

# کنترل بازخورد مرزی برای ردیابی مسیر اجسام صلب در حضور تلاطم سیال کم عمق

میثم جوکار (دانشجوی دکتری)

حسن سالاریه\* (استاد)

حسین نجات پیش‌کناری (استاد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف (پاییز ۱۴۰۲)  
دوری ۳۹، شماره ۲، صص. ۸۳-۹۱ (پژوهشی)

در این مقاله، مسئله طراحی کنترل ردیابی مسیر با در نظر گرفتن تلاطم سیال کم عمق برای اجسام صلب مورد بررسی قرار گرفته است. در این راستا، دینامیک سیال با معادلات هذلولوی سنت - ونانت مدل شده و این معادلات در کنار معادله دیفرانسیل معمولی جسم صلب، یک سیستم معادلات کوپل و غیرخطی پاره‌یی - معمولی را تشکیل می‌دهند. هدف اصلی این پژوهش، طراحی یک کنترلر فیدبک مرزی نوآورانه برای غلبه بر خطای ردیابی مسیر است. با اعمال نیروی کنترلی منحصراً به جسم صلب، روش ارائه شده به طور مؤثری قادر است تمام حالات سیستم (بعد محدود و بی‌نهایت درجه آزادی) را پایدار کند. پیچیدگی اصلی این کنترلر این است که هیچ حسگری نباید در محدوده مایع نصب شود. در واقع، قانون کنترلی توسعه یافته برای محاسبه سیگنال لحظه‌یی فقط به (الف) خطای ردیابی جسم صلب و سرعت آن و (ب) فشار مایع در مرز سیال نیازمند است. پایداری مجانبی سیستم مدار بسته با استفاده از نظریه لیاپانوف و قضیه ناوردای لاسال و بدون هیچگونه گسسته‌سازی، ساده‌سازی و خطی‌سازی تحلیل خواهد شد. از دیگر مزیت‌های کنترلر فیدبک مرزی می‌توان به رفتار گذری بهتر آن در مقایسه با کنترلر تناسبی - مشتقی مرتبط و مقاومت آن نسبت به تأخیر زمانی و عدم قطعیت اشاره کرد که با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده می‌شوند.

واژگان کلیدی: جسم صلب، تلاطم کم عمق، مدل سنت - ونانت، سیستم معادلات کوپل پاره‌یی - معمولی، کنترل بازخورد مرزی.

meysam.jokar@mech.sharif.edu  
salarieh@sharif.edu  
nejat@sharif.edu

## ۱. مقدمه

### ۱.۱. مرور پژوهش‌های مرتبط

عمودی آن بسیار بزرگتر باشد، مدل حرکت سیال با شرط سیال غیرقابل تراکم و نیوتونی بر اساس معادلات سنت - ونانت<sup>۲</sup> به دست می‌آید. این معادلات، سیستمی از معادلات دیفرانسیل پاره‌یی هذلولوی، غیرخطی و کوپل هستند.<sup>[۴]</sup> مدل‌سازی یک جسم صلب حاوی سیال با فرض تلاطم کم عمق<sup>۳</sup> در پژوهش‌های بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است.<sup>[۶-۷]</sup> در این شرایط، آشکار است که با ترکیبی از معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌یی کوپل روبرو هستیم.

پایدارسازی سیستم‌های سیالاتی یک مسئله مهم و چالش برانگیز در زمینه تئوری و کاربرد سیستم‌های کنترلی است. بیشتر پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه، با ساده‌سازی معادلات دیفرانسیل پاره‌یی و گسسته‌سازی آنها (به کمک فرض صلبیت سیال و استفاده از معادله‌های مکانیکی پرکاربرد نظیر باندول و جرم - فنرا) همراه بوده است.<sup>[۱۲-۱۳]</sup> اما طراحی کنترلر در فضای معادلات ساده شده می‌تواند منجر

هنگامی که یک جسم صلب حاوی سیال تحت جابه‌جایی قرار می‌گیرد، حرکت سیال می‌تواند منجر به اعمال نیرو و گشتاور ناخواسته به جسم صلب و اثرگذاری نامطلوب بر دینامیک و کنترل سیستم کلی شود. این نوع حرکت سیال را تلاطم<sup>۱</sup> سیال می‌نامند. پدیده تلاطم از گذشته تاکنون و در طیف وسیعی از مسائل مهندسی نظیر ماهواره،<sup>[۱]</sup> خودرو،<sup>[۲]</sup> ربات<sup>[۳]</sup> و کشتی<sup>[۵]</sup> مورد توجه محققان بوده است. مدل استاندارد برای حرکت یک سیال با استفاده از سیستم معادلات دیفرانسیل پاره‌یی، غیرخطی و کوپل ناویر - استوکس به دست می‌آید که در حالت کلی، معادلاتی سهموی محسوب می‌شوند. اما در شرایطی که بعد افقی سیال در مقایسه با بعد

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۶/۹/۱۴۰، اصلاحیه ۱۹/۱۰/۱۴۰، پذیرش ۲۵/۱۱/۱۴۰.

استناد به این مقاله:

جوکار، میثم، سالاریه، حسن، و نجات پیش‌کناری، حسین، ۱۴۰۲. کنترل بازخورد مرزی برای ردیابی مسیر اجسام صلب در حضور تلاطم سیال کم عمق. مهندسی مکانیک شریف،

DOI:10.24200/J40.2023.61473.1661.۹۱-۸۳. صص. ۲(۳۹)

به ناپایداری اسپیل اور<sup>۴</sup> شود. در واقع، علاوه بر عوامل و اغتشاشات خارجی، کنترلر هم می‌تواند با تحریک مودهای مرتبه بالای مدل نشده، ناپایداری ایجاد کند.<sup>[۱۳، ۱۴]</sup> علاوه بر این مسئله، روش اشاره شده منجر به از دست رفتن دقت کنترلر می‌شود. این مسئله به خصوص در کاربردهای فضایی اهمیت بیشتری پیدا کرده است، زیرا نیاز به دقت و کنترل دقیق در این حوزه بسیار بالاست.<sup>[۱۵، ۱۶]</sup> بنابراین، در دوران اخیر، پژوهشگران تمرکز بیشتری بر کنترل سیستم‌های سیالاتی در فضای معادلات دیفرانسیل پاره‌یی داشته‌اند.<sup>[۱۶-۲۰]</sup> با این حال، در پژوهش‌های اشاره شده و برای ساده شدن طراحی کنترلر، معادلات پاره‌یی حول یک نقطه‌ی تعادل خطی‌سازی شده‌اند و این موضوع به‌ویژه برای سیستم‌های غیرخطی سیالاتی، باعث از دست رفتن دقت و کلیت مسئله می‌شود.

نکته‌ی دیگری که باید در نظر گرفته شود این است که بسیاری از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه کنترل سیستم‌های سیالاتی، بدون در نظر گرفتن دینامیک جسم صلب حاوی سیال است.<sup>[۲۱، ۲۲]</sup> این در حالی است که از لحاظ مباحث ریاضی، اضافه شدن معادله‌ی دیفرانسیل معمولی دینامیک جسم صلب به معادلات سنت - ونانت، تأثیر بسیار زیادی در افزایش دقت و در عین حال، پیچیدگی روند اثبات پایداری کنترلر طراحی شده دارد.

