

توسعه یک حلگر کوپل تعقیب سطح فاصل برای حل عددی میدان جریان‌های دوفازی در اعداد رینولدز پایین در بستر foam-extend

بهنام چراغی^۱ - شیدوش وکیلی پور*^۲

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده علوم و فنون نوین (دانشگاه تهران)
^۲* نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده علوم و فنون نوین (دانشگاه تهران)

aer.b.cheraghi@ut.ac.ir
vakilipour@ut.ac.ir

چکیده

در پژوهش حاضر، برای اولین بار یک حلگر حجم محدود کوپل برای حل عددی همزمان معادلات جریان سیال تراکم‌ناپذیر دوفازی در اعداد رینولدز پایین و معادله موقعیت سطح فاصل بین دوفاز با اعمال شروط مرزی روی سطح فاصل در بستر فوم-اکستند توسعه می‌یابد. جریان‌های مورد مطالعه برای جابجایی سطح و شبکه به صورت آرام و در محدوده اعداد رینولدز کمتر از ۱۰۰ در نظر گرفته شده‌است. این حلگر مبتنی بر الگوریتم تعقیب سطح فاصل بوده که به کمک ترفند سلول با ضخامت صفر پیاده‌سازی می‌شود. مزیت اصلی حلگر حاضر آن است که در این حلگر تمامی معادلات حاکم بر هر دوفاز به وسیله سلول‌های مجاور سطح فاصل با یکدیگر و با معادله موقعیت سطح فاصل کوپل شده و به صورت همزمان حل می‌گردند. عملکرد حلگر با حل جریان درون مجرا و روی پله مورد ارزیابی قرار گرفته و میرایی امواج ایجاد شده روی سطح فاصل و نحوه تغییر متغیرهای جریان مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مطابقت کامل نتایج حلگر حاضر با نتایج دیگر حلگرهای جریان و دیگر مطالعات نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی

جریان دوفازی، حلگر کوپل، الگوریتم تعقیب سطح فاصل، فوم-اکستند، روش حجم محدود

Developing an Interface Tracking Coupled Solver for Solving two Phase Flow Fields at Low Reynolds Numbers in foam-extend Platform

Behnam Cheraghi : PhD student, Faculty of New Sciences and Technologies, (University of Tehran)

Shidvash Vakili-pour: Associate Professor, Faculty of New Sciences and Technologies, (University of Tehran)

aer.b.cheraghi@ut.ac.ir
vakilipour@ut.ac.ir

Abstract

In present study, for the first time, a finite volume coupled solver is developed for simultaneous numerical solution of two-phase incompressible fluid flow equations at low Reynolds numbers and the equation for the interface position by applying interface boundary conditions using foam-extend platform. The studied flows with interface and mesh motion are considered to be laminar and in the range of Reynolds numbers less than 100. The Foam-extend is a fork of OpenFOAM, an open-source object-oriented C++ library for computational continuum mechanics. This solver is based on the interface tracking algorithm, which is developed using an innovative technique called zero-thickness cell. This technique causes the distance effect to be removed for the cell adjacent to the interface and the interface is modeled with zero thickness. The main advantage of present coupled solver compared to the previously developed solvers is that in this solver, all the equations governing both phases are coupled with each other by cells adjacent to the interface and with an equation for the interface position. All the governing equations and the equation for the interface position are assembled in a linear system of equations and simultaneously solved. In fact, unlike the usual segregated procedure of solving two-phase flows, where the phases are solved with lagged value boundary conditions, in the present solver, the phases are solved simultaneously with the interface conditions in implicit manner and a same block matrix system. The movement of the interface has been done separately and, in another step, using kinematic condition. Computational performance of coupled solver will be evaluated by solving the equations of two-phase fluid flow inside a channel and on a backward facing step. At beginning, a preliminary investigation has been done for the case where both phases are completely independent and decoupled. Matching the interface with the streamlines as well as reasonable and justifiable movement of the surface has been observed from the physical point. Also, the damping of the numerical oscillations generated on the interface and changing the flow variables will be investigated. The present results are in excellent agreement with other results reported in the literature.

Keywords

Keywords: Two phase flow, Interface tracking algorithm, foam-extend, Finite Volume method

۱- مقدمه:

با توجه به کاربردهای چشمگیر جریان‌های دو یا چند فازی، شبیه‌سازی این جریان‌ها، همواره یکی از زمینه‌های جذاب تحقیقاتی و صنعتی بوده‌است. به عنوان مثال در صنایع دریایی، نفت و گاز، هوافضا، خنک‌کننده‌ها و سیستم‌های توان و تبرید در حال توسعه می‌باشد. رویکردهای مختلفی جهت شبیه‌سازی و مطالعه جریان‌های دوفازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در یک دسته‌بندی کلی، می‌توان روش‌های تخمین موقعیت^۱ دو سیال را در مقابل روش‌های مبتنی بر حرکت دقیق یا دنبال کردن^۲ سطح‌فاصل^۳ میان دو سیال مطرح نمود. در رویکرد اول، متغیری برای هر یک از سلول‌های محاسباتی حل می‌شود که نمایانگر نسبت یا درصد اشغال آن سلول توسط هر یک از فازها می‌باشد. یکی از اصلی‌ترین نقاط قوت این روش‌ها، توانایی حل جریان‌هایی است که امکان جدا شدن بخشی از سیال از سطح وجود داشته‌باشد. عدم محاسبه دقیق موقعیت سطح‌فاصل را نیز می‌تواند از نقاط ضعف این دسته از روش‌ها دانست. روش معروف و شناخته شده VOF^۴ در این دسته بندی قرار می‌گیرد [۱][۲]. در مقابل، روش‌های مبتنی بر دنبال کردن سطح یا محاسبه دقیق سطح‌فاصل می‌باشند که به روش‌های IT^۵ معروفند [۳][۴]. این روش‌ها با در نظر گرفتن سطح‌فاصل به صورت یک وجه از شبکه محاسباتی، عملاً موقعیت دقیق سطح را در ابتدای شروع حل در اختیار داشته و با ادامه حل و تغییر مقادیر خواص جریان، موقعیت جدید سطح را پیدا می‌کنند. پیدا شدن موقعیت جدید سطح، نیازمند حرکت سطح و مطابقت شبکه داخلی با آن است، به همین خاطر است که این روش‌ها در کنار الگوریتم‌های جابجایی شبکه معنا می‌یابند. روش‌های مختلفی بر پایه دو رویکرد اشاره شده، توسعه داده شده‌اند، به عنوان مثال می‌توان به روش MAC^۵ [۵]، روش دنبال کردن ناحیه جلویی [۶] و غیره اشاره نمود. یکی از اصلی‌ترین چالش‌ها در تمامی روش‌های اشاره شده، حفظ دقت و تیزی^۶ سطح‌فاصل، در عین رفتار مطلوب پایداری و نرخ مناسب همگرایی است.

