

# رفتار مکانیکی و الکتریکی ریزمبدل‌های خازنی با در نظر گرفتن اثرات اندازه

سبها درباسی (کارشناس ارشد)

پژوهشکده میکروالکترونیک، دانشگاه ارومیه

امیرموسی ابازری\* (استادیار)

حامد قنبرپور (دانشجوی کارشناسی)

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه ارومیه

سعید افرونگ (دانشیار)

پژوهشکده میکروالکترونیک، دانشگاه ارومیه

قادر رضازاده (استاد)

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه ارومیه

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۴۰۱)  
دوری ۳-۲۸، شماره ۲، ص. ۲۹-۳۶، (پژوهشی)

امروزه به منظور مطالعه‌ی بالینی در تصویربرداری اولتراسونیک، ریزمبدل‌های اولتراسوند خازنی در بازه فرکانس‌های بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله از طریق تحلیل رفتار مکانیکی ریزمبدل اولتراسوند خازنی، پهنای باند فرکانسی و میزان حساسیت آنها ارزیابی شده است. برای طراحی ریزمبدل اولتراسوند که قادر به تولید تصاویر با وضوح بالا باشد، نیاز به یک ساختار خازنی با استفاده از تکنولوژی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌باشد. از این رو در این مقاله به منظور پیش‌بینی رفتار مکانیکی این سیستم به طور دقیق، ناپایداری پولین و پاسخ فرکانسی دیافراگم با در نظر گرفتن نظریه گزادین‌های مرتبه بالا بررسی می‌شود. همچنین، به منظور مطالعه‌ی جامع، فاکتورهای الکتریکی ساختار ریزمبدل خازنی از جمله ضریب تزویج الکترومکانیکی، فشار خروجی و حساسیت سیگنال دریافتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ساختار بررسی شده در این مقاله در واقع یک روش عملی، ساده و دقیق است که برای کاربردهای پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**واژگان کلیدی:** تصویربرداری پزشکی، سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، ریزمبدل خازنی، تئوری گزادین‌های مرتبه‌ی بالا.

## ۱. مقدمه

مورد استفاده قرار گرفت، قادر به ارسال و دریافت امواج در رنج فرکانس  $5^{\circ}0$  مگاهرتز تا  $3^{\circ}0$  مگاهرتز می‌باشد. با توجه به رنج فرکانس‌های مختلف، نوع تصویربرداری و کاربرد آن متفاوت می‌باشد.<sup>[۵-۳]</sup>

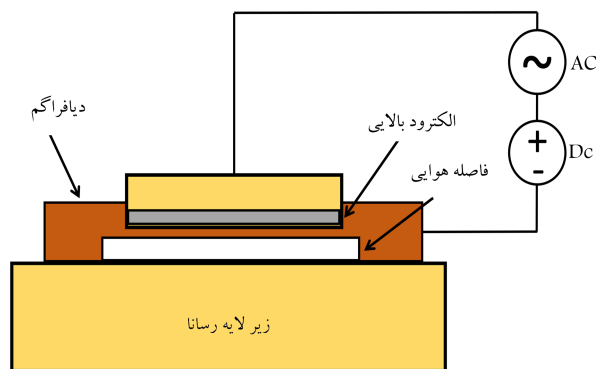
با در نظر گرفتن تصویربرداری‌های مختلفی که در حوزه پزشکی صورت می‌گیرد، انجام تصویربرداری با استفاده از روش اولتراسوند و استفاده از یک سیستم با تکنولوژی ممز با توجه به اندازه کوچک، هزینه کم، قابل حمل بودن و دقت بالا کمک بزرگی به ایجاد تصاویر پزشکی با کیفیت و دقت بالا و هزینه بسیار کم نسبت به سایر روش‌ها می‌کند. تصویربرداری با سونوگرافی که حدود ۲۵ درصد از روش‌های تصویربرداری بالینی را تشکیل می‌دهد، یکی از امن‌ترین ابزارهای تصویربرداری در کلینیک‌های پزشکی می‌باشد. این مبدل‌های فراصوتی از نظر ساختاری انواع گوناگونی دارند که از جمله پرکاربردترین آنها در حوزه پزشکی می‌توان به مبدل‌های پیزو الکتریک و الکترواستاتیک اشاره کرد.<sup>[۶، ۲]</sup> از طرف دیگر، با توجه به معایب موجود در مبدل‌های پیزوالکتریک که باعث ایجاد برخی محدودیت‌ها در تصویربرداری اولتراسوند می‌شود، تکنولوژی CMUT به دلیل مزایایی مانند پهنای باند وسیع‌تر،

تصویربرداری پزشکی که یک تکنیک و فرایند مورد استفاده برای ساختن تصاویر از بدن انسان برای اهداف کلینیکی می‌باشد، یکی از مدرن‌ترین روش‌های تشخیص در حوزه پزشکی است.<sup>[۱، ۲]</sup> این تکنولوژی با استفاده از امواج مختلف برای کاربردهای گوناگون انجام می‌گیرد. اما تصویربرداری با امواج فراصوت به دلیل ایمنی بالا، حمل و نقل آسان و هزینه کم نسبت به سایر روش‌ها بیشترین استفاده را در حوزه پزشکی دارد. این نوع تصویربرداری‌ها توسط مبدل‌های مختلفی از جمله مبدل الکترومغناطیسی، مبدل پیزوالکتریک و مبدل الکترواستاتیک (خازنی) صورت می‌گیرد. از طرف دیگر با توجه به عملکرد مطلوب و مزایای ریزمبدل‌های خازنی (Capacitive Micro Ultrasonic Transducer) با تحریک الکترواستاتیک نسبت به سایر روش‌ها، طراحی و تحلیل این نوع ریزمبدل، موضوع مورد مطالعه در این تحقیق قرار گرفته است. سیستم تصویربرداری با امواج فراصوت که در سال ۱۹۷۰ در حوزه پزشکی

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۲۳، اصلاحیه ۱۴۰۰/۱۲/۴، پذیرش ۱۴۰۰/۱۲/۸

DOI:10.24200/J40.2022.59296.1627



شکل ۱. شماتیکی از میدل نوع CMUT.