به‌نازگی، بخشی از نواقص اشاره شده با طراحی یک کنترلر مبتنی بر معادلات ناویر - استوکس برای حرکت وضعی یک ماهواره در حضور تلاطم سوخت، پوشش داده شده است.<sup>[۱]</sup> در پژوهش اشاره شده، ابتدا معادلات حاکم بر دینامیک وضعیت ماهواره و سوخت مایع با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. در ادامه، بدون ساده‌سازی معادلات، یک کنترلر لیاپانوف - مینا طراحی شده است. کنترلر طراحی شده، یک کنترلر بازخورد مرزی<sup>۵</sup> نیست. به عبارت بهتر، برای محاسبه‌ی سیگنال لحظه‌یی کنترلر، هیچ اطلاعاتی از مرز سیال به کار گرفته نمی‌شود و همین موضوع باعث پایین آمدن کیفیت پاسخ‌گذاری سیستم مدار بسته می‌شود. منظور از کنترلر فیدبک مرزی این است که مشابه کنترل فیدبک مرسوم در سیستم‌های بعد محدود،<sup>[۲۳، ۲۴]</sup> فیدبک از بخش بعد نامحدود (پارامترهای مرزی سیال) گرفته می‌شود. اما نیروی کنترلی به بخش دیگری از سیستم یعنی بخش بعد محدود (جسم صلب) وارد می‌شود.

## ۲.۱. نوآوری‌ها

با تأکید بر پژوهش‌های اشاره شده، در پژوهش حاضر، یک کنترلر فیدبک مرزی ردیابی موقعیت مبتنی بر معادلات دیفرانسیل پاره‌یی سیال و معادله‌ی یک بعدی حرکت انتقالی جسم صلب در برگیرنده‌ی آن توسعه داده می‌شود. معادلات ترکیبی مزبور در فرایند طراحی کنترلر به هیچ وجه گسسته‌سازی و خطی‌سازی نمی‌شوند. در سیستم مورد مطالعه، یک ارابه به‌عنوان جسم صلب دارای یک حفره‌ی نیمه پر از یک سیال نیوتونی، تراکم ناپذیر و کم‌عمق انتخاب شده است. ارابه محدود به حرکت در راستای  $x$  محور مختصات کارتزین است. به‌طور خلاصه و در مقایسه با پژوهش‌های موجود، نوآوری‌های پژوهش حاضر عبارتند از:

- برخلاف برخی از پژوهش‌های اخیر<sup>[۲۵، ۲۶]</sup> که ظرف حاوی سیال را بدون جرم فرض کرده‌اند، در این پژوهش، دینامیک جسم صلب در نظر گرفته شده است. بنابراین، معادلات حاکم بر مسئله شامل دو معادله‌ی پاره‌یی حاکم بر حرکت سیال (معادلات هذلولوی سنت - ونانت) و یک معادله‌ی معمولی حاکم بر حرکت افقی ارابه می‌شود. این معادلات، غیرخطی و کوپل هستند. همچنین در مراجع اشاره شده، قانون کنترلی برای محاسبه‌ی لحظه‌یی سیگنال کنترلر به اندازه‌گیری سرعت

و عمق سیال در تمام میدان سیال نیاز دارد و این موضوع امکان‌پذیری کنترلر را به شدت پایین می‌آورد؛

- در مقایسه با دیگر منابع<sup>[۲۵، ۲۶]</sup> در این پژوهش به جای استفاده از معادلات ناویر - استوکس، از معادلات سنت - ونانت حاکم بر تلاطم کم‌عمق استفاده شده است. می‌توان نشان داد که با علم به شرایط کم‌عمق سیال، میزان تلاش کنترلی برای پایداری‌سازی سیستم سیالاتی کمتر از حالتی است که معادلات کامل حاکم بر سیال در نظر گرفته شوند.<sup>[۲۶]</sup> از طرف دیگر و از منظر ریاضی، در این شرایط معادلات پاره‌یی از نوع سهموی نبوده، بلکه از نوع هذلولوی هستند. بنابراین، با توجه به طبیعت نظریه‌ی کنترل پاره‌یی، تغییرات بسیار گسترده‌یی در روند طراحی و اثبات پایداری کنترلر ایجاد خواهد شد؛

- متفاوت از برخی منابع<sup>[۱۱، ۱۲]</sup> که در آنها کنترلرهایی بر مبنای معادلات گسسته‌سازی شده (یا بر اساس دینامیک سیال صلب) طراحی شده است، کنترلر ارائه شده در پژوهش حاضر، یک کنترلر فیدبک مرزی است که علاوه بر موقعیت لحظه‌یی ارابه و خطای ردیابی، از اطلاعات مرزی سیال بهره می‌برد. این روش در مقایسه با کنترلر تناسبی - مشتقی (با پس‌خوراندن از سرعت لحظه‌یی ارابه و خطای ردیابی<sup>[۱]</sup>)، رفتار گذرای بسیار بهتری دارد. بر اساس شبیه‌سازی‌ها مشخص می‌شود که این کنترلر نسبت به وجود عدم قطعیت و تأخیر در دینامیک سیستم مقاوم است. با استفاده از این روش می‌توان خطای ردیابی موقعیت ارابه و بی‌نهایت حالت سیال را به‌صورت مجانبی به سمت صفر میل داد. نیروی کنترلی توسعه داده شده فقط به ارابه وارد می‌شود و عملگرهای مرسوم نظیر یک رانشگر<sup>۶</sup> برای اعمال کنترلر کافی هستند. به عبارت بهتر، این کنترلر از نوع فیدبک مرزی است، نه مرزی.

## ۳.۱. ساختار مقاله‌ی حاضر

در این مقاله و در بخش ۲، پیش‌زمینه‌یی دینامیکی شامل معرفی معادلات سنت - ونانت و کوکر ارائه شده است. در ادامه و در بخش ۳، کنترلر مورد بحث طراحی شده و با استفاده از نظریه‌ی لیاپانوف، پایداری مجانبی مدار بسته اثبات شده است. در پایان این بخش، دو نکته‌ی بسیار مهم در ارتباط با تفاوت‌های کنترلر مرزی و بازخورد مرزی و سنسورهای لازم برای اجرای عملی روش ارائه شده مطرح شده است. در بخش ۴ و با استفاده از یک روش ابتکاری به‌طور کامل ضمنی برای شبیه‌سازی عددی، کارایی کنترلر طراحی شده بررسی شده است. در پایان، نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

## ۲. پیش‌زمینه‌ی دینامیکی

در این بخش، توصیف ریاضی دینامیک افقی یک جسم صلب با حفره‌ی نیمه پر از یک سیال نیوتونی ارائه شده است. شکل ۱ نمایشی از سیستم مورد بحث است. در این شکل، دو دستگاه مختصات معرفی شده‌اند: یکی دستگاه اینرسی  $Oxy$  و دیگری دستگاه بدنی  $O'\xi\eta$  و دستگاه دوم متصل به جسم صلب است. پارامترهای  $x(t)$ ،  $t$ ،  $g$ ،  $m_b$ ،  $h(t, \xi)$  و  $f(t)$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی زمان، موقعیت افقی ارابه نسبت به مرجع ثابت، عمق سیال در حفره، جرم ارابه‌ی خالی از سیال، شتاب جهانی گرانش و نیروی کنترلی هستند. فشار نسبی هوای بالای سیال برابر با صفر فرض شده است. همچنین در این پژوهش، فرض بر این است که سیال کم عمق است. به عبارت دیگر، بعد افقی سیال بسیار بزرگتر از بعد عمودی آن است. در

یک کنترلر فیدبک مرزی میثنی بر معادلات ۱ تا ۵ است به طوری که سیستم مدار بسته پایدار بماند، جسم صلب به موقعیت افقی دلخواه برود و بی نهایت مود ارتعاشی سیال صفر شوند.