موزافریجا و پریک^۷ [۷] روش جابجایی دومرحله‌ای سطح را با موفقیت برای مسائل سطح آزاد با موفقیت پیاده‌سازی نمودند. هاجستین و ولیامز [۸] یک روش ضمنی دوبعدی برای محاسبه کشش سطحی ارائه دادند و این الگوریتم ضمنی را برای

شبیه‌سازی جریان حباب مورد استفاده قرار دادند. اوشی و همکاران [۹] نیز یک الگوریتم ضمنی سه‌بعدی را برای حل مسائل سطح آزاد ناپایا با روش MAC توسعه دادند. ایشان پایداری بیشتر حل را نتیجه گرفتند. دنر و واچم [۱۰] یک بستر کوپل را برای روش VOF چه در حالت گسسته‌سازی ضمنی و چه صریح، پیشنهاد دادند که در نهایت منجر به افزایش اندازه گام زمانی شد. آپسلی و هو [۱۱] روش تعقیب سطح‌فاصل را برای توسعه یک حلگر حجم محدود جهت مدل کردن تقابل امواج سطحی به همراه جسم زیرسطحی اعمال کردند. احمدی و همکاران [۱۲] یک مدل حجم محدود ضمنی و دوبعدی را برای شبیه‌سازی جریان‌های موج سطحی بر اساس روش تصویر کردن^۹ توسعه داده‌اند.

اصلی‌ترین تلاش‌ها جهت حل کاملاً کوپل، به صورت ضمنی و همزمان جریان‌های دوفازی را می‌توان کار وکیلی‌پور و همکاران [۴] دانست که به صورت دوبعدی صورت گرفته‌است. در این کار جریان سطح سیال و جریان دوفازی به کمک یک الگوریتم جدید با شروط سطح‌فاصل کوپل شده‌اند و جابجایی سطح نیز با استفاده از یک روش جدید اعمال شده‌است. می‌توان ادعا نمود که عموم مطالعات گزارش شده در حوزه جریان‌های دوفازی مبتنی بر رویکرد غیرکوپل یا کوپل جزئی برای حل معادلات جریان سیال و شروط سطح‌فاصل بوده‌است. در بستر فوم-اکستند نیز حلگر پیش فرض interTrackFoam با استفاده از الگوریتم شناخته شده PIMPLE^{۱۰} به حل هیدرودینامیکی سیال می‌پردازد در حالی که معادلات و شروط روی سطح‌فاصل را به صورت کاملاً مجزا و با یک تاخیر زمانی نسبت به جریان سیال دوفاز، حل می‌نماید. معادلات مربوط به سطح‌فاصل در این حلگر، به کمک کلاس‌ها و توابع اختصاصی رویه‌ها^{۱۱} و سطح‌ها صورت می‌گیرد. همچنین الگوریتم جابجایی سطح‌فاصل نیز، الگوریتم دو مرحله‌ای معروف موزافریجا و پریک [۷] می‌باشد.

در مطالعه حاضر، اعمال کوپلینگ جریان و شروط مرزی سطح‌فاصل دو فاز در بستر فوم-اکستند برای اولین بار انجام شده است. تاکنون تمامی الگوریتم‌های مورد استفاده در بستر فوم-

Sharpness^۷
Muzafferija & Peric^۸
Projection^۹
Pressure Implicit Method for Pressure Linked^{۱۰}
Equations
Area mesh and matrices^{۱۱}

Capture^۱
Track^۲
Interface^۳
Volume of fluid^۴
Interface tracking^۵
Marker and cell^۶

اکستند، می‌تواند با الگوریتم‌های دیگر همچون الگوریتم موزافریجا و پریک [۷] نیز عملیاتی شود.

۲- مدل سازی ریاضی:

۲-۱- معادلات حاکم بر فازها:

معادلات حاکم بر دو فاز سیال در دوطرف سطح فاصل عبارت است از معادلات پیوستگی و مومنتوم که به صورت زیر ارائه شده است [۳][۴].

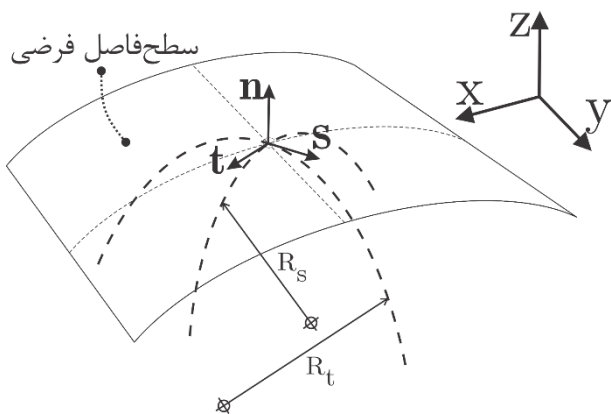
$$\int_S \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{n} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) dS = - \int_S \nabla p dV + \int_S \mathbf{n} (\mu \nabla \mathbf{u}) dS \quad (2)$$

که در آن \mathbf{n} بردار یکه عمود بر سطح S و به سمت بیرون با شکل مولفه‌های $(n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k})$ است. ρ ، \mathbf{u} ، p و μ به ترتیب بردار سرعت، فشار دینامیکی، چگالی و لزجت سیال می‌باشند که ضرایب لزجت و چگالی به صورت ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

۲-۲- معادلات و شرایط حاکم بر سطح فاصل:

شکل ۱ یک سطح فاصل سه‌بعدی به همراه راستاهای عمودی و مماسی آن نشان می‌دهد.