است. چرا که پهنای باند وسیع باعث بهبود کیفیت و دقت تصاویر ایجاد شده می‌شود. همچنین کوچک بودن ابعاد CMUT باعث کوچک شدن امپدانس سیستم و در نتیجه باعث پیشینه‌ی انتقال انرژی در سیستم می‌شود. در واقع تصویر با وضوح بالا، با پیشینه‌ی انتقال انرژی انجام می‌شود؛ اختلاف امپدانس پایین صوتی بین میدل و محیط مجاور باعث حد بالای انتقال انرژی بین میدل و محیط می‌شود. به عنوان مثال، امپدانس اکوستیک یک ماده پیزوالکتریک معمولی (۳۰ مگاریل) به طور قابل توجهی بالاتر از امپدانس اکوستیک سیال معمولی مانند آب (۱/۵ مگاریل)<sup>[۱۳]</sup> و یا امپدانس بافت‌های نرم انسان مانند چربی (۶ مگاریل)<sup>[۱۴]</sup> می‌باشد. جهت کاهش عدم امپدانس در فرکانس‌های بالا، می‌توان از یک لایه تطبیق مناسب در مقابل دستگاه استفاده کرد. امپدانس کم CMUT، تطبیق آسان بین محیط مجاور و میدل را در مقایسه با میدل‌های پیزوالکتریک به ارمغان می‌آورد.<sup>[۱۵]</sup> از این رو، با پیشینه‌ی انتقال انرژی موثر در سیستم، ضریب انتقال الکتریکی سیستم بهبود خواهد یافت؛ این بدان معنی است که CMUT پهنای باند وسیع‌تر و حساسیت بالاتر را در مقایسه با سایر روش‌ها ایجاد می‌کند.

محدوده فرکانسی، یک مسئله مهمی است که در طراحی وسایل پزشکی از جمله CMUT باید مورد توجه قرار گیرد. زیرا این پارامتر وضوح تصویر و موارد کاربرد این دستگاه را به طور مستقیم تعیین می‌کند.<sup>[۱۶، ۱۵]</sup> همچنین افزایش فرکانس ترنسدیوسر باعث بهبود رزولوشن و دقت تصاویر ایجاد شده می‌شود. برای ایجاد فرکانس‌های بالا در حدود مگاهرتز نیاز به یک ساختار در ابعاد میکرونی می‌باشد. با اعمال ولتاژ بالا می‌توان امواج با فرکانس بالا تولید کرد ولی چون در کارهای پزشکی و مخصوصاً در تصویربرداری که مستقیماً با بدن انسان در تماس هستیم، ولتاژ بالا خطرناک است، از این رو بهترین راهکار طراحی یک پروب در ابعاد میکرو می‌باشد که قادر به انتقال و دریافت امواج فراصوت با فرکانس بالا بدون افزایش ولتاژ باشد. امروزه این اهداف با طراحی و مدل‌سازی CMUT‌ها میسر شده است. بنا بر مزیت‌های ذکر شده و اهمیت این تکنولوژی، ریزمیدل‌های خازنی امروزه کاربرد بسیار وسیعی در حیطه‌های مختلف جهت ارسال و دریافت سیگنال دارند. به دلیل پیشرفت تکنولوژی و نیاز به داشتن انواع حسگر در حجم کوچک، ریزمیدل‌های خازنی هم امروزه در ابعاد میکرو و نانومتر ساخته می‌شوند. با در نظر گرفتن کاربرد وسیع این سازه‌ها در صنایع امروزی، مدل‌سازی و شبیه‌سازی این سازه‌ها اهمیت پیدا می‌کند. از طرفی چون تئوری‌های کلاسیک مکانیک با مفاهیمی که جهت مدل‌سازی به کار می‌برند، اثرات اندازه در آنها ظاهر نمی‌شود، در این مقاله با به کار بردن تئوری گرادیان کرنش نشان داده‌ایم که ابعاد و سائز میدل چه تأییراتی می‌تواند در رفتار استاتیکی و دینامیکی این سازه از لحاظ مکانیکی و همچنین روی ضریب تزویج الکترومکانیکی، فشار خروجی و حساسیت حسگر داشته باشد.

در این مقاله به مطالعه و بررسی ویژگی‌های میکرو ترنسدیوسر خازنی مربوط به تحلیل الکتریکی از جمله ضریب تزویج الکترومکانیکی، فشار خروجی، حساسیت سیگنال دریافتی و تحلیل مکانیکی شامل سفتی کل سیستم، فرکانس رزونانس و ولتاژ کشندگی (پولین) می‌پردازیم.

## ۲. پارامترهای موثر میدل‌های خازنی

### ۲.۱. حساسیت گیرنده

در مد گیرنده، برخورد امواج صوتی بر روی دیافراگم باعث ایجاد جابه‌جایی مکانیکی و در نتیجه تغییر ظرفیت خازنی مابین الکترودها می‌شود. با بازخوانی شدت جریان

سهولت پروسه ساخت و قابلیت ادغام با مدارات میکروالکترونیک، برقراری اتصال الکترواکوستیک بهتر و حساسیت بالاتر، جایگزینی مناسب برای میدل پیزوالکتریک می‌باشد و امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. تکنولوژی CMUT که با نام میدل یا ترنسدیوسر خازنی نیز شناخته می‌شود، در دو دهه اخیر از جمله موضوعاتی بوده که بیشترین تحقیقات را در زمینه مهندسی پزشکی به خود جلب کرده است.<sup>[۷]</sup> ایده استفاده از ریزمیدل‌های خازنی در ابتدا توسط هالر و خوری یوکاب در سال ۱۹۹۴ مطرح شد.<sup>[۸]</sup> این میدل شامل چندین جزء در یک آرایه می‌باشد که هر یک از این المان‌ها از چندین واحد خازن‌های کوچک تشکیل شده است. ساختمان اصلی CMUT شکل ۱ متشکل از یک الکتروود متحرک (دیافراگم) و یک الکتروود ثابت است. با اعمال ولتاژ به این دو الکتروود، خازنی به وجود می‌آید که با تغییر فاصله الکتروودها مقدار آن تغییر می‌کند.<sup>[۹]</sup> ولتاژ خارجی که بار الکتریکی بین صفحات را تامین می‌کند، با استفاده از یک مدار مجتمع که پمپ ولتاژ یا پمپ بار نامیده می‌شود، تولید می‌شود. بخش اصلی تشکیل دهنده دستگاه‌های تصویربرداری فراصوتی، میدل فراصوتی به منظور ارسال و دریافت امواج فراصوتی می‌باشد. اعمال فشار آکوستیکی در قسمت گیرنده و اعمال بار الکترواستاتیکی متغیر با زمان در قسمت فرستنده منجر به تغییر فاصله بین الکتروودها می‌شود. ریزمیدل‌های خازنی دارای فرستنده و گیرنده هستند. بر اساس شرایطی که از آنها استفاده می‌شود، موج صوتی را تولید و یا دریافت می‌کنند. در مد فرستنده، با اعمال جریان AC با فرکانس و شدت ولتاژ مشخص، می‌توان صفحه‌ی متحرک میدل را بر اساس هدفی که دارد، تحریک و مرتعش کرد. با ایجاد ارتعاشات کنترل شده روی صفحه‌ی متحرک، می‌توان موج صوتی با دامنه و فرکانس مشخص تولید کرد. در مد گیرنده، صفحه‌ی متحرک میدل، با دریافت موج صوتی از محیط تحت بررسی، مرتعش می‌شود و یا ارتعاش از قبل ایجاد شده بر روی آن، دچار تغییر می‌شود. در نهایت، چون صفحه‌ی متحرک میدل در واقع صفحه‌ی خازنی از خازن است، بنابراین هرگونه تغییرات در این صفحه می‌تواند با تغییرات خازن کالیبره شود.