### ۲.۳. کنترلر و اثبات پایداری لیاپانوف

برای احراز اهداف اشاره شده در زیر بخش قبل و بر اساس معادلات ۱ تا ۵، نیروی کنترلی زیر پیشنهاد می شود که مطابق شکل ۱، به جسم صلب وارد می شود:

$$f(t) = \left( k_1 + k_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot f_l - k_p e_x - k_d \dot{x} \quad (6)$$

در رابطه‌ی بالا،  $k_1 > -1$  و  $k_1, k_2, k_p, k_d > 0$ ، ثابت،  $\partial/\partial t$  عملگر مشتق زمانی، در رابطه  $e_x = x - x_{des}$  خطای ردیابی مسیر و  $x_{des}$  موقعیت افقی دلخواه هستند. در واقع  $k_d, k_p$  ضرایب بخش تناسبی - مشتقی (PD) کنترلر پیشنهادی هستند. همچنین داریم:

$$f_l = \rho g \int_0^l h h_\xi d\xi \quad (7)$$

با استفاده از انتگرال جزیه‌جزم می توان نوشت:

$$f_l = \frac{1}{\rho} \rho g \left[ h^\top(t, l) - h^\top(t, 0) \right] \quad (8)$$

قضیه (نتیجه‌ی اصلی): پس از در نظر گرفتن سیستم دینامیکی توصیف شده با معادلات ۱ تا ۵، فرض می شود که نیروی کنترلی  $f(t)$  مطابق معادله ۶ باشد. در این صورت، تمام حالات سیستم شامل  $(e_x, \dot{x}, h - \frac{m_l}{\rho l}, U)$  به صورت مجانبی به سمت صفر میل می کنند.

اثبات: تحلیل پایداری سیستم معادلات ۱ تا ۵ تحت نیروی کنترلی معادله ۶ با استفاده تابع کاندیدای لیاپانوف زیر انجام می شود:

$$V(t) = V_a(t) + V_b(t) + V_c(t) \quad (9)$$

که در آن:

$$V_a(t) = \int_0^l \left[ \frac{1}{\rho} \rho h(U + \dot{x})^\top + \frac{1}{\rho} \rho g \bar{h}^\top \right] d\xi \quad (10)$$

$$V_b(t) = \frac{1}{\rho} \Delta^\top \quad (11)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{\rho} \alpha_1 e_x^\top \quad (12)$$

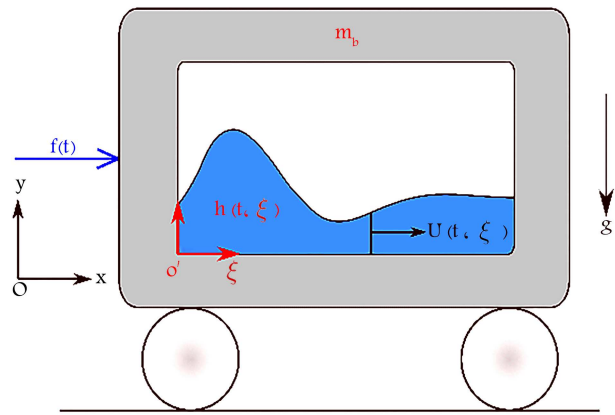
در معادلات بالا و معادله ۱۳،  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  دو ثابت مثبت هستند و:

$$\Delta = m_b \dot{x} + \alpha_2 (-f_l + \alpha_1 e_x) \quad (13)$$

$$\bar{h} = h - h^*; h^* = \frac{m_l}{\rho l} \quad (14)$$

رابطه ۱۳، مربوط به محاسبه  $\Delta$ ، برای ایجاد ترم‌های مرزی در کنترلر، به تابع کاندیدای لیاپانوف معادله ۹ اضافه شده است. در بخش شبیه‌سازی مشخص می شود که ترم‌های مرزی، رفتار گذرای سیستم مدار بسته را به طور مؤثری بهبود می دهند. واضح است که تابع لیاپانوف معادله ۹ مثبت معین است. مشتق این تابع از تساوی زیر به دست می آید:

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_a(t) + \dot{V}_b(t) + \dot{V}_c(t) \quad (15)$$



شکل ۱. تعریف دستگاه‌های مختصات و پارامترهای سیستم.

این شرایط، شتاب عمودی سیال برابر با صفر خواهد بود. فرضیات دیگر این مسئله، تراکم ناپذیری و غیرلزج (اما چرخشی) بودن سیال است.

بر اساس فرضیات بالا، معادلات حرکت سیال کم عمق، معروف به معادلات سنت - ونانت به صورت زیر به دست می آید:<sup>[۶]</sup>

$$h_t + hU_\xi + Uh_\xi = 0 \quad (1)$$

$$U_t + UU_\xi + gh_\xi = -\ddot{x} \quad (2)$$

در روابط بالا،  $t$  مشتق نسبت به زمان و  $\xi$  مشتق نسبت به بعد افقی حفره هستند. دو معادله پاره‌یی، هذلولوی و غیرخطی بالا، با معادله‌ی حاکم بر حرکت افقی ارباب موسوم به عبارت کوکر<sup>۷</sup> کوپل هستند:<sup>[۲۶]</sup>

$$m_b \ddot{x} = \frac{1}{\rho} \rho g \left[ h^\top(t, l) - h^\top(t, 0) \right] + f(t) \quad (3)$$

معادلات ۱ تا ۳ یک سیستم معادلات کوپل هستند و این گونه سیستم‌ها در ادبیات کنترل با عنوان آبشار پاره‌یی - معمولی<sup>۸</sup> شناخته می شوند. شرایط مرزی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$U(t, 0) = U(t, l) = 0 \quad (4)$$

و شرط پیوستگی (عدم ریزش<sup>۹</sup>) با فرض بعد واحد در راستای عمود بر صفحه به شکل زیر برقرار است:

$$\int_0^l \rho h d\xi = m_l = cte. \quad (5)$$

در روابط بالا،  $m_l, U, l, \rho$  به ترتیب بیانگر جرم سیال، طول افقی حفره، سرعت افقی سطح آزاد سیال و چگالی سیال هستند.

### ۳. طراحی سیستم کنترلی

این بخش به معرفی اهداف کنترلی، پیشنهاد رابطه‌ی کنترلر و اثبات پایداری آن تحت نظریه‌ی پایداری لیاپانوف اختصاص دارد.