شکل ۱- سطح فاصل سه‌بعدی به همراه راستاهای عمودی و مماسی.

معادلات حاکم بر سطح فاصل از قوانین توازن نیرو (تعادل دینامیکی)، قانون بقای حجم (فضا) و تبادل جرم و انرژی در سطح فاصل استخراج می‌شوند. معادلات مذکور نقش شروط مرزی را برای هر یک از میدان‌های جریان سیال در دو طرف

اکستند از نوع جدا از هم^{۱۲} بوده‌اند. اعمال کوپلینگ در کنار استفاده از ترفند سلول با ضخامت صفر، منجر به ایجاد حلگری جدید با قابلیت حل جریان‌های دوفازی برای اعداد رینولدز کم گردیده است. در این حلگر، معادلات هر دو فاز سیال شامل معادلات مومنتوم و جرم به همراه معادلات و شروط سطح فاصل میان دو فاز که شامل معادلات دینامیکی، برابری سرعت و شروط فشاری هستند، به صورت همزمان و کوپل در یک سیستم ماتریسی سرهم‌بندی^{۱۳} و حل شده‌اند. در واقع می‌توان گفت که در حلگر توسعه داده شده، کوپلینگ میان هر دو فاز به همراه شروط مرزی سطح فاصل مشابه با الگوریتم وکیلی‌پور و همکاران [۴] صورت گرفته است. روند پیاده‌سازی مراحل مختلف با بهره‌بردن از توابع و کلاس‌های پیش فرض در محیط فوم-اکستند نیز شرح داده شده است. به منظور بررسی صحت عملکرد این حلگر برای حل جریان‌های دوفازی از نوع لایه‌ای نازک^{۱۴}، دو جریان داخل مجرا و جریان روی پله مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در این کار، اولین مرحله بعد از کوپلینگ معادلات، یعنی مرحله جابجایی شبکه مورد توجه بوده که حلگر موفق به رساندن سطح به پاسخ مورد نظر شده است. نمایش نحوه خروج امواج و به خصوص موج اول نیز مورد توجه قرار گرفته است. می‌توان ادعا نمود که کار حاضر در واقع شروع روند و تایید الگوریتم کوپل میان جریان هر دوفاز با سطح فاصل است که می‌تواند به صورت عملیاتی در کدهای متن‌باز حجم محدود اعمال گردد. ترفند سلول سطح فاصل با ضخامت صفر نیز به منظور ایجاد نقطه محاسباتی فعال بر روی مرز پیاده‌سازی شده و مورد استفاده قرار گرفته است. در این ترفند، با فشرده‌سازی یک ردیف سلول مجاور سطح فاصل در هر طرف، عملاً این ردیف از سلول‌های محاسباتی مرزی برای هر کدام از دامنه‌های سیال دو طرف سطح، نقش سلول مرزی محاسباتی را ایفا می‌کند. کاهش ضخامت تا مقادیر بسیار ناچیز در کنار اصلاح مقادیر روی سطح مشترک با سلول داخل میدان، منجر به حذف اثر فاصله این سلول‌ها و در واقع رسیدن به یک سطح فاصل تیز شده است. در کار حاضر، تمامی معادلات روی سطح فاصل شامل محاسبات ماتریس تنش برشی یا عبارت‌های مربوط به گرادیان‌ها به صورت متمایز از توابع پیش فرض فوم-اکستند محاسبه و در دستگاه ماتریس نهایی سرهم بندی^{۱۵} گردیده‌اند. حرکت سطح فاصل نیز به کمک اعمال معادله سینماتیکی و الگوریتم ارائه شده توسط وکیلی‌پور و همکاران [۴] انجام گرفته است ولی به راحتی؛ با توجه به ساختار بستر فوم-

سطح فاصل ایفا می کنند. در واقع معادلات حاکم بر روی سطح فاصل شروط مرزی را برای هر دو بخش جریان سیال کامل می کنند. معادلات حاکم بر سطح فاصل از شروطی استخراج می شوند که عبارتند از [۳][۴][۷]:

- شروط تعادل نیرویی در سه راستای عمودی، مماسی طولی و مماسی عرضی که معادلات دینامیک سطح فاصل از آن ها استخراج می شوند.
- شرط بقای حجم سیال محصور در زیر سطح فاصل که معادله حرکت سطح فاصل از آن بدست می آید.
- شروط بقای جرم و انرژی گذرکننده از سطح فاصل که در نبود تبادلات جرم و انرژی، این شروط منتج به معادلات برابری سرعت و دمای سیال هر فاز در (دو سوی) سطح فاصل می شود.
- شرط پیوند میدان های فشار در دو طرف سطح فاصل که به وسیله ارتباط فشار سطح با داخل دامنه جریان سیال برقرار می شود.

۲-۱-۲- معادلات دینامیک سطح فاصل:

معادلات دینامیک سطح فاصل با اعمال شرط تعادل نیرویی میان دو فاز سیال در راستاهای عمودی، مماسی طولی و مماسی عرضی دو طرف سطح فاصل را برقرار کرده به صورت زیر برای هر سه راستا ارائه می شود [۳][۴].