این ساختار در مقایسه با سایر میدل‌های مکانیکی از جمله میدل‌های پیزوالکتریک و یا میدل‌های الکترومغناطیس، از پروسه ساخت ساده‌تری برخوردار است. همچنین پاسخ سریع در برابر ارتعاشات ضربه‌یی، پایین بودن سطح نویز، سائز کوچک، مصرف انرژی کم، کارایی انتقال بالا و حساسیت بسیار بالا از برتری‌های این نوع میدل‌ها می‌باشد. همچنین این میدل‌ها به راحتی قابلیت مجتمع‌سازی با پروسه‌های سیمااس (Complementary Metal-Oxide Semiconductor- CMOS) را دارند.<sup>[۱۲-۱۱]</sup> یکی دیگر از مزیت‌های این تکنولوژی که باعث جلب نظر بسیاری از محققان در زمینه‌های مهندسی پزشکی شده است، وسیع و خطی بودن پهنای باند

ضخامت میکروسازه‌ها بسیار کوچک می‌شود، اثراتی که تحت عنوان اثر اندازه از آنها یاد می‌شود، نقش مهمی را در رفتار مکانیکی میکرو/نانوسازه‌ها بازی می‌کنند. نتایج آزمایشگاهی پیچش و خمش که بر روی میکرو/نانوسازه‌ها انجام شده است، نشان داده است که رفتار و خواص مکانیکی ریزساختارها به اندازه آنها وابسته است.<sup>[۲۳-۲۰]</sup> تلاش‌ها و تحقیقات زیادی برای علت‌یابی این رفتار صورت گرفته است.<sup>[۲۴]</sup> و مشخص شده است که رفتار وابسته به اندازه یکی از ویژگی‌های ذاتی یک ماده است و هنگامی که ضخامت ساختارها نزدیک یا کوچکتر از پارامتر مقیاس اندازه ماده سازنده ریزساختارها باشد، اثرات اندازه قابل ملاحظه بوده و بایستی در بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفته شوند.<sup>[۲۵]</sup> تئوری کلاسیک الاستیسیته به دلیل در نظر نگرفتن پارامتر مقیاس اندازه در میدان الاستیک نمی‌تواند رفتار مکانیکی این سیستم‌ها را به طور دقیق پیش‌بینی کند. از این رو تئوری‌های مرتبه بالا مکانیک جهت مطالعه‌ی دقیق رفتار مکانیکی و الکترومکانیکی آنها گسترش یافتند. این مقاله هم در راستای مطالعات پیشین، به بررسی رفتار میکروصفحه دایره‌ی به عنوان جز متحرک از یک میکرو/نانومبدل خازنی پرداخته است. به دلیل وجود اثرات اندازه، مدل‌سازی این میکرو/نانوسازه با استفاده از تئوری گرادیان‌های کرنش که اثر اندازه را در هسته خود دارد، استفاده شده است و تأثیرات این پارامتر بر رفتار سازه مورد مطالعه قرار گرفته است. به منظور مدل‌سازی ریاضی و استخراج معادلات حاکم بر سیستم، ساختار خازنی هر یک از واحدهای فرستنده و گیرنده مبدل فراصوتی مورد نظر به صورت دو میکروصفحه دایره‌ی موازی (متحرک و ثابت) با یکدیگر در نظر گرفته شده است. با اعمال ولتاژ توسط منبع تغذیه اختلاف پتانسیل الکتریکی  $V$  بین آنها اعمال می‌شود و بدین ترتیب نیروی الکترواستاتیک ایجاد شده باعث حرکت صفحه متحرک به سمت صفحه ثابت می‌شود (شکل ۱). فرض شده است که میکرو صفحه متحرک دچار تغییر شکل‌های کوچک می‌شود؛ در واقع در کاربرد واقعی هم همین مساله صادق است. چنانچه انرژی کرنش یک محیط الاستیک با در نظر گرفتن گرادیان‌های مرتبه اول و دوم کرنش بنویسیم به شکل زیر خواهد بود.<sup>[۲۶]</sup>

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} l^T C_{ijmn} \varepsilon_{mn,k} \varepsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} l^T C_{ijmn} \varepsilon_{mn,kl} \varepsilon_{ij,kl} \quad (6)$$

که در رابطه فوق  $l$  و  $l^T$  طول‌های داخلی و تانسور مرتبه چهار بوده و  $C$  تانسور مرتبه‌ی چهار ضرایب است که برای یک محیط ایزوتوپ بر اساس ضرایب لامه به شکل زیر است:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (7)$$

چنانچه بر اساس مدل فوق معادلات حاکم بر یک صفحه نازک کیرشهف را در دستگاه مختصات قطبی به دست آوریم و از گرادیان‌های مرتبه ۲ کرنش صرف نظر کنیم، با در نظر گرفتن جابجایی‌های کوچک، معادله حاکم برای دیافراگم بر اساس مدل گرادیان مرتبه بالا به صورت زیر بیان می‌شود<sup>[۲۷]</sup>:

$$D \left[ 1 + \nu \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \right] \nabla^2 w - D \ell^2 \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} = F \quad (8)$$

طرف راست معادله (F) نیروی الکترواستاتیک اعمالی است که با استفاده از  $(g_0 - w)^2 / 2 * (V_{dc} + V_{ac})^2 / \varepsilon_0$  قابل بیان است. در رابطه ۸،  $w$  جابه‌جایی

برق برگشتی می‌توان مقدار سیگنال AC را اندازه‌گیری کرد. در حالت گیرنده، ورودی فشار اکوستیک بازگردانده شده از محیط ( $P_r$ ) و خروجی جریان حاصل از تغییر ظرفیت خازن (I) می‌باشد و نسبت این فشار خروجی به جریان ورودی که میزان حساسیت گیرنده ( $S_{Rx}$ ) سیستم را تعیین می‌کند، به صورت زیر بیان می‌شود<sup>[۱۷]</sup>:

$$S_{Rx} = \left| \frac{I}{P_r} \right| \quad (9)$$

جریان در مد گیرنده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{\varepsilon_0 AV_{dc}}{g_0^2} w \quad (2)$$

که در آن  $\varepsilon_0$  ثابت گذردهی خلا، A مساحت دیافراگم،  $V_{dc}$  ولتاژ بایس،  $g_0$  فاصله هوایی و  $w$  جابه‌جایی صفحه می‌باشد که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت.