#### ۱.۳. اهداف کنترلی

در این پژوهش، مسئله‌ی حرکت افقی یک جسم صلب دارای حفره‌ی نیمه پر از سیال با تلاطم کم عمق بررسی شده است. هدف اصلی کنترلی در این مقاله، طراحی

جمله‌ی اول سمت راست معادله ۱۵ با استفاده از معادله ۱۰ برابر است با:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(t) = & \int_0^l \frac{1}{\tau} \rho h_t (U + \dot{x})^2 d\xi \\ & + \int_0^l \rho h (U + \dot{x}) (U_t + \ddot{x}) d\xi \\ & + \int_0^l [\rho g h h_t - \rho g h^* h_t] d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

با جایگذاری معادلات ۱ و ۲ در تساوی بالا، استفاده از معادله ۵ و کمی ساده‌سازی ریاضی داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(t) = & \rho \int_0^l (-\frac{\tau}{\tau} h U^\tau U_\xi - \frac{1}{\tau} U^\tau h_\xi) d\xi \\ & + \rho \int_0^l (-2 \dot{x} h U U_\xi - \dot{x} U^\tau h_\xi) d\xi \\ & + \rho \int_0^l (-2 g U h h_\xi - g h^\tau U_\xi - g \dot{x} h h_\xi) d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

و با استفاده از انتگرال جزیه‌جن عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{V}_a(t) = -\rho g \dot{x} \int_0^l h h_\xi d\xi \quad (18)$$

با استفاده از معادلات ۳ و ۱۱، جمله‌ی دوم سمت راست معادله ۱۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_b(t) = & \Delta \dot{\Delta} \\ = & \Delta \left[ f_l + f(t) - \alpha_r \frac{\partial f_l}{\partial t} + \alpha_v \alpha_r \dot{x} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

در نهایت، جمله‌ی سوم سمت راست معادله ۱۵ عبارت است از:

$$\dot{V}_c(t) = \alpha_v e_x \dot{x} \quad (20)$$

با جایگذاری معادلات ۱۸ تا ۲۰ در معادله ۱۵ و با یادآوری تساوی معادله ۷، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -f_l \dot{x} + \alpha_v e_x \dot{x} \\ & + \Delta \left[ f_l + f(t) - \alpha_r \frac{\partial f_l}{\partial t} + \alpha_v \alpha_r \dot{x} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

حال، نیروی کنترلی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\begin{aligned} f(t) = & -f_l + \alpha_r \frac{\partial f_l}{\partial t} - \alpha_v \alpha_r \dot{x} \\ & - \frac{1}{\alpha_r} \dot{x} - \alpha_r \Delta \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن،  $\alpha_r$  یک ثابت مثبت است. داریم:

$$\begin{aligned} k_v = & \alpha_r \alpha_r - 1 > -1 \\ k_r = & \alpha_r > 0 \\ k_p = & \alpha_v \alpha_r \alpha_r > 0 \\ k_d = & \alpha_v \alpha_r + \alpha_r m_b + \frac{1}{\alpha_r} > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

بنابراین با استفاده از معادلات ۱۳، ۲۲ و ۲۳ به نیروی کنترلی پیشنهاد شده در معادله ۶ می‌رسیم. اگر معادله ۲۲ را در معادله ۲۱ جایگذاری کنیم، تساوی زیر برای مشتق تابع لیاپانوف حاصل می‌شود که منفی نیمه معین است:

$$\dot{V}(t) = -\alpha_r \Delta^\tau - \frac{m_b}{\alpha_r} \dot{x}^\tau \leq 0 \quad (24)$$

### ۳.۳. اثبات پایداری مجانبی سیستم مدار بسته

گزاره: با توجه به نامساوی ۲۴، می‌توان نتیجه گرفت که پایداری لیاپانوف برقرار است. به عبارت دیگر، تمام متغیرهای موجود در تابع لیاپانوف ۹ شامل  $(e_x, \dot{x}, \bar{h}, U)$  محدود باقی می‌مانند. برای اثبات پایداری مجانبی این متغیرها از قضیه‌ی نوردای لاسال ۱۰ استفاده می‌کنیم. [۲۷] بر طبق این قضیه، تمام پاسخ‌های سیستم معادلات ۱ تا ۵ تحت نیروی کنترلی معادله ۶ به صورت مجانبی به سمت مجموعه‌ی نوردای زیر همگرا می‌شود:

$$S_i = \left\{ e_x, \dot{x}, \bar{h}, U \mid \dot{V}(t) = 0 \right\} \quad (25)$$

شروط لازم برای برقراری تساوی  $\dot{V}(t) = 0$  عبارتند از:

$$\Delta = 0 \quad (26)$$

$$\dot{x} = 0 \quad (27)$$

در این شرایط، نیروی کنترلی برابر است با:

$$f(t) = -f_l + \alpha_r \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (28)$$

با قرار دادن معادله ۲۸ در معادله ۳ و استفاده از معادلات ۷ و ۸ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h h_\xi d\xi = 0 \quad (29)$$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که  $h$  تابعی از زمان نبوده و در واقع  $h = h(\xi)$  است. حال با استفاده از معادله‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$(hU)_\xi = 0 \rightarrow U(t, \xi) = \frac{C(t)}{h(\xi)} \quad (30)$$

و در آن،  $C(t)$  تابعی از زمان است و از شرایط مرزی تعیین می‌شود. تساوی دوم معادله ۳۰ باید در همه‌ی زمان‌ها برقرار باشد. بنابراین، با استفاده از شرایط مرزی معادله ۴ می‌توان نتیجه گرفت که  $C(t) \equiv 0$  و متعاقباً  $U(t, \xi) \equiv 0$ . با جایگذاری در معادله ۲ و استفاده از معادله ۵ داریم:

$$g h_\xi = 0 \rightarrow h(t, \xi) = cte. = h^* \quad (31)$$

در انتها و با استفاده از معادلات ۷، ۱۳، ۲۶، ۲۷ و ۳۱، تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$e_x = 0 \quad (32)$$

پس می‌توان دریافت که تنها عضو مجموعه‌ی نوردای ۲۵ برابر است با:

$$S_i = \{e_x, \dot{x}, \bar{h}, U\} = \{0\} \quad (33)$$

بنابراین، قانون کنترل فیدبک مرزی طراحی شده، پایداری مدار بسته و همگرایی مجانبی تمام حالات سیستم شامل خطای ریدایی مسیر و تلاطم سیال را تضمین می‌کند و قضیه اثبات می‌شود.

**نکته‌ی ۱:** همانطور که پیشتر اشاره شد، کنترلر طراحی شده در این پژوهش از نوع فیدبک مرزی است، نه مرزی. به عبارت دیگر، برای اعمال کنترلر و محاسبه‌ی سیگنال لحظه‌ی کنترلی، برخی از پارامترهای مرزی سیال باید محاسبه شوند، اما هیچگونه عملگرایی در مرز سیال وجود ندارد. در واقعیت، عملگرهای مرزی، امکانپذیری کنترلر را کاهش می‌دهند. بنابراین، برای اعمال کنترلر طراحی شده در این پژوهش، استفاده