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iL} \cdot \mathbf{n} - \sigma K - p_{iL} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iG} \cdot \mathbf{n} - p_{iG} \quad (3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iL} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iG} \cdot \mathbf{t} \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iL} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{iG} \cdot \mathbf{s} \quad (5)$$

در روابط بالا، \mathbf{T} ، σ و K به ترتیب تانسور تنش کل، کشش سطحی و انحنای سطح فاصل می باشد. همچنین بردارهای \mathbf{s} و \mathbf{t} نشان دهنده راستاهای مماسی طولی و عرضی بوده و پانویس های iL و iG نیز به ترتیب مشخص کننده بخش های مایع و گاز هستند. تانسور تنش کل، \mathbf{T} ، را می توان در جریان های تراکم ناپذیر و بر اساس فرض استوکس، با استفاده از تانسور نرخ کرنش، \mathbf{D} ، و میدان سرعت سیال به صورت زیر محاسبه کرد [۱۳].

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} = \mu \left[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \right] \quad (6)$$

در رابطه (۶)، عملگر \otimes نشان دهنده ضرب خارجی^{۱۶} می باشد. در دستگاه مختصات کارتزینی، تانسور تنش کل با استفاده از گرادیان های سرعت در قالب تنش های برشی و عمودی، τ ، و فشار ترمودینامیکی، p ، به صورت زیر نشان داده می شود [۴].

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} - p \end{bmatrix} \quad (7)$$

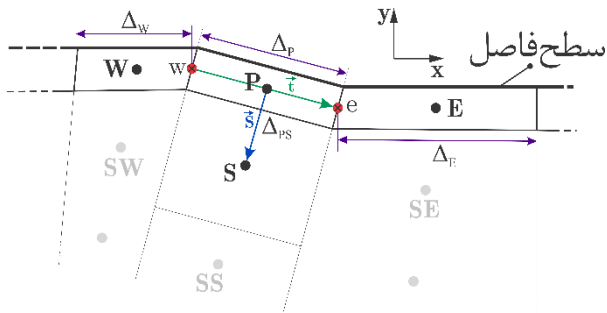
مولفه های تنش های برشی، τ ، با روابط زیر به وسیله گرادیان های سرعت محاسبه می شود [۴].

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

یک رابطه مرسوم برای محاسبه انحنای سطح فاصل به عنوان یک رویه ی سه بعدی (در حالت عمومی) با معادله $z = f(x, y)$ به صورت زیر می باشد.

$$K = \frac{(1+f_x^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}} \quad (9)$$

به منظور محاسبه مشتقات در جهت های محورهای مختصات، با در نظر گرفتن یک سلول مرزی و سلول های همسایه آن به صورت شکل ۲.



شکل ۲- یک سلول در مجاورت سطح فاصل.

ابتدا گرادیان در سه جهت مرکز تا مرکز، مماس طولی و مماس عرضی نوشته شده‌اند.

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_2} \quad (12)$$

اکنون به کمک روش کرامر، عبارت گرادیان برای سه جهت مختصاتی مورد نظر بدست می‌آیند که جزئیات بسط یافته عبارات اصلی معادله دینامیکی و گرادیان‌ها در پیوست ارائه شده‌است. طرح‌های^{۱۷} عددی مرسوم نیز جهت محاسبه گرادیان‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

۲-۲-۲- معادله حرکت سطح فاصل:

این معادله تضمین‌کننده شرط بقای حجم سیال محصور در سطح فاصل و حرکت ذرات هر دو فاز سیال با یکدیگر روی آن می‌باشد. در حالتی که تبادل جرم بین دو فاز در سطح فاصل وجود نداشته باشد، این معادله برابری مولفه‌های سرعت عمودی سیال و سطح فاصل را در نقطه تماس به شکل زیر بیان می‌کند [۳][۴].

$$(\rho A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \rho \dot{\Omega})_{interface} = 0 \quad (13)$$

در رابطه بالا، A و $\dot{\Omega}$ به ترتیب مساحت سطح فاصل و مقدار حجم جاروب شده توسط هریک از وجوه تشکیل دهنده سطح فاصل می‌باشد. و کیلی پور و همکاران [۴] یک رهیافت نوین برای محاسبه جابجایی سطح فاصل مبتنی بر شیب و طول سطح کنترلی سلول مجاور سطح فاصل توسعه دادند.

۲-۲-۳- معادله برابری سرعت در سطح فاصل:

همانطور که پیشتر اشاره شد، در صورت عدم انتقال جرم از سطح فاصل، شرط بقای جرم به معادله برابری سرعت در سطح فاصل تقلیل یافته که با در نظر گرفتن مولفه‌های سرعت در سه راستای محلی، به صورت زیر ارائه می‌گردد [۴].

$$\mathbf{u}_{iL} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{iG} \cdot \mathbf{n} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{iL} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}_{iG} \cdot \mathbf{t} \quad (15)$$

$$\mathbf{u}_{iL} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{u}_{iG} \cdot \mathbf{s} \quad (16)$$

۲-۲-۳- معادله تنظیم فشار:

این معادله برای تنظیم فشار روی سطح فاصل و داخل میدان هر یک از فازها بکار گرفته می‌شود. به صورت عمومی، شرط مرزی فشار به صورت زیر بیان می‌شود [۳].

$$\nabla p_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (17)$$

که در حالت مرتبه اول و دوم به عنوان شرط گرادیان صفر شناخته می‌شود و در بستر فوم-اکستند معادل با zeroGradient است که در اینجا با توجه به محاسبه گرادیان‌ها به صورت مجزا، از شروط پیش فرض استفاده نشده و به صورت مرتبه دوم پسرو اعمال شده‌است.

۳- اعمال معادلات و فرآیند حل در محیط فوم-

اکستند:

معادلات حاکم بر میدان جریان و سطح فاصل تماماً با توابع موجود در فوم-اکستند نسخه ۵ توسعه یافته و گسسته‌سازی شده‌اند. شکل ۲ ساختار الگوریتم و بخش‌های اصلی حلگر توسعه داده شده حاضر را با استفاده از بخش‌بندی‌ها با رنگ و شماره‌گذاری مجزا نشان می‌دهد. در این شکل، بخش‌های با رنگ سبز و نارنجی مربوط به فرآیندهایی است که توابع محاسباتی آن‌ها به صورت عمومی در فوم-اکستند توسعه داده شده‌اند. همچنین تعدادی از توابع و ساختارهای موجود در حلگر interTrackFoam در فوم-اکستند نیز به کار رفته که بخش فرآیندی آن‌ها در شکل ۳ با رنگ آبی نشان داده شده‌است.

