ در محدوده $Re(7.2 \times 10^4)$ در 2.8×10^4 دقت معادله‌ی عزیزی و نیازکار را نمایش می‌دهند.

۶. نتیجه‌گیری

برای ارائه‌ی معادله‌ی که میزان افت فشار در لوله‌ی که سیال از آن عبور می‌کند، محاسبه‌ی اثرات توزیع سرعت، تنش برشی و لایه‌ی مرزی ضروری است. در بخش مقدمه‌ی مقاله، مطالعاتی که در گذشته برای ارائه‌ی معادله و یا روش محاسبه‌ی افت فشار انجام گرفته بود، معرفی شد. سپس با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی معتبر سعی در بهینه‌سازی معادله‌ی کلبروک و انتخاب روش حل تحلیلی و تخمین، معادله‌ی ارائه شده که برای محاسبه‌ی ضریب اصطکاک در لوله‌های انتقال سیالات به واقعیت نزدیک‌تر است. سپس برای تحلیل نتایج، مقایسه‌ی بین معادله‌ی تحقیق حاضر یعنی معادله‌ی ۱۸ و آخرین معادلات معتبر و دقیق ارائه شده (معادلات عزیز و نیازکار) در نواحی مختلف رینولدزی انجام شد و میزان خطای هر محدوده مورد بررسی قرار گرفت. در ۶۳/۵٪ از نواحی داده‌های رینولدزی وجود دارد و تنها در ۳۶/۵٪ معادله‌ی عزیز از دقت بیشتری برخوردار است. در بررسی انطباق معادله‌ی نیازکار نیز از ابتدا جز در نواحی محدودی، دقت معادله‌ی این تحقیق بیشتر بود. نتیجه‌ی نهایی در این پژوهش علاوه بر بهبود معادله‌ی کلبروک، به دلیل محاسبه‌ی درست و دقیق ضریب اصطکاک، باعث کاهش تحمیل هزینه‌های فراوان و همچنین کاهش اتلاف انرژی در لوله‌های انتقال سیالات به کاربران و محققان می‌شود.

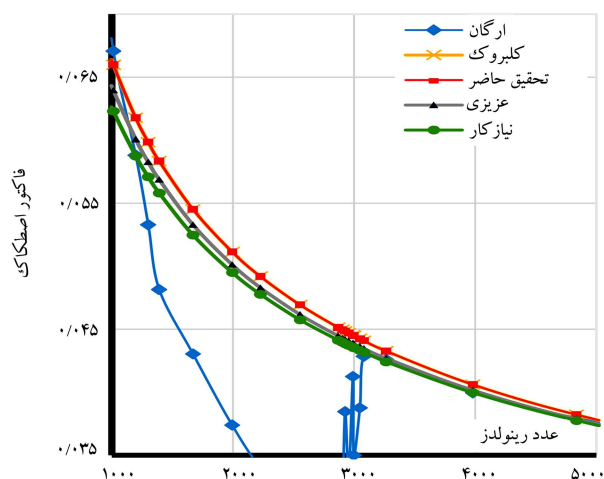
فهرست علائم

• علائم انگلیسی

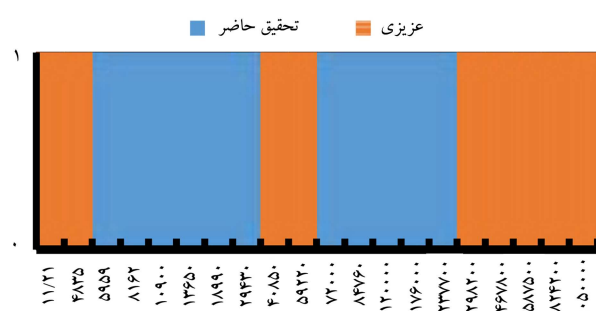
- D : قطر لوله m ؛
- g : ثابت گرانش؛
- h_l : تابع سیال؛
- L : طول لوله m ؛
- Re : عدد رینولدز؛
- v : سرعت نسبی سیال $\frac{m}{s}$.