دقت این روش در فضا و زمان از مرتبه‌ی دو است. در این روش، محور  $\xi$  (سطح آزاد سیال) به  $J - 1$  قسمت با طول  $\Delta\xi = l / (J - 1)$  تقسیم می‌شود و

$$\xi_j = (j - 1) \Delta\xi; j = 1, 2, \dots, J \quad (39)$$

همچنین،

$$t_n = n \Delta t; n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

$$h_j^n = h(t_n, \xi_j); U_j^n = U(t_n, \xi_j) \quad (41)$$

برای گسسته‌سازی معادلات ۱ تا ۳، مشتقات مکانی با تفاضلات مرکزی و مشتقات زمانی با تفاضلات پیشرو تقریب زده می‌شوند. در این صورت، فرم گسسته‌ی معادلات ۱ تا ۳ به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + \tilde{U}_j \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} + \tilde{h}_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \tilde{U}_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \quad (43)$$

$$+ g \frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} = -\frac{1}{m_b} [f_i(t) + f(t)]$$

$$m_b \ddot{x} = f_i(t) + f(t) \quad (44)$$

کمیت‌های دارای علامت  $\sim$ ، مقادیر میانی ضرایب غیرخطی هستند. برای تقابل با این غیرخطی‌گری‌ها، در هر گام زمانی فرض می‌شود که  $\tilde{h}_j = h_j^n$  و  $\tilde{U}_j = U_j^n$  در این صورت، تخمینی برای  $h_j^{n+1}$  و  $U_j^{n+1}$  حاصل شده و مقادیر  $\tilde{h}_j$  و  $\tilde{U}_j$  به روزرسانی می‌شوند. این فرایند تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف مقادیر لحظه‌ی و اخیر  $h$  و  $U$  به اندازه‌ی دلخواهی کوچک شود. سیستم گسسته‌سازی شده به صورت بلوک سه‌قطری زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} & -\tilde{\mathbf{A}}_j^{n+1} \mathbf{z}_{j-1}^{n+1} + \mathbf{B}^{n+1} \mathbf{z}_j^{n+1} + \tilde{\mathbf{A}}_j^{n+1} \mathbf{z}_{j+1}^{n+1} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}_j^n + \alpha^n \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

و در آن،

$$\mathbf{z}_j^n = \begin{bmatrix} h_j^n \\ U_j^n \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \begin{bmatrix} \tilde{U}_j & \tilde{h}_j \\ g & \tilde{U}_j \end{bmatrix}; \mathbf{B}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\alpha^n = f_i(t) + f(t) \quad (48)$$

برای استخراج معادلات گسسته در نقاط مرزی  $j = 1$  و  $j = J$ ، از شرایط مرزی استفاده شده است. شرط مرزی در  $x = 0$  عبارت است از  $U = 0$ . مدل گسسته‌ی این شرط به صورت زیر است:

$$U_1^n = 0; \frac{U_1^n + U_2^n}{2} = 0 \quad (49)$$

که در آن،  $U_1^n$  یک نقطه‌ی مجازی در فاصله‌ی  $\Delta\xi$  سمت چپ  $x = 0$  است. برای محاسبه‌ی شرط مرزی  $h$  در  $x = 0$  از قانون پایستگی جرم استفاده شده است:

$$h_t + \tilde{h} U_x = 0 \rightarrow \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\Delta t} + \tilde{h}_1 \frac{U_2^{n+1}}{\Delta\xi} = 0 \quad (50)$$

از عملگرهایی نظیر رانشرگرها که فقط به جسم صلب نیرو اعمال می‌کنند، کافی هستند؛

**نکته‌ی ۲:** دو مجموعه حسگر برای محاسبه‌ی سیگنال لحظه‌ی کنترلر فیدبک مرزی ارائه شده لازم است. یک مجموعه برای اندازه‌گیری متغیرهای زمانی نظیر موقعیت و سرعت لحظه‌ی ارباب به کار می‌رود و مجموعه دیگر برای متغیرهای مکانی - زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان سنسورهای مجموعه‌ی اول، می‌توان از پتانسیومتر و انکودر استفاده کرد. برای معرفی سنسورهای دسته‌ی دوم، ابتدا در مورد جمله‌ی  $f_i$  بیشتر توضیح داده می‌شود. با استفاده از مکانیک سیالات و در دیدگاه اولرین، معادلات مومنوم برای سیال تراکم‌ناپذیر و غیر لزج در دستگاه بدنی جسم صلب حاوی آن عبارت است از: [۲۶]

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\ddot{x} \quad (34)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \quad (35)$$

در روابط بالا،  $p$  فشار،  $u$  سرعت در راستای محور  $\xi$ ،  $v$  سرعت در راستای محور  $y$  و  $D/Dt$  مشتق کلی سیال نسبت به زمان هستند. حال با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^l \int_0^h \rho u dy d\xi + (m_l + m_b) \dot{x} \right] = f(t) \quad (36)$$

جمله‌ی اول سمت چپ به صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^h \rho u dy d\xi &= \int_0^l \int_0^h \rho \frac{Du}{Dt} dy d\xi \\ &= \int_0^l \int_0^h \left( -\frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho \ddot{x} \right) dy d\xi \\ &= -m_l \ddot{x} - \int_0^l \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h p dy \right) d\xi \\ &+ \int_0^l p(t, \xi, h(t, \xi)) h_\xi d\xi \\ &= -m_l \ddot{x} - \int_0^l p dy \Big|_{\xi=0}^{\xi=l} \end{aligned} \quad (37)$$

در رابطه‌ی بالا، برای تساوی دوم از معادله‌ی ۳۴، برای تساوی سوم از قضیه‌ی انتقال رینولدز و برای تساوی آخر از فرض فشار نسبی صفر در هوای محبوس در حفره استفاده شده است. حال با جایگذاری نتیجه‌ی معادله ۳۷ در معادله ۳۶ و مقایسه با معادلات ۳ و ۸ داریم:

$$f_i = \int_0^l p dy \Big|_{\xi=l} - \int_0^l p dy \Big|_{\xi=0} \quad (38)$$

با توجه به تساوی بالا، نتیجه می‌شود که برای سنجش پارامترهای مرزی سیال، فقط کافیسیت از سنسور فشارسنج استفاده شود. به بیان بهتر، برای محاسبه‌ی سیگنال لحظه‌ی کنترلر، می‌توان از تعداد محدودی فشارسنج ساده در دو مرز چپ و راست حفره بهره برد و به کمک درون‌یابی، داده‌های مرز را در هر نقطه‌ی تعیین کرد.

## ۴. شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از حل معادلات ۱ تا ۵ تحت نیروی کنترلی معادله ۶، به بررسی عملکرد کنترلر ارائه شده پرداخته شده است.

### ۱.۴. روش حل

برای حل سیستم معادلات کوپل درگیر (شامل دو معادله‌ی پاره‌ی هذلولوی و یک معادله‌ی معمولی)، یک روش ابتکاری به طور کامل ضمنی<sup>۱۱</sup> به کار گرفته شده است.

به همین ترتیب و برای  $x = 1$  می توان نوشت:

$$U_J^n = 0; \frac{U_{J-1}^n + U_{J+1}^n}{2} = 0 \quad (51)$$

$$h_t + \tilde{h}U_\xi = 0 \rightarrow \frac{h_J^{n+1} - h_J^n}{\Delta t} - \tilde{h}_J \frac{U_{J-1}^{n+1}}{\Delta \xi} = 0 \quad (52)$$

که در آن،  $U_{J+1}^n$  یک نقطه‌ی مجازی در فاصله‌ی  $\Delta \xi$  سمت راست  $x = 1$  است. ترکیب معادلات ۴۹ و ۵۰ و همچنین معادلات ۵۱ و ۵۲ به تساوی‌های زیر منتهی می‌شود:

$$z_1^{n+1} + \frac{\tilde{h}_1 \Delta t}{\Delta \xi} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_1^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_1^n \quad (53)$$

$$-\frac{\tilde{h}_J \Delta t}{\Delta \xi} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_{J-1}^{n+1} + z_J^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_J^n \quad (54)$$

مجموعه‌ی معادلات ۴۵، ۵۳ و ۵۴، در هر گام زمانی  $2J$  معادله با ماتریس ضرایب سه‌قطری را تشکیل می‌دهد. در هر مرحله، سیستم معادلات مزبور به روش گاوس - جوردن و معادله‌ی معمولی دینامیک سیستم (معادله‌ی ۴۴) به روش رانگ - کوتا حل می‌شوند. روش ارائه شده، یک روش به‌طور کامل ضمنی و به لحاظ ساختاری، اتلافی<sup>۱۲</sup> است.