## ۲.۲. فشار خروجی اکوستیک

در یک سیستم خطی نامغیر با زمان (Linear time-invariant system-LTI) رابطه بین میزان فشار اکوستیکی اعمال شده به سیستم و میزان نرخ جریان حجمی ناشی از این فشار در یک سطح عمود بر جهت فشار برابر است با<sup>[۱۸]</sup>:

$$P_a = \dot{V} \cdot Z_a \quad (3)$$

که در آن  $\dot{V}$  نرخ جریان حجمی و  $Z_a$  معیاری برای سنجش میزان مقاومت سیستم در برابر انتشار امواج اکوستیکی است که برابر است با  $\rho \cdot c$  که در آن  $\rho$  چگالی سیال و  $c$  مبنای سرعت صوت در محیط انتشار می‌باشد. نرخ جریان حجمی اکوستیکی در رابطه ۳ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r \left( \frac{\partial w_a}{\partial t} \right) dr \quad (4)$$

که در آن  $w_a$  جابه‌جایی صفحه‌ی متحرک است که در ادامه به بررسی و محاسبه آنها پرداخته می‌شود.

## ۳.۲. ضریب توزیع الکترومکانیکی

ترنس‌دیوسر وسیله‌ی است که انرژی‌ها را به یکدیگر تبدیل می‌کند. در CMUT تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و برعکس اتفاق می‌افتد. از این رو یکی دیگر از پارامترهای مهم CMUT، ضریب توزیع الکترومکانیکی ( $K_T^+$ ) می‌باشد. این ضریب تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و برعکس را مشخص می‌کند. اساساً  $K_T^+$  نسبت انرژی مکانیکی به کل انرژی ذخیره شده در CMUT است.<sup>[۱۹]</sup>

$$K_T^+ = \frac{E_{mech}}{E_{mech} + E_{elec}} \quad (5)$$

## ۳. تحلیل مکانیکی CMUT

بررسی رفتار مکانیکی میکرو ترنس‌دیوسرهای خازنی بدون در نظر گرفتن اثرات مقیاس اندازه می‌تواند منجر به خطای زیادی در پیش‌بینی رفتار آنها باشد؛ چرا که با توجه به تحقیقات و آزمایشات موجود، رفتار ساختارهای میکرونی وابسته به اندازه می‌باشد.<sup>[۲۲-۲۰]</sup> طبق نتایج مقالات منتشر شده، در ساختارهای میکرونی زمانی که

در حل معادله استاتیکی، با استفاده از روش خطی‌سازی گام به گام<sup>[۲۸]</sup>، معادله خطی حاکم بر تغییر شکل دیافراگم تحت تحریک الکترواستاتیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left( \left[ 1 + 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \right] \nabla^2 \psi - \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 \nabla^4 \psi \right) = \frac{2\alpha V_{dc} \delta V}{(1-w)^2} + \frac{2\alpha (V_{dc}^i)^2}{(1-w^i)^2} \psi \quad (14)$$

$\psi$  را می‌توان با استفاده از تابع پایه‌ی  $\varphi(r)$  به صورت زیر تقریب زد:

$$\psi(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(r) \quad (15)$$

ضرایب مجهول  $\alpha_i$  با حل  $N$  معادله جبری فوق محاسبه می‌شوند. با به دست آوردن ضرایب  $\alpha_i$ ،  $\psi$  نیز برای دیافراگم دایره‌ی مورد نظر به دست می‌آید و در نتیجه تغییر شکل استاتیکی دیافراگم در هر گام ولتاژ DC اعمالی تعیین می‌شود.

از آنجایی که معادله دینامیکی حاکم بر حرکت عرضی دیافراگم شامل جملات غیرخطی می‌باشد، ایجاد مدل کاهش مرتبه یافته گلرکین پیچیده است. بدین جهت، جملات غیرخطی معادله را به عنوان جملات نیرو در نظر گرفته و از این جملات در هر گام زمانی روی دامنه شعاعی دیافراگم با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه ۴ انتگرال‌گیری عددی می‌شود.<sup>[۲۹]</sup> ترکیب خطی تعداد متناهی جمله از تابع شکل مناسب و ضرایب وابسته به زمان در تقریب پاسخ دینامیکی دیافراگم استفاده می‌شود. بدین ترتیب مدل کاهش مرتبه یافته با استفاده از روش وزنی گلرکین و انتگرال‌گیری روی دامنه شعاعی بی‌بعد، برای حل معادله به دست می‌آید. پاسخ دیافراگم به ازای هر ولتاژ DC، با انتگرال‌گیری در زمان از معادله دیفرانسیل معمولی مدل کاهش مرتبه یافته و انتخاب تابع شکل مناسب برای دیافراگم دایره‌ی قابل محاسبه است. با اعمال روش گلرکین و با انتخاب تابع وزنی مناسب  $\varphi(r)$  و انتگرال‌گیری از آن، رابطه دینامیکی دیافراگم به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^N M_{ij} \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^N C_{ij} \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^N (K_{ij}^c + K_{ij}^{nc1} + K_{ij}^{nc2}) q_i(t) = F_j \quad (16)$$

$j = 1, \dots, N$

که در آن

$$K_{ij}^c = \int_0^1 \nabla^2 \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr$$

$$C_{ij} = \int_0^1 \beta \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr$$

$$K_{ij}^{nc1} = 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \int_0^1 \nabla^2 \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr$$

$$K_{ij}^{nc2} = - \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 \int_0^1 \nabla^4 \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr$$

صفحه،  $D$  سفتی خمشی ( $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ )،  $\rho$  پارامتر مقیاس اندازه، ضخامت صفحه،  $\rho$  چگالی،  $t$  زمان،  $C$  دمپینگ سیستم،  $E$  مدول یانگ،  $\nu$  ضریب پواسون،  $g$  فاصله هوایی،  $\epsilon_0$  ثابت گذردهی خلا،  $V_{dc}$  ولتاژ بایس و  $V_{ac}$  ولتاژ متناوب اعمالی به سیستم هستند. ضمناً، با فرض این که تغییر شکل دیافراگم دایره‌ی نسبت به مختصه محیطی متقارن است  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ ، عملگر بای هارمونیک در دستگاه مختصات قطبی برای صفحه متقارن محوری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \quad (9)$$

#### ۴. بی‌بعدسازی

پارامترهای بی‌بعد زیر برای تبدیل روابط از حالت با بعد به حالت بی‌بعد تعریف می‌شوند:

$$\hat{W} = \frac{w}{g}, \quad \hat{R} = \frac{r}{R}, \quad \beta = \frac{C R^2}{\sqrt{\rho h D}} \quad (10)$$

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_0 R^2}{\sqrt{D} g^2}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t^*}, \quad t^* = R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

در این روابط  $R$  شعاع صفحه و  $r$  فاصله از مرکز صفحه است. با جایگذاری در رابطه ۸ معادله بی‌بعد حاکم بر رفتار مکانیکی دیافراگم دایره‌ی تحت تحریک الکترواستاتیکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left[ 1 + 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \right] \nabla^2 w - \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 \nabla^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial \hat{t}} = \frac{\alpha_1 (V_{dc} + V_{ac})}{(1-w)^2} \quad (11)$$