• علائم یونانی

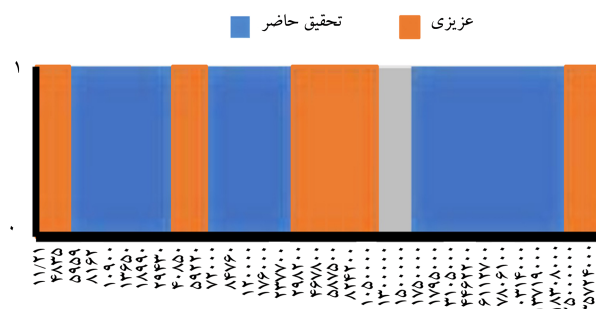
- $\lambda(f)$: ضریب اصطکاک (ثابت ویزباخ)؛
- ρ : چگالی $\frac{kg}{m^3}$ ؛
- ε : زبری سطح m .



شکل ۱۳. میزان دقت نسبت به زاگارولا ($Re(5 \times 10^3)$).



شکل ۱۴. دقت معادله‌ی تحقیق حاضر و عزیز در ($Re(1705 \times 10^6)$).



شکل ۱۵. دقت معادله‌ی تحقیق حاضر و عزیز در ($Re(375724 \times 10^7)$).

$Re(37554 \times 10^7)$ ترسیم شده است. (بازه خاکستری در تحقیق حاضر با زاگارولا و ارگان همخوانی بیشتر و با مک‌کون تطابق کم‌تری دارد).

پانویس‌ها

1. Julius Weisbach
2. Darcy
3. Reynolds
4. Blasius
5. Von Karman
6. Nikuradse
7. Colebrook & White
8. Moody
9. Churchill

10. Swamee & Jain
11. Haaland
12. Sheikh
13. Offor & Alabi
14. Vatankhah
15. Azizi et al
16. non integer powers
17. Niazkar
18. Princeton
19. MSZD (McKeon-Smits -Zaragola-Donnelly)
20. (McKeon-Li-Jiang -Morrison-Smits)
21. Oregon
22. Swanson
23. Joseph & Yang
24. Explicit
25. implicit
26. Mikata & walczak
27. Brkić
28. Lambert's W function ($W \exp(W) = x \leftrightarrow W = W(x)$)
29. Boyd
30. Barry
31. Winitzki
32. Graph
33. Open source

منابع (References)