## ۲.۴. پارامترهای سیستم و ضرایب کنترلی

پارامترهای فیزیکی سیستم در نظر گرفته شده و ضرایب کنترلی فیدبک مرزی توسعه داده شده به ترتیب در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند.<sup>[۱۲]</sup> همچنین، گام زمانی و گام مکانی به ترتیب  $1/8$  و  $1/8$  سانتیمتر در نظر گرفته شده است. ضرایب کنترلی به نحوی انتخاب شده‌اند که پاسخ گذرای مطلوب به دست آید. این ضرایب باید شرایط معادله ۲۳ را احراز کنند. روش‌های متعددی برای تنظیم این ضرایب وجود دارد که بر اساس اعمال محدودیت بر روی پارامترهای پاسخ گذرای سیستم نظیر انحراف معیار، خطای RMS و زمان نشست هستند. اطلاعات تکمیلی در مراجع ارائه شده است.<sup>[۱۲، ۲۳]</sup> توجه به این نکته ضروری است که گسسته‌سازی معادلات در

جدول ۱. پارامترهای فیزیکی سیستم شامل شرایط اولیه.

پارامتر	مقدار
$m_b$	$15 Kg$
$\rho$	$1000 Kg.m^{-3}$
$l$	$8 cm$
$x(0)$	$0 m$
$\dot{x}(0)$	$-0.5 m.sec^{-1}$
$U(0, x)$	$0 m.sec^{-1}$
$h(0, x)$	$4 cm$

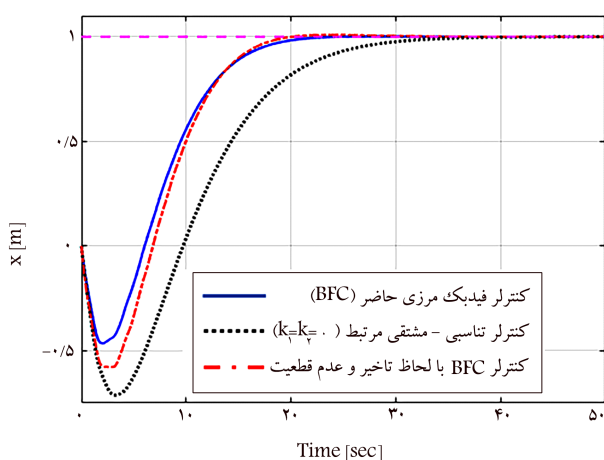
جدول ۲. ضرایب کنترلی فیدبک مرزی طراحی شده.

پارامتر	مقدار
$k_1$	$2$
$k_2$	$0.5 sec$
$k_p$	$4 N.m^{-1}$
$k_d$	$25 N.sec.m^{-1}$
$x_{des}$	$1 m$

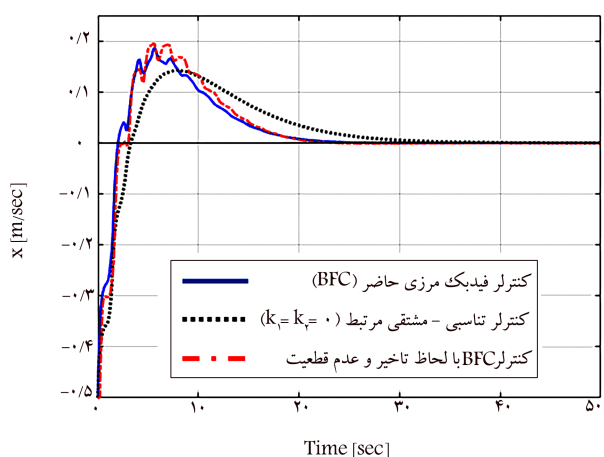
روش عددی معرفی شده، فقط برای شبیه‌سازی است و هیچ تأثیری بر روند طراحی و اثبات پایداری کنترلی ندارد. تمام کدهای محاسباتی و رسم نمودارها در نرم افزار MATLAB ۲۰۱۸b انجام شده است.

## ۳.۴. بررسی مقاومت کنترلی طراحی شده به کمک شبیه‌سازی

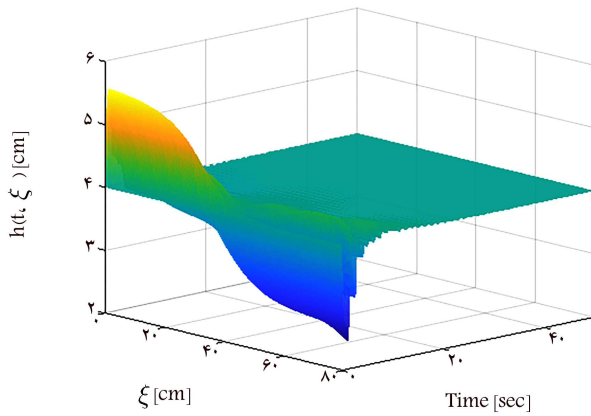
برای بررسی کارایی و مقاومت کنترلی ارائه شده نسبت به تأخیر و عدم قطعیت، سعی بر این بوده تا فقط در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ مقداری تأخیر و عدم قطعیت در نظر گرفته شود. برای این هدف، فرض بر این است که تأخیری برابر با  $0.2$  ثانیه در اعمال کنترلی وجود دارد. همچنین، فرض بر این است که مقدار واقعی چگالی سیال،  $20$  درصد کمتر از مقداری است که در جدول ۱ نوشته شده است (مقدار نامی). با یک نگاه کلی به سه شکل مزبور می‌توان دریافت که کنترلی طراحی شده قادر است سیستم مدار بسته را حتی در حضور تأخیر و عدم قطعیت پایدار کند.



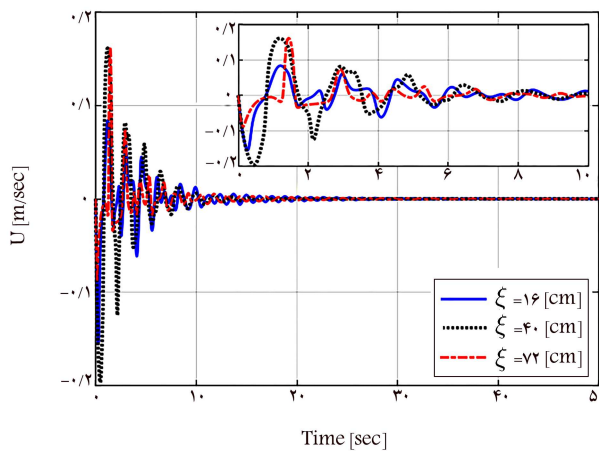
شکل ۲. موقعیت جسم صلب به صورت تابعی از زمان تحت کنترلی فیدبک مرزی طراحی شده بدون تأخیر و عدم قطعیت (آبی ممتد)، بخش تناسبی - مشتقی کنترلی طراحی شده بدون تأخیر و عدم قطعیت (سیاه نقطه‌چین) و کنترلی فیدبک مرزی طراحی شده با تأخیر و عدم قطعیت (قرمز نقطه خط).