#### ۵. حل عددی

روش‌های حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسئله، به علت غیرخطی بودن معادلات بسیار پیچیده و زمان بر خواهد بود. بدین منظور در حل معادلات استاتیکی، روش خطی‌سازی گام به گام<sup>[۲۹]</sup> (Step by Step Linearization Method) و در حالت دینامیکی، روش رانگ-کوتا مرتبه ۴ استفاده می‌شود. با توجه به کاملاً گیردار بودن دیافراگم، شرایط مرزی حاکم بر مسئله در معادله عبارت اند از:

$$W(R, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} W(R, t) = 0$$

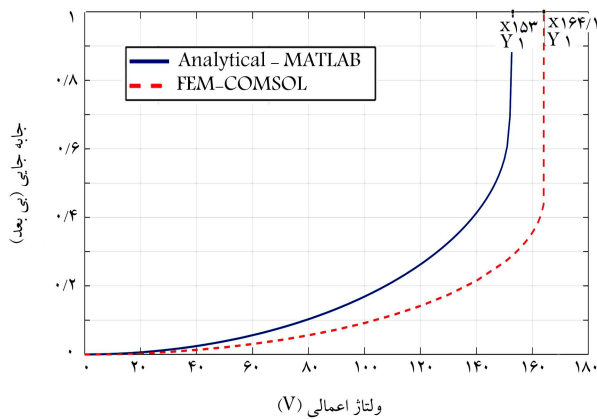
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} W(R, t) = 0 \quad (12)$$

تابع شکل زیر شرایط مرزی دیافراگم دایره‌ی کاملاً گیردار را ارضا می‌کند:

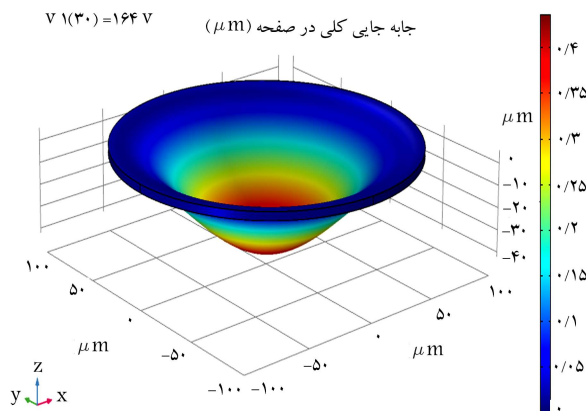
$$\varphi_n(r) = 1 - \left( \frac{2 n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 - \lambda} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \left( \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 - \lambda} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^4 + \left( \frac{\lambda (-1)^n}{n^2 \pi^2 - \lambda} \right) \cos \left( \frac{n \pi r}{R} \right), \quad n = 1, \dots, N \quad (13)$$

جدول ۱. مشخصات فیزیکی و ابعاد هندسی ساختار.

| نماد         | کمیت          | مقدار                |
|--------------|---------------|----------------------|
| R            | شعاع          | $10^6 \mu\text{m}$   |
| h            | ضخامت         | $5 \mu\text{m}$      |
| $\epsilon_0$ | ضریب هوا      | $8/85 \text{pF/m}$   |
| E            | مدول یانگ     | $169 \text{GPa}$     |
| $\nu$        | ضریب پواسون   | $0/3$                |
| $g_0$        | فاصله‌ی هوایی | $1 \mu\text{m}$      |
| R            | چگالی         | $2330 \text{Kg/m}^3$ |



شکل ۲. میزان خمش استاتیکی دیافراگم سیلیکانی در دو روش عددی و FEM.



شکل ۳. نمای سه بعدی خمش دیافراگم در نرم افزار COMSOL.

ترتیب اختلاف ۷ درصد میان نتایج دو روش ملاحظه می‌شود. دلیل این اختلاف در نظر نگرفتن اثر میدان‌های لبه‌یی (Fringing Effect) در روش حل عددی است. که به منظور ساده‌سازی استخراج معادلات و تحلیل آنها این امر صورت گرفته است. در شکل ۳ در ولتاژ نزدیک به ناپایداری کشندگی، میزان خمش دیافراگم نشان داده شده است. نقاط قرمز رنگ بیشترین میزان جابجایی را دارند که مرکز دیافراگم بوده و لبه‌های دیافراگم که به تکیه‌گاه متصل هستند هیچگونه جابه‌جایی نداشته‌اند و با رنگ آبی نشان داده شده‌اند.

### ۲.۱.۶. تأثیر اثر اندازه بر رفتار استاتیکی سازه با آنالیز میزان کشندگی

همان‌گونه که در معادله ۱۱ مشاهده می‌شود، در معادلات حاکم بر ساختار بر مبنای تئوری گرادیان مرتبه بالا زمانی که مقیاس طول سازه با ضخامت و شعاع آن قابل مقایسه باشد، می‌توان ترم‌های  $g/h$  و  $g/R$  را بررسی نمود، به طوریکه در ضخامت

$$M_{ij} = \int \varphi_i(r) \varphi_j(r) dr$$

$$F_j = \alpha_1 V^2 \int \frac{\varphi_j(r)}{(1-W)^4} dr \quad (17)$$

جهت استخراج پاسخ فرکانسی سیستم،  $q$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q_i = A_i \sin(\omega t - \varphi_i)$$

$$q_i = A_i e^{\tilde{i} \omega t} \cdot e^{-\tilde{i} \varphi_i} = A_i e^{-\tilde{i} \varphi_i} (e^{-\tilde{i} \omega t})$$

$$q_i = \bar{A}_i e^{\tilde{i} \omega t} \quad (18)$$

با جایگذاری این روابط در معادله حاکم، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\sum -\omega^2 m_{ij} \bar{A}_i + \sum \tilde{i} \omega C_{ij} \bar{A}_i + \sum k_{ij}^{(eq)} \bar{A}_i = F_j \quad (19)$$

در فرم ساده‌تر می‌توان معادله بالا را به صورت زیر نشان داد:

$$\sum \left[ (k_{ij}^{(eq)} - \omega^2 m_{ij}) + \tilde{i} \omega C_{ij} \right] \bar{A}_i = F_j \quad (20)$$

و در نهایت با در نظر گرفتن

$$\bar{Z} = \left[ (k_{ij}^{(eq)} - \omega^2 m_{ij}) + \tilde{i} \omega C_{ij} \right] \quad (21)$$