1. Li, a. W. H. S. "United formula for the friction factor in the turbulent region of pipe flow", *State Key of Water Resource and Hydro power Engineering Science*, **11**(5), p. 430072 (2016).
2. Weisbach, J.L., *Lehrbuch Der Ingenieur-und Maschinen-Mechanik*, Theoretische Mechanik: Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn (1845).
3. Darcy, H., *Recherches Expérimentales Relatives au Mouvement de L'eau Dans Les Tuyaux*, Mallet - Bachelier (1857).
4. Blasius, H., *Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Heft 131, Forschg. Arb. Ing, Wes., Berlin.* (1913).
5. Kármán, T.V. "Mechanische ahnlichkeit und turbulenz", *Math.-Phys. Klasse* (1930).
6. Colebrook, a. C. M. W. C. F. "Experiments with fluid friction in roughened pipes", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, **161**, pp. 367-381 (1937).
7. Brown, G.O. "The history of the Darcy-Weisbach equation for pipe flow resistance", *Environmental and Water Resources History*, pp. 34-43 (2003).
8. Niazkar, M. "Revisiting the estimation of colebrook friction factor: a comparison between artificial intelligence models and C-W based explicit equations", *KSCE Journal of Civil Engineering*, **23**(10), pp. 4311-4326 (2019).
9. Moody, L.F. "Friction factors for pipe flow", *Trans. Asme*, **66**, pp. 671-684 (1944).
10. Swanson, C.J., Julian, B., Ihas, G.G. and et al. "Pipe flow measurements over a wide range of reynolds numbers using liquid helium and various gases", *J. Fluid Mech*, **461**, pp. 51-60 (2002).
11. McKeon, B., Swanson, C., Zagarola, M. and et al. "Friction factors for smooth pipe flow", *Journal of Fluid Mechanics*, **511**, pp. 41-44 (2004).
12. Basse, N.T. "Turbulence intensity and the friction factor for smooth-and rough-wall pipe flow", *Fluids*, **2**, p. 30 (2017).
13. Nikuradse, J., *Laws of Flow in Rough Pipes*, Washington, DC, USA, (1933).
14. Yang, B.H. and Joseph, D.D. "Virtual nikuradse", *Journal of Turbulence*, **10**, p. 11 (2009).
15. Beluco, A. and Schettini, E.B.C. "An improved expression for a classical type of explicit approximation of the Colebrook White equation with only one internal iteration", *International Journal of Hydraulic Engineering*, **5**(1), pp. 19-23 (2016).
16. Sonnad, a. C. T. G. J. R. "Constraints for using lambert W function-based explicit Colebrook-White equation", *Journal of Hydraulic Engineering*, **130**(9), pp. 929-931 (2004).
17. Joseph, D.D. and Yang, B.H. "Friction factor correlations for laminar, transition and turbulent flow in smooth pipes", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **239**(14), pp. 1318-1328 (2010).
18. Brkić, D. "A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **93**, pp. 513-515 (2016).
19. Yıldırım, G. "Computer-based analysis of explicit approximations to the implicit Colebrook-White equation in turbulent flow friction factor calculation", *Advances in Engineering Software*, **40**(11), pp. 1183-1190 (2009).
20. Winning, a. T. C. H. K. "Explicit friction factor accuracy and computational efficiency for turbulent flow in pipes", *Flow Turbulence and Combustion*, **90**(1), pp. 1-27 (2013).
21. Eck Pecornik, B. "Technische Str mungslehre", Springer, p. 324 (1973).
22. Barr, D. and White, C. "Solutions of the Colebrook-White function for resistance to uniform turbulent flow", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **71**(2), pp. 529-535 (1981).
23. Barr, D. "Technical note. new forms of equation for the correlation of pipe resistance data", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **53**(2), pp. 383-390 (1972).
24. Churchill, S.W. "Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe", *AIChE Journal*, **19**(2), pp. 375-376 (1973).
25. Jain, A.K. "Accurate explicit equation for friction factor", *Journal of the Hydraulics Division*, **102**(5), pp. 674-677 (1976).
26. Swamee, a. A. K. J. P. K. "Explicit equations for pipe-flow problems", *Journal of The Hydraulics Division*, **102**(5), pp. 657-664 (1976).

27. Haaland, S.E. "simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow", *Journal of Fluids Engineering*, **105**(1), pp.89-90 (1983).
28. Shaikh, M.M., Massan, S.R. and Wagan. A.I. "A new explicit approximation Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases", *Int J Heat Mass Transfer*, **88**, pp. 538-543 (2015).
29. Offor, U. and Alabi, S. "Performance evaluation of the explicit approximations of the implicit colebrook equation", *International Journal of Research in Engineering and Technology*, **5**, pp. 1-12 (2016).
30. Vatankhah, A.R. and Kouchakzadeh, S. "Discussion of "Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation" by Jagadeesh R. Sonnad and Chetan T. Goudar", *Journal of Hydraulic Engineering*, **134**, pp. 1178-1187 (2008).
31. Azizi, N., Homayoon, R. and Hojjati, M.R. "Predicting the Colebrook-White friction factor in the pipe flow by new explicit correlations", *Journal of Fluids Engineering*, **141**(051201-051208) (2018).
32. Colebrook, C. "Friction factors for pipe flow", *Inst. Civil Eng*, **11**, p. 133 (1939).
33. Gallardo, A.O., Rojas, R.G. and Guerra, M.A. "New explicit correlation to compute the friction factor under turbulent flow in pipes", *Brazilian Journal of Agricultural and Environmental Engineering*, **25**(7), pp. 439-445 (2021).