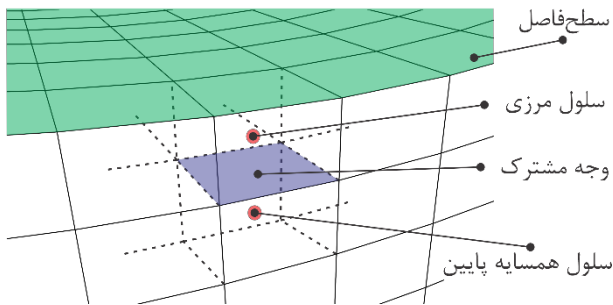
در ادامه، عملکرد بخش‌های شماره‌گذاری شده در شکل ۳ به صورت مختصر ارائه می‌شود.

بخش ۱: کلیه فرآیندهای مربوط به ایجاد فهرست‌ها و دیگر مخازن خالی داده‌های اصلی که در حین اجرا مورد استفاده قرار می‌گیرند، در این بخش صورت می‌گیرد.

بخش ۲: جستجو و بستن انواع فهرست‌های مورد نیاز در ادامه برنامه در این بخش انجام می‌گیرد. در واقع، خروجی این بخش شامل مجموعه‌ای از مخازن داده است که عموماً به صورت آدرس

یا اندیس و به منظور استفاده در حلقه‌های محاسباتی بر روی سلول‌ها یا هر مشخصه مورد نیاز دیگر از سطح فاصل گردآوری شده‌اند.

ضخامت سلول‌ها به کمک تابع `movePoints` از کلاس پایه `fvMesh` صورت گرفته‌است. به منظور اعمال صحیح این ایده، نیاز به یک اصلاح ضرایب ری و چاو^{۱۸} (PWIM) [۱۴][۱۵]. برای سلول‌های سطح فاصل داریم. این کار منجر به محاسبه صحیح مقادیر روی وجه میان سلول سطح فاصل و نزدیکترین سلول داخل میدان به آن می‌گردد (شکل ۴). با این کار، عملاً اثر ضخامت سلول نازک شده حذف می‌شود.



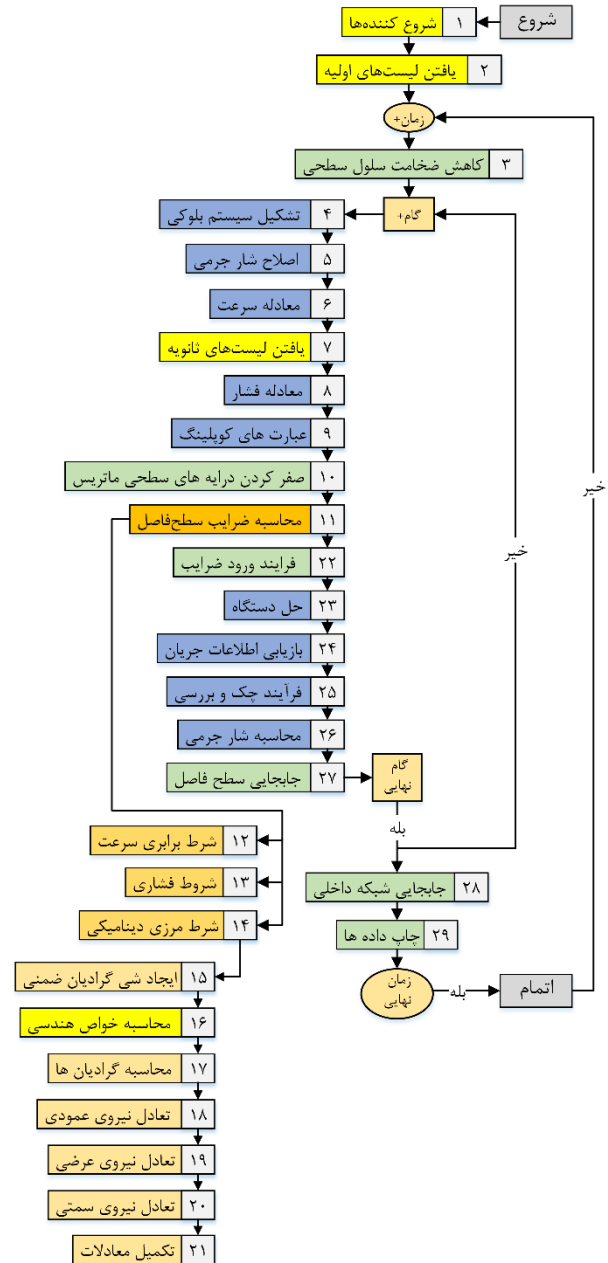
شکل ۴- شکل شماتیک سلول سطح فاصل، سلول داخل دامنه و وجه مشترک.

بخش ۴: این بخش مربوط به ایجاد سیستم بلوکی با در نظر گرفتن تعداد متغیر می‌باشد [۱۶][۱۷][۱۸][۱۹]. تمامی فرآیندهای سرهم‌بندی ضرایب در دستگاه ماتریسی نهایی به کمک توابعی است که با کلاس‌های این بخش همچون `fvBlockMatrix` هماهنگ شده‌اند.

بخش ۵: به منظور تصحیح مقدار شار جرمی روی سطوح بعد از انجام هر جابجایی در شبکه، این بخش ایجاد شده‌است. در واقع عمل تصحیح شار جرمی موجود در عبارت جابجایی معادلات جریان و حرکت شبکه (روش ALE^{۱۹}) را برعهده دارد. تابع اصلی مورد استفاده در این مرحله، `fv::meshPhi()` می‌باشد که عمل محاسبه سرعت نسبی شبکه را برعهده دارد.