می‌توان رابطه‌ی زیر را برای استخراج پاسخ فرکانسی سیستم نوشت:

$$\bar{A} = \bar{Z}^{-1} F \quad (22)$$

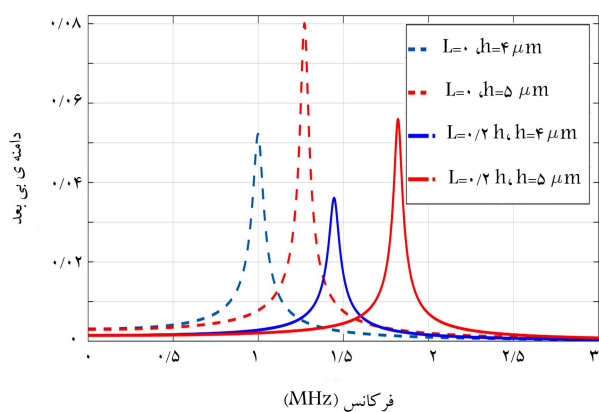
## ۶. نتایج و تفسیر آنها

جدول ۱ مشخصات فیزیکی و ابعاد هندسی دیافراگم سیلیکانی مورد بررسی در این مطالعه را نشان می‌دهد. صحت مدل‌سازی و نتایج عددی به دست آمده در نرم‌افزار MATLAB با نتایج تحلیل المان محدود نرم‌افزار COMSOL مقایسه شده است. یکی از پارامترهای مهم در تحلیل سیستم‌های مرتعش تحلیل میزان پایداری آنهاست که محدوده عملکرد آنها را نشان می‌دهد. در واقع به واسطه اعمال ولتاژ به دیافراگم و الکتروود پایینی، سختی سیستم کاهش می‌یابد و زمانی که ولتاژ اعمالی به مقدار مشخصی برسد، سیستم ناپایدار می‌شود و دیافراگم به سرعت بر روی الکتروود پایینی سقوط می‌کند؛ به این ولتاژ مشخص ولتاژ کشندگی گفته می‌شود.

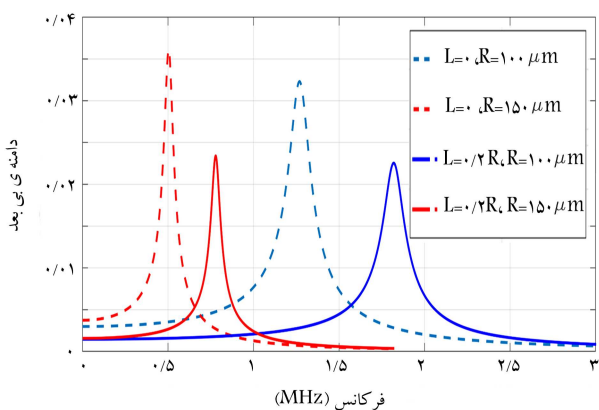
### ۱.۶. تحلیل استاتیکی

#### ۱.۱.۶. مقایسه با نرم افزار کامسول

شکل ۲ میزان ولتاژ کشندگی استاتیکی برای دیافراگم مرتعش از جنس سیلیکان در مبدل التراسونیک مطالعه شده را نشان می‌دهد. مطابق نتایج عددی دیافراگم در ولتاژ ۱۵۳ به محدوده ناپایداری استاتیکی خود می‌رسد. این در حالی است که مطابق نتایج تحلیل المان محدود این ناپایداری در ولتاژ ۱۶۴/۱ رخ می‌دهد. بدین



شکل ۵. پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف با در نظر گرفتن اثر ترم اندازه بدون در نظر گرفتن اثر اندازه  $(\varrho = 0^\circ/2h)$ .



شکل ۶. پاسخ فرکانسی به ازای شعاع‌های مختلف با در نظر گرفتن اثر ترم اندازه و بدون در نظر گرفتن اثر اندازه.

### ۲.۶. تحلیل فرکانسی

به منظور بررسی اثر ترم  $\varrho/h$  بر روی فرکانس رزونانس میکروصفحه، نمودار پاسخ فرکانسی تحت ولتاژ بایاس مشخصی به ازای ضخامت‌های مختلف برای دو حالت یکی با در نظر گرفتن اثر ترم  $\varrho/h$  ( $\varrho = 0^\circ/2h$ ) و دیگری بدون در نظر گرفتن آن ( $\varrho = 0^\circ$ ) در شکل ۵ آورده شده است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است با در نظر گرفتن اثر اندازه، با افزایش سفتی سیستم فرکانس و دامنه‌ی سیستم، به ترتیب، افزایش و کاهش قابل توجهی پیدا کرده‌اند.

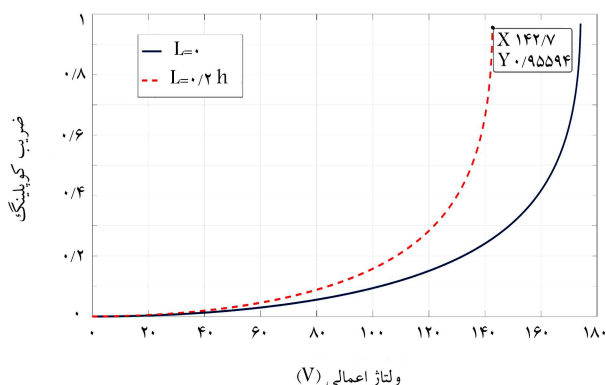
همچنین برای بررسی اثر  $\varrho/h$  بر روی فرکانس اصلی میکروصفحه، نمودار پاسخ فرکانسی تحت ولتاژ بایاس به ازای شعاع‌های مختلف برای تئورهای کلاسیک و گرادیان‌های مرتبه بالا، در شکل ۶ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن اثرات اندازه باعث تغییرات قابل توجهی در میزان فرکانس CMUT‌ها خواهد داشت و این مساله در تحلیل رفتار این سیستم‌ها بایستی مدنظر قرار گیرد. نمودار فشار خروجی و حساسیت گیرنده در شکل‌های ۷ و ۸ با فرض اینکه محیط اطراف آب است، به عنوان تابعی از فرکانس با استفاده از روابط ۳ و ۴ استخراج و نشان داده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که اثرات اندازه می‌تواند اثرات قابل توجهی بر روی پارامترهای اصلی سیستم یک ریزمبدل داشته باشد.