شکل ۳. سرعت خطی جسم صلب به صورت تابعی از زمان تحت کنترلی فیدبک مرزی طراحی شده بدون تأخیر و عدم قطعیت (آبی ممتد)، بخش تناسبی - مشتقی کنترلی طراحی شده بدون تأخیر و عدم قطعیت (سیاه نقطه‌چین) و کنترلی فیدبک مرزی طراحی شده با تأخیر و عدم قطعیت (قرمز نقطه خط).



شکل ۵. عمق سیال درون حفره تحت کنترلر فیدبک مرزی به صورت تابعی از بُعد افقی حفره و زمان.

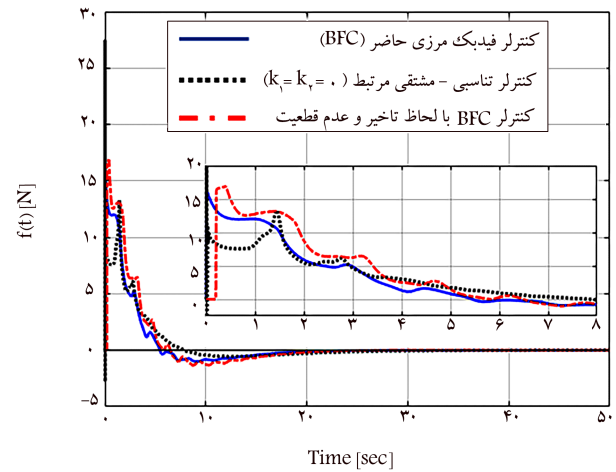


شکل ۶. سرعت سطح آزاد سیال درون حفره تحت کنترلر فیدبک مرزی بر حسب زمان در سه نقطه‌ی  $\xi = 16\text{ cm}$  (آبی ممتد)،  $\xi = 40\text{ cm}$  (سیاه نقطه‌چین) و  $\xi = 72\text{ cm}$  (قرمز نقطه‌خط).

خود ( $h^*$ ) نشان می‌دهد. نکته‌ی مهم دیگر این نمودار، اثبات معادله ۵ در هر لحظه از زمان است. در نهایت و در شکل ۶، نمودار سرعت سیال در سه نقطه از سطح آزاد به صورت تابعی از زمان آورده شده است. نمودار مابقی نقاط سطح آزاد نیز این چنین رفتاری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بعد از حدود ۱۰ ثانیه، سرعت سطح آزاد و در ادامه آن سرعت تمام المان‌های سیال (به دلیل فرض شتاب عمودی صفر در سیال کم عمق) به صفر می‌رسد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به مسئله‌ی کنترل ردیابی مسیر برای یک جسم صلب با وجود تلاطم سیال کم عمق پرداخته شده است. به طور خلاصه، حرکت افقی یک جسم صلب دارای حفره در نظر گرفته شد؛ به طوری که حفره نیمه پراز یک سیال نیوتونی، تراکم ناپذیر، غیرلزج (اما چرخشی) و کم عمق است. سیستم معادلات حاکم بر مسئله‌ی مزبور، شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌یی، غیرخطی و هذلولوی موسوم به معادلات سنت - ونانت (حاکم بر دینامیک سیال) و یک معادله‌ی معمولی (حاکم بر دینامیک جسم صلب) می‌شود. بنابراین، این معادلات یک سیستم کوپل پاره‌یی - معمولی را تشکیل



شکل ۴. کنترلر فیدبک مرزی طراحی شده بدون تأخیر و عدم قطعیت (آبی ممتد)، بخش تناسبی - مشتقی مرتبط ( $k_p = k_v = 0$ ) (سیاه نقطه‌چین) و کنترلر فیدبک مرزی طراحی شده با تأخیر و عدم قطعیت (قرمز نقطه‌خط).

جدول ۳. مشخصات پاسخ گذرای سیستم مدار بسته تحت کنترلر فیدبک مرزی (BFC) و تناسبی - مشتقی مرتبط (PD) و فیدبک مرزی با تأخیر و عدم قطعیت (BFC - DU).

BFC - DU	PD	BFC	کنترلر
۱۸/۱۲sec	۳۰/۷۷sec	۱۹/۶۷sec	زمان نشست (٪۲)
٪۵۷/۸۴	٪۷۱/۳	٪۴۶/۵	بیشینه‌ی فروجهش
۰/۵۵۲	۰/۶۹۲	۰/۵۰۳	RMS خطای
۱۶/۹N	۲۷/۵N	۱۶/۵N	$\max  f(t) $

## ۴.۴. نتایج و مقایسه

شکل ۲، نمودار موقعیت لحظه‌یی جسم صلب را تحت کنترلر فیدبک مرزی و همچنین تحت بخش تناسبی - مشتقی همین کنترلر نشان می‌دهد. نمودار به خوبی نمایشگر مزیت نسبی کنترلر فیدبک مرزی در رفتار گذرای سیستم مدار بسته است. در ضمن، در این شکل وجود اندکی فراجهش در شرایط وجود تأخیر و عدم قطعیت مشهود است. در شکل ۳، نمودار سرعت خطی جسم صلب بر حسب زمان تحت دو کنترلر مورد بحث و همچنین در حالت حضور تأخیر و عدم قطعیت نشان داده شده است.

نمودار تلاش کنترلی برای کنترلر فیدبک مرزی در حضور و عدم حضور تأخیر و عدم قطعیت و همچنین کنترلر تناسبی - مشتقی مربوط، در شکل ۴ آورده شده است. مطابق شکل، تلاش کنترلی کنترلر فیدبک مرزی، کمی سریع‌تر از بقیه همگرا می‌شود. نکته‌ی دیگر این است که ضرایب کنترلی انتخاب شده در جدول ۲، از عبور تلاش کنترلر فیدبک مرزی از حد  $16/5$  نیوتون جلوگیری می‌کند که ۴۰ درصد از مقدار بیشینه‌ی کنترلر تناسبی - مشتقی مرتبط، کمتر است. برای مقایسه‌ی بهتر دو کنترلر فیدبک مرزی و تناسبی - مشتقی، برخی از مشخصات پاسخ گذرای سیستم مدار بسته (شامل زمان نشست،<sup>۱۳</sup> بیشینه‌ی فروجهش،<sup>۱۴</sup> خطای RMS و مقدار بیشینه‌ی سیگنال کنترلی) تحت این دو کنترلر و همچنین کنترلر فیدبک مرزی با تأخیر و عدم قطعیت، در جدول ۳ آورده شده است که نتایج ذکر شده را تأیید می‌کند.

شکل ۵ نمایشی از عمق سیال درون حفره تحت کنترلر فیدبک مرزی طراحی شده است. این شکل به خوبی رفتار مجانبی عمق سیال را به سمت حالت پایای

و به هیچ عملگری در محدوده‌ی سیال نیازی نیست. (ج) رفتار گذرای مدار بسته تحت کنترل ارائه شده بسیار بهتر از رفتار گذرا تحت کنترل تناسبی - مشتقی است. (د) روش ارائه شده نسبت به وجود تأخیر زمانی در اعمال کنترل و عدم قطعیت در پارامترهای سیستم، مقاوم است. طراحی یک مشاهده‌گر مرزی برای حذف فشارسنج در مرز سیال می‌تواند موضوعی چالش برانگیز برای پژوهش‌های آینده باشد. یکی دیگر از مسائل موجود برای بررسی در پژوهش‌های آینده، استخراج یک کنترلر مقاوم نسبت به عدم قطعیت‌های سیستم با مکانیزمی برای جبران تأخیر<sup>۱۵</sup> و همچنین اثبات پایداری سیستم مدار بسته تحت این کنترلر است.