بخش ۶: ایجاد معادله مومنتوم به همراه محاسبات ماتریس ضرایب و فرآیند داخل‌سازی در دستگاه بلوکی در این بخش صورت گرفته‌است. عبارت فشاری معادله مومنتوم در بخش ۹ وارد شده‌است.

بخش ۷: این بخش جهت پرکردن و ساختن مخازن داده‌ای مورد نیاز که وابسته به ماتریس ضرایب متغیرها (در اینجا سرعت) است ایجاد شده‌است و الزاماً باید بعد از تکمیل یکی از معادلات سرعت یا فشار قرار گیرد.



شکل ۳- نمودار مربوط به بخش‌های اصلی حلگر توسعه داده شده.

عملکرد بخش‌های شماره‌گذاری شده در شکل ۳ به صورت جزئی در ادامه تشریح شده‌اند.

بخش ۳: پیاده‌سازی ترفند سلول‌های محاسباتی مرزی با ضخامت نزدیک به صفر در این بخش انجام شده‌است. کاهش

بخش ۸: مشابه با بخش مربوط به معادله مومنتوم، در اینجا معادله فشار تکمیل شده و در دستگاه بلوکی وارد می‌گردد. عبارت سرعت درون معادله فشار در بخش ۹ وارد شده است.

بخش ۹: عبارت‌های مربوط به کوپلینگ معادلات یعنی عبارت فشاری معادله مومنتوم و عبارت سرعتی معادله فشار در این بخش به دستگاه بلوکی اصلی وارد شده است.

بخش ۱۰: صفر کردن درایه‌های مربوط به سلول‌های سطح فاصل به منظور آماده سازی جهت اعمال شروط روی سطح نیز در این مرحله انجام می‌گردد.

بخش ۱۱: این بخش که از مهم‌ترین بخش‌های فرآیند پیاده‌سازی به حساب می‌آید، در واقع وظیفه محاسبه ضرایب مناسب سلول‌های سطح فاصل را با توجه به معادلات و شرایط حاکم بر سطح برعهده دارد. مراحل داخلی این بخش در ادامه تشریح شده‌اند.

بخش ۱۲: شرط برابری سرعت در دو طرف سطح فاصل که می‌تواند مشابه با شرط عدم لغزش دیواره ولی به طور همزمان و برای دو طرف سطح دو سیال قلمداد شود، در این بخش اعمال شده است. در حالتی که انتقال جرم از سطح وجود نداشته باشد، این شرط حاکم خواهد بود.

بخش ۱۳: شروط مربوط به فشار روی سطح فاصل و ارتباط آن با فشار داخل میدان در این بخش پیاده‌سازی شده است. برای هر سمت، شرط مرزی گرادیان صفر به صورت مرتبه اول و مرتبه دوم اعمال شده است.

بخش ۱۴ تا ۲۱: شرط مرزی دینامیکی و یا همان تعادل نیرویی در این بخش پیاده‌سازی شده است. در ابتدا در بخش ۱۵ یک شی ۲۰ از کلاس ۲۱ گرادیان خلق شده است. این کار مستلزم تغییر کلاس پیش فرض فوم-اکستند جهت دریافت متغیر سرعت است. سپس در مرحله ۱۶ مشخصات هندسی که در هر تکرار می‌باید محاسبه و به روزرسانی شوند، محاسبه و دریافت شده‌اند. در مرحله ۱۷ با توجه به الگوریتم مورد نظرمان برای محاسبه گرادیان و همچنین فواصل و خواص هندسی بخش ۱۶، کار محاسبه عبارت گرادیان انجام شده است. پس از آن در مراحل ۱۸ تا ۲۰، بر اساس محاسبات گرادینی انجام شده در مرحله ۱۷، شروط تعادل نیرویی در هر سه جهت عمودی، مماسی و در راستای عمق دامنه پیاده‌سازی شده است. در نهایت عبارت‌های مربوط به

انحنای سطح و همچنین فشار درون معادله تعادل نیروی عمودی نیز در بخش ۲۱ نهایی شده‌اند.

مرحله ۲۲: انتقال و داخل کردن ضرایب محاسبه شده برای سلول‌های روی سطح فاصل به دستگاه بلوکی، در اینجا صورت گرفته است.

بخش ۲۳ تا ۲۵: این بخش‌ها کار حل دستگاه بلوکی و استخراج باقیمانده‌ها و بررسی شروط و معیارهای همگرایی یا دیگر کنترل‌ها را برعهده دار هستند. همچنین بازدریافت نتایج حاصل از حل به صورت تفکیک شده برای متغیرهای تعریف شده در دستگاه بلوکی (در اینجا سرعت و فشار) در این بخش‌ها صورت گرفته است.

بخش ۲۶: محاسبه سرعت جرمی به منظور استفاده در معادله مومنتوم با توجه به فرمولاسیون روش ری و چاو انجام شده است.

بخش ۲۷: اعمال الگوریتم جابجایی سطح فاصل در این مرحله صورت گرفته است. همانطور که پیشتر اشاره شد، تابع پیش فرض فوم-اکستند که در این مرحله مورد استفاده قرار گرفته و وظیفه جابجایی شبکه را برعهده دارد، تابع (movePoints) از کلاس fvMesh می‌باشد.

بخش ۲۸: جابجایی نقاط داخل میدان متناسب با شروط مرزی داده شده و همچنین جابجایی اعمال شده برای سطح سیال، در این مرحله انجام گردیده است. الگوریتم جابجایی شبکه داخلی به دو صورت کلی حل معادله لاپلاس برای تمامی نقاط و یا جابجایی براساس نسبت فاصله اولیه می‌باشد. در مسائل جریان لایه‌ای، جابجایی یکنواخت شبکه هزینه محاسباتی کمتری دارد.