جدول ۲. ولتاژ کشندگی محاسبه شده برای شعاع‌های مختلف  $(\varrho = 0^\circ/2h)$ .

| شعاع                       | بدون در نظر گرفتن اثر | با در نظر گرفتن اثر |
|----------------------------|-----------------------|---------------------|
|                            | $\varrho/h$           | $\varrho/h$         |
| $R = 5^\circ \mu\text{m}$  | ۵۷۲/۰۰                | ۷۰۴/۰۰۰             |
| $R = 8^\circ \mu\text{m}$  | ۲۲۲/۹۰                | ۲۷۲/۴۰              |
| $R = 15^\circ \mu\text{m}$ | ۶۳/۵۰                 | ۷۷/۴۰               |
| $R = 5^\circ \mu\text{m}$  | ۵/۹۰                  | ۷/۱۰                |

جدول ۳. ولتاژ کشندگی محاسبه شده برای ضخامت‌های مختلف  $(\varrho = 0^\circ/2h)$ .

| ضخامت                | بدون در نظر گرفتن اثر | با در نظر گرفتن اثر |
|----------------------|-----------------------|---------------------|
|                      | $\varrho/h$           | $\varrho/h$         |
| $h = 2 \mu\text{m}$  | ۳۶/۳                  | ۴۴/۱                |
| $h = 4 \mu\text{m}$  | ۱۰۲/۲                 | ۱۲۴/۵               |
| $h = 8 \mu\text{m}$  | ۲۸۸/۶                 | ۳۵۳/۸               |
| $h = 10 \mu\text{m}$ | ۴۰۳/۲                 | ۴۹۶/۴               |



شکل ۴. مقایسه تغییرات ضریب تزویج الکترومکانیکی با تئوری کلاسیک و گرادیان مرتبه‌ی بالا.

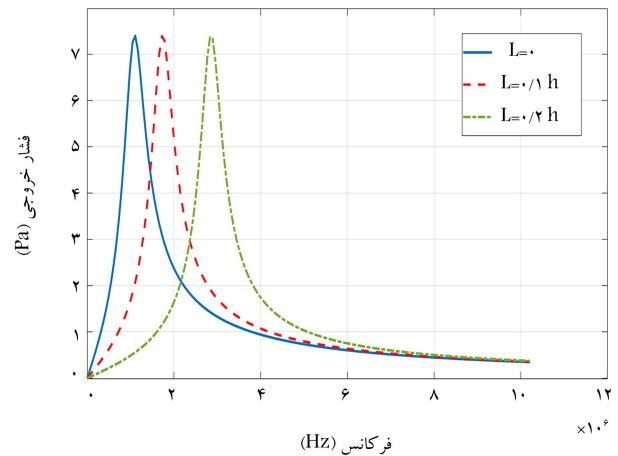
و شعاع‌های مختلف نقش مهمی در رفتار دیاگرام دارند. در جداول ۲ و ۳ هنگامی که  $\varrho = 0^\circ/2h$  می‌باشد، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف شعاع و ضخامت به ترتیب، اثر گرادیان مرتبه بالا بر روی ولتاژ کشندگی استاتیکی آورده شده است. همان‌گونه که جدول ۲ و ۳ نشان می‌دهد، اثرات اندازه در میزان ولتاژ کشندگی موثرند.

### ۳.۱.۶. تأثیر اثر اندازه بر رفتار استاتیکی سازه با ضریب تزویج الکترومکانیکی

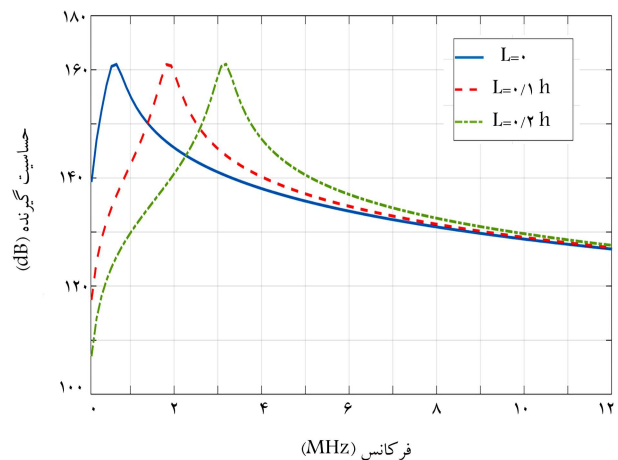
تاکنون در کارهای انجام شده،  $K_T^I$  که ضریب تزویج الکترومکانیکی می‌باشد، بر اساس نظریه کلاسیک بیان شده است. به همین دلیل در این تحقیق  $K_T^I$  در یک ساختار میکرونی با در نظر گرفتن اثر اندازه بر اساس نظریه گرادیان مرتبه بالا مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده است عملکرد این پارامتر تابعی از ولتاژ می‌باشد و با افزایش ولتاژ مقدار  $K_T^I$  نیز افزایش می‌یابد و در نهایت در ولتاژ کشندگی مقدار  $K_T^I$  به یک می‌رسد.

## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا درباره ویژگی‌ها و خصوصیات میبدل‌های میکروماشین‌کاری شده خازنی و کاربردهای آنها بحث شده است. برای مطالعه جامع و دقیق بر روی این تکنولوژی، به تحلیل الکتریکی و مکانیکی این فناوری با توجه به اثرات اندازه پرداخته شده است. حساسیت گیرنده و میزان فشار خروجی اکوستیک تولید شده توسط ساختار و همچنین ضریب تزیج محاسبه شده است. مدل مکانیکی براساس نظریه گرادیان مرتبه بالا استخراج شده و با استفاده از حل عددی، مدل ارائه شده برای یک میکروصفحه دایره‌ای تجزیه و تحلیل شده است. نتایج به دست آمده حاکی از این است که زمانی که پارامتر مقیاس اندازه قابل مقایسه با اندازه ضخامت یا شعاع میکروصفحه باشد، تأثیر ترم‌های غیرکلاسیک در معادلات حاکم بر رفتار دیافراگم ظاهر می‌شود. در نظر گرفتن ترم‌های غیرکلاسیک سبب بالا رفتن میزان سختی سیستم می‌شود و به دلیل افزایش میزان سختی سیستم، ولتاژ کشندگی بزرگتری را نسبت به صفحات با اندازه‌های هندسی بزرگتر از مقیاس میکرو/نانو پیش‌بینی می‌کند. علاوه بر این، با مقایسه مقادیر مختلف شعاع و ضخامت برای میکروصفحه مورد نظر، نشان داده شد که اثرات اندازه در میزان ولتاژ کشندگی و همچنین فرکانس طبیعی سیستم مؤثرند. برخلاف تئوری‌های غیرکلاسیک استفاده شده در کارهای پیشین که رفتار وابسته به اندازه فقط برای ضخامت‌های کوچک در نظر گرفته می‌شد، در این مقاله نشان داده شد که هنگامی که شعاع دیافراگم‌ها مقادیر کوچکی داشته باشند، اثرات اندازه در قیاس با شعاع نیز در رفتار سازه مؤثر خواهند بود. چرا که در صورت نادیده گرفتن این اثرات پیش‌بینی نادرست محدوده پایداری و رفتار مکانیکی سیستم محتمل است. همچنین در بخش آخرین تحقیق، پاسخ فرکانسی CMUT تحت یک نیروی الکترواستاتیک هارمونیک برای تئوری‌های کلاسیک و گرادیان مرتبه بالا نسبت به ضخامت و شعاع‌های مختلف ارائه شده است. در واقع با به کار بردن تئوری گرادیان مرتبه بالا در آنالیز رفتار مکانیکی ریزمیبدل خازنی نشان داده شد که تحلیلی دقیقتر برای رفتار مکانیکی CMUT در مقیاس‌های میکرو/نانو می‌توان ارائه کرد که اثرات وابسته به اندازه را نشان دهد.