می‌دهند. بر مبنای سیستم اشاره شده و بدون هیچگونه ساده‌سازی، خطی‌سازی و گسسته‌سازی، یک کنترلر فیدبک مرزی طراحی شد که قادر است تمام حالات بعد محدود (جسم صلب) و بی‌نهایت درجه آزادی (سیال) را پایدار و جسم صلب را به سمت موقعیت دلخواه هدایت کند. در نهایت، پایداری مجانبی سیستم مدار بسته با استفاده از نظریه‌ی لیاپانوف اثبات شد. مزایای روش ارائه شده در مقایسه با پژوهش‌های مرتبط پیشین عبارت است از: (الف) برای محاسبه‌ی سیگنال لحظه‌ی کنترلر، استفاده از حسگرهای پرکاربرد نظیر پتانسیومتر و فشارسنج (در مرز سیال) کفایت می‌کند. (ب) نیروی کنترلی طراحی شده فقط به جسم صلب وارد می‌شود

## پانویس‌ها

1. Sloshing
2. De Saint-Venant
3. Shallow-Sloshing
4. Spillover Instability
5. Boundary Feedback
6. Thruster
7. Cooker's Equation
8. PDE-ODE Cascade
9. Spill-Free
10. LaSalle's Invariance Principle
11. Fully Implicit
12. Dissipative
13. Settling Time
14. Maximum Under-Shoot
15. Delay-Compensated

## منابع (References)

1. Jokar, M., Salarieh, H. and Pishkenari, H.N., 2022. Satellite attitude PDE-based controller design considering fluid fuel sloshing in planar maneuver. *Aerospace Science and Technology*, 122, 107366. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107366>.
2. Navabi, M. and Davodi, A., 2019. Modeling of fuel sloshing in a spacecraft and control it by active control method using nonlinear control. *Modares Mechanical Engineering*, 19(9), pp.2121-8. <http://dorl.net/dor/20.1001.1.10275940.1398.19.9.2.2>.
3. Berger, T., Puche, M. and Schwenninger, F.L., 2022. Funnel control for a moving water tank. *Automatica*, 135, 109999. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109999>.
4. Moriello, L., Biagiotti, L., Melchiorri, C. and Paoli, A., 2018. Manipulating liquids with robots: A sloshing-free solution. *Control Engineering Practice*, 78, pp.129-41. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2018.06.018>.
5. Kim, Y., Nam, B., Kim, D. and Kim, Y., 2007. Study on coupling effects of ship motion and sloshing. *Ocean Engineering*, 34(16), pp.2176-87. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2007.03.008>.

6. De St Venant, B., 1871. Theorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des Mares dans leur lit. *Academic de Sci Comptes Redus*, 73(99), pp.148-54.
7. Ardakani, H.A. and Bridges, T.J., 2010. Dynamic coupling between shallow-water sloshing and horizontal vehicle motion. *European Journal of Applied Mathematics*, 21(6), pp.479-517.
8. Bresch, D., Noble, P. 2007. Mathematical justification of a shallow water model. *Methods and Applications of Analysis*, 14(2), pp.87-118.
9. Chin-Bing, S., Jordan, P. and Warn-Varnas, A., 2011. A note on the viscous, 1D shallow water equations: Traveling wave phenomena. *Mechanics Research Communications*, 38(5), pp.382-7. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.05.003>.
10. Zhang, T. and Yang, J., 2019. Nonlinear dynamics and robust control of sloshing in a tank. *Journal of Vibration and Control*. 25(1), pp.132-40. <https://doi.org/10.1177/1077546318772256>.
11. Alshaya, A. and Alshayji, A., 2021. Robust multi-steps input command for liquid sloshing control. *Journal of Vibration and Control*, 10775463211017721. <https://doi.org/10.1177/10775463211017721>.
12. Hamaguchi, M., 2019. Damping control of sloshing in liquid container in cart with active vibration reducer: The case of a curved path on a horizontal plane. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 24(1), pp.361-72. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2892089>.
13. Han, Z., Liu, Z., Kang, W. and He, W., 2021. Boundary feedback control of a nonhomogeneous wind turbine tower with exogenous disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(4), pp.1952-9. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3071021>.
14. Ataei, M.M., Nejat, H. and Salarieh, H., 2022. Simultaneous attitude and bending-torsional-vibration control of a satellite with multi-section flexible panels using PDE based boundary control-observer. *Sharif Journal of Mechanical Engineering*.
15. Saltari, F., Traini, A., Gambioli, F. and Mastrodidi, F., 2021. A linearized reduced-order model



- approach for sloshing to be used for aerospace design. *Aerospace Science and Technology*, 108, 106369. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106369>.
16. Bastin, G., Coron, J.M. and Hayat, A. 2021. Feed-forward boundary control of  $2 \times 2$  nonlinear hyperbolic systems with application to Saint-Venant equations. *European Journal of Control*, 57, pp.41-53. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.11.002>.
  17. Coron, J.M., Hayat, A., Xiang, S. and Zhang, C., 2022. Stabilization of the linearized water tank system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 244(3), pp.1019-97. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.08293>.
  18. Diagne, A., Diagne, M., Tang, S. and Krstic, M., 2017. Backstepping stabilization of the linearized Saint-Venant-Exner model. *Automatica*, 76, pp.345-54. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.017>.
  19. Diagne, M., Tang, S.X., Diagne, A. and Krstic, M., 2017. Control of shallow waves of two unmixed fluids by backstepping. *Annual Reviews in Control*, 44, pp.211-25. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2017.09.003>.
  20. Hayat, A. and Shang, P., 2019. A quadratic lyapunov function for Saint-Venant equations with arbitrary friction and space-varying slope. *Automatica*, 100, pp.52-60. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.10.035>.
  21. Karafyllis, I., Vokos, F. and Krstic, M., 2022. Feedback stabilization of tank-liquid system with robustness to wall friction. *ArXiv Preprint PrXiv*, 220601385. <https://doi.org/10.1051/cocv/2022076>.
  22. Karafyllis, I. and Krstic, M. 2022. Spill-free transfer and stabilization of viscous liquid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(9), pp.4585-4597. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3162551>.
  23. Keighobadi, J., KhalafAnsar, H.M. and Naseradinmousavi, P., 2022. Adaptive neural dynamic surface control for uniform energy exploitation of floating wind turbine. *Applied Energy*, 316, 119132. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119132>.
  24. Moghanni-Bavil-Olyaei, M.R., Keighobadi, J., Ghanbari, A. and Olegovna Zekiy, A., 2022. Passivity-based hierarchical sliding mode control/observer of underactuated mechanical systems. *Journal of Vibration and Control*, 10775463221091035. <https://doi.org/10.1177/10775463221091035>.
  25. Jokar, M., Salarieh, H. and Pishkenari, H.N., 2022. Observer-based boundary feedback control for attitude tracking of rigid bodies with partially liquid-filled cavities. *Aerospace Science and Technology*, 108068. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.108068>.
  26. Ardakani, H.A., 2010. Rigid-body motion with interior shallow-water sloshing: University of surrey (United Kingdom).
  27. Khalil, H.K., 2015. Nonlinear control: Pearson New York. 406.