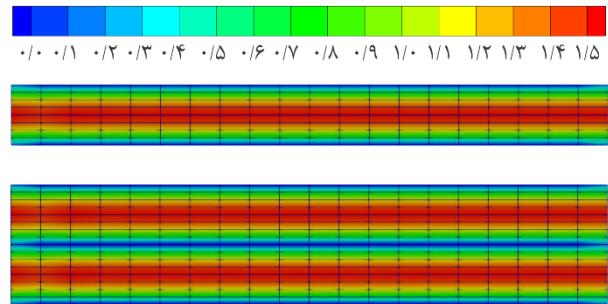
بخش ۲۹: در نهایت عملیات مربوط به چاپ یا استخراج داده‌های مورد نیاز جهت پس پردازش صورت گرفته است.

۵- نتایج:

در ابتدا به منظور اعتبارسنجی حلگر جریانی، مقایسه‌ای میان نتایج مراجع و کیلی پور و همکاران [۴]، گارتلینگ [۲۱] و سنجل و همکاران [۲۰] با نتایج حاصل از حلگر توسعه داده شده ارائه شده است. همچنین پیش از بررسی جریان دوفازی در حالت کوپل شده، ابتدا یک ارزیابی در حالتی که هر دوفاز به صورت غیر کوپل هستند انجام شده است. به عبارتی، فاز بالا و پایین کاملاً مستقل از یکدیگر بوده‌اند که در این حالت گویا دوجریان تک‌فاز

به یکدیگر متصل شده‌اند. این حالت در شکل‌های ۵ و ۶ نمایش داده شده‌است.

سرعت بر حسب متر بر ثانیه



شکل ۵- میدان جریان در حالتی که دوفاز کاملاً مستقل از یکدیگر هستند، بالا) جریان درون مجرای تک‌فاز و پایین) جریان درون مجرا در حالت دوفازی ولی غیرکوپل.

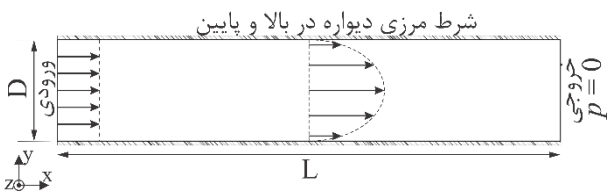
ورودی جریان می‌باشد. اعداد رینولدز بررسی شده برای جریان مجرا ۱۰۰ و برای جریان پله ۱۰ می‌باشد. همچنین طول دامنه ۱۰ مورد استفاده قرار گرفته‌است و مقیاس طولی معیار جهت محاسبه عدد رینولدز نیز عرض دامنه در نظر گرفته شده‌است. در ابتدا نیز به منظور بررسی اندازه کلی دامنه حل و کیفیت شبکه، دامنه‌هایی با نسبت طول به عرض ۵، ۱۰ و ۲۰ و کیفیت شبکه مختلف (در هر دو راستا) مقایسه شده‌اند. رفتار سطح‌فاصل با توجه به فیزیک جریان و موقعیت اولیه سطح در نتایج پیش‌رو مورد توجه و ارزیابی قرار گرفته‌است. در بررسی‌های صورت گرفته، میزان اختلاف نسبی به صورت رابطه زیر ارائه شده‌است.

$$RD(\phi) = \left| \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\phi_{k-1}} \right| \times 100 \quad (18)$$

در این رابطه، ϕ و k به ترتیب مقدار کمیت مورد مطالعه و اندیس تکرار می‌باشند.

۵-۱- اعتبارسنجی حل جریان

به منظور اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل جریان و بررسی دقت حلگر، توابع مربوط به جابجایی شبکه را غیرفعال نموده‌ایم. حل جریان درون مجرا برای اعداد رینولدز ۱۰ و ۱۰۰ با روابط ارائه شده تحلیلی در مرجع [۲۰] مورد مقایسه قرار گرفته‌است. جریان درون مجرا یکی از پایه‌ای‌ترین جریان‌هاست که می‌تواند جهت ارزیابی عملکرد حلگرهای جریان‌های دوفازی مورد استفاده قرار گیرد. این جریان به کمک هندسه مجرا با یک ورودی و یک خروجی به همراه دیواره‌های جانبی قابل دریافت می‌باشد. هندسه و شروط مرزی مورد استفاده در شکل ۷ ارائه شده‌اند.

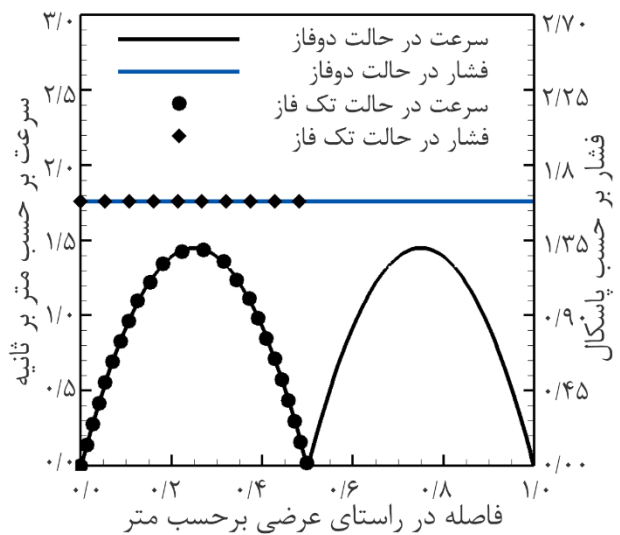


شکل ۷- دامنه، شروط مرزی و شبکه مورد استفاده جهت حل جریان درون مجرا.

پروفیل سرعت و شیب فشار در راستای طولی برای جریان توسعه یافته درون لوله مطابق با مرجع [۲۰] به کمک روابط زیر قابل محاسبه است:

$$u(y) = 1.5 u_{in} \left(1 - \frac{y^2}{(D/2)^2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{3\mu}{(D/2)^2} u_{in} \quad (20)$$



شکل ۶- سرعت و فشار در فاصله طولی ۰.۴/۶۲۵.

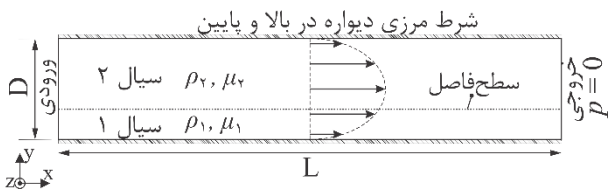
پس از این بررسی اولیه در حالت‌های مختلف از شبکه و زوایای مختلف دامنه (که به منظور اختصار ذکر نشده‌اند)، بررسی مربوط به فعال شدن شروط مرزی روی سطح‌فاصل و همچنین فعال شدن معادله سینماتیک جهت حرکت سطح مورد ارزیابی قرار گرفته‌است. توجه شود که در کلیه مراحل، خواص هر دوفاز به صورت کاملاً یکسان مقداردهی شده‌اند، اما می‌توان در مطالعات آینده، خواص متفاوت را در کنار فعال‌سازی عبارت مربوط به کشش سطحی و انحناى سطح مورد ارزیابی قرارداد.

نمونه‌های مورد بررسی به منظور ارزیابی جابجایی سطح و شروط روی سطح شامل چندین نمونه آزمون جریان درون مجرا با سطح‌فاصل اولیه در وسط و به صورت کاملاً افقی، جریان درون مجرا با سطح‌فاصل اولیه در وسط و نیمه افقی-نیمه زاویه دار، جریان درون مجرا با سطح‌فاصل اولیه در بخش پایین یا بالا و در نهایت جریان بر روی پله و سطح‌فاصل اولیه در وسط بخش

شکل ۱۰- مقایسه میان پروفیل سرعت در راستای طولی و عرضی در مقطع طولی به فاصله ۷ متر از ورودی.

همانطور که مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی میان نتایج محاسبه شده با نتایج مراجع [۴] و [۲۱] دیده می‌شود. در ادامه با فعال سازی توابع مربوط به جابجایی سطح فاصل، به بررسی عملکرد این توابع و رفتار سطح برای مسائل جریان درون مجرا و جریان پله، اینبار با رویکرد جریان های دوفازی می پردازیم.

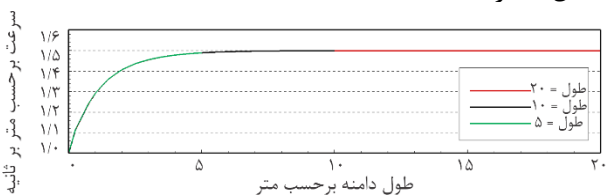
۵ - ۲- جریان درون مجرا:
 هنده و شروط مرزی مورداستفاده جهت حل جریان درون مجرا مطابق با شکل ۱۱ ارائه شده است.



شکل ۱۱- دامنه، شروط مرزی و شبکه مورداستفاده جهت حل جریان درون مجرا با رویکرد جریان دوفازی.

درواقع در اینجا، تحلیل جریان درون مجرا با رویکرد جریان دوفازی صورت می‌گیرد. در این مرحله توابع مربوط به جابجایی سطح فاصل فعال شده‌اند. شبکه مکانی مورداستفاده در مجرا، ۱۶ در ۲۰ به ترتیب در راستای عرض و طول دامنه می‌باشد. شرط مرزی سرعت در ورودی مجرا به دوصورت سرعت ثابت با بزرگی ۱ و همچنین سرعت سهموی با حداکثر مقدار ۱.۵ اعمال شده است. در خروجی نیز شرط مرزی سرعت به صورت گرادیان صفر اعمال شده است. شروط مرزی فشار در ورود و خروج به ترتیب گرادیان صفر و مقدار ثابت صفر اعمال شده است. شروط مرزی دیواره های بالا و پایین نیز شرط عدم لغزش می‌باشند. در رابطه با شروط مرزی سطح فاصل نیز در بخش معادلات حاکم جزئیات آن ارائه گردیده است.

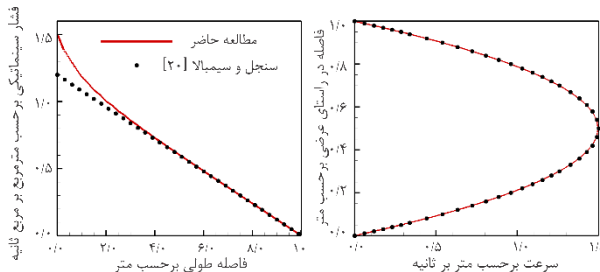
در ابتدا جهت بررسی اندازه مناسب نسبت طول به عرض و همچنین کیفیت شبکه، نتایج مربوط به حل جریان با ورودی کاملا توسعه یافته برای سه نسبت طول به عرض ۵، ۱۰ و ۲۰ در شکل ۱۲ ارائه شده است.



شکل ۱۲- نتایج حل جریان درون مجرا برای سه دامنه با طول مختلف.

همانطور که مشاهده می‌شود افزایش طول بیش از ۵، صرفا در مقدار نهایی سرعت خود را نشان داده و تاثیر چندانی بر روی

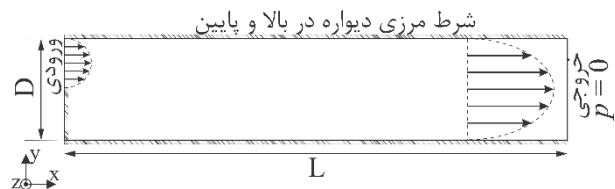
همانطور که مشاهده میشود، رابطه ارائه شده یک سهمی با حداکثر مقدار ۱/۵ برابر سرعت ورودی است. مقایسه نتایج حاصل از حلگر توسعه داده شده با رابطه بالا، نشان از تطابق کامل میان نتایج می‌دهد.



شکل ۸- مقایسه میان پروفیل سرعت توسعه یافته و شیب فشار با حل تحلیلی.