شکل ۷. نمودار فشار خروجی.



شکل ۸. نمودار حساسیت گیرنده.

## منابع (References)

- Darbasi, S., Shourcheh, S.D., Rezazadeh, G. and et al. editors. "Mechanical behavior of a capacitive tunable ultrasound transducer for bio diagnostic application". *Electrical Engineering (ICEE), Iranian Conference On; IEEE*, pp.336-341 (2018). DOI:10.1109/ICEE.2018.8472639.
- Maillard, D., De Pastina, A., Abazari, A.M. and et al. "Avoiding transduction-induced heating in suspended microchannel resonators using piezoelectricity". *Microsystems & Nanoengineering*. **7**(1), pp. 1-7 (Apr 29 2021).
- Maadi, M. "Large-scale multi-frequency capacitive micromachined ultrasonic transducer (CMUT) arrays for ultrasound medical imaging and Therapeutic Applications", *A Thesis in Microsystems and Nano Devices* (2020).
- Wang, Z., He, C., Zhang, W., and et al. "Fabrication of 2-D capacitive micromachined ultrasonic transducer (CMUT) array through silicon wafer bonding". *Micro-machines*. Jan; **13**(1), pp. 99 (Jan 2022).
- La, T.G., Le, L.H. "Flexible and wearable ultrasound device for medical applications: A review on materials, structural designs, and current challenges". *Advanced Materials Technologies*, **7**(3), 2100798 (2021).
- Liu, J-Q., Fang, H-B., Xu, Z-Y. and et al. "A MEMS-based piezoelectric power generator array for vibration energy harvesting". *Microelectronics Journal*. **39**(5), pp. 802-6 (2008).
- Wang, J., Zheng, Z., Chan, J. and et al. "Capacitive micromachined ultrasound transducers for intravascular ultrasound imaging". *Microsystems & Nanoengineering*. **6**(1), pp.1-13 (2020).
- Haller, M.I. and Khuri-Yakub, B.T. "A surface micromachined electrostatic ultrasonic air transducer." *IEEE*

- Transactions On Ultrasonics, Ferroelectrics, And Frequency Control.* **43**(1), pp. 1-6 (1996).
9. Motieian Najar, MH. "Design and analysis of capacitive micromachined ultrasound transducer", *University of British Columbia*, Doctoral dissertation (2010).
  10. Martin, DT. "Design, fabrication, and characterization of a MEMS dual-backplate capacitive microphone", *A Dissertation of Doctoral degree*, (2007).
  11. Chou, CY., Chen, PC., Wu, HT. and et al. "Piston-shaped CMOS-MEMS CMUT front-end featuring force-displacement transduction enhancement". In *2021 21st International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (Transducers) IEEE* **20**, pp. 26-29 (jun 2021).
  12. Chapman, G., Votsi, H., Stock, TJ. and et al. "Microwave properties of 2D CMOS compatible co-planar waveguides made from phosphorus dopant monolayers in silicon". *Advanced Electronic Materials.* 2100989 (2022).
  13. Guldiken, RO. "Dual-electrode capacitive micromachined ultrasonic transducers for medical ultrasound applications", *Georgia Institute of Technology* (2008).
  14. Lin, D-S., Zhuang, X., Wong, SH. and et al. "Encapsulation of capacitive micromachined ultrasonic transducers using viscoelastic polymer". *Journal of Microelectromechanical systems.* **19**(6), pp. 1341-51 (2010).
  15. Mills, DM., "Editor medical imaging with capacitive micromachined ultrasound transducer (cMUT) arrays". *Ultrasonics Symposium, IEEE* (2004).
  16. Darbasi, S., Mirzaei, M.J., Abazari, A.M. and et al. "Adaptive under-actuated control for capacitive micro-machined ultrasonic transducer based on an accurate nonlinear modeling", *12 August 2021, PREPRINT (Version 1) available at Research Square*, <https://DOI.org/10.21203/rs.3.rs-756261/v1> (2021).
  17. Lin, D-S. "Interface engineering of capacitive micromachined ultrasonic transducers for medical applications", *Stanford University* (2011).
  18. Yu, Y., Pun, SH., Mak, PU. and et al. "Design of a collapse-mode CMUT with an embossed membrane for improving output pressure". *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, **63**(6), pp. 854-63 (2016).
  19. Yaralioglu, GG., Ergun, AS., Bayram, B. and et al. "Calculation and measurement of electromechanical coupling coefficient of capacitive micromachined ultrasonic transducers". *IEEE Transactions On Ultrasonics, Ferroelectrics, And Frequency Control*, **50**(4), pp. 449-56 (2003).
  20. Abazari, AM., Fotouhi, M., Tavakkoli, H., and et al. "An experimental study for characterization of size-dependence in microstructures via electrostatic pull-in instability technique". *Applied Physics Letters.* **116**(24), 244102 (2020).
  21. Abazari, AM., Safavi, SM., Rezazadeh, G. and et al. "Couple Stress Effect on Micro/Nanocantilever-based Capacitive Gas Sensor". *International Journal of Engineering*, **29**(6), pp. 852-61 (2016).
  22. Abazari, AM., Safavi, SM., Rezazadeh, G. and et al. "Modelling the size effects on the mechanical properties of micro/nano structures". *Sensors.* **15**(11), pp. 28543-62 (2015).
  23. Tsiatas, GC. "A new kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory". *International Journal of Solids and Structures.* **46**(13), pp. 2757-64 (2009).
  24. Fleck, N., Muller, G., Ashby, M. and et al. "Strain gradient plasticity: theory and experiment". *Acta Metallurgica et Materialia.* **42**(2), pp. 475-87 (1994).
  25. Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and et al. "The size-dependent natural frequency of bernoulli-euler micro-beams". *International Journal of Engineering Science.* **46**(5), pp. 427-37 (2008).
  26. Mousavi, SM. and Paavola, J. "Analysis of plate in second strain gradient elasticity". *Archive of Applied Mechanics.* **84**(8), pp. 1135-43 (Agu 2014).
  27. Lazopoulos, K. "On bending of strain gradient elastic micro-plates". *Mechanics Research Communications.* **36**(7), pp. 777-83 (2009).
  28. Rashvand, K., Rezazadeh, G., Mobki, H. and et al. "On the size-dependent behavior of a capacitive circular micro-plate considering the variable length-scale parameter". *International Journal of Mechanical Sciences.* **77**, pp. 333-42 (2013).
  29. Saadatmand, M. and Kook J. "Differences between plate theory and lumped element model in electrostatic analysis of one-sided and two-sided CMUTs with circular microplates". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* **42**(9), pp.1-11 (2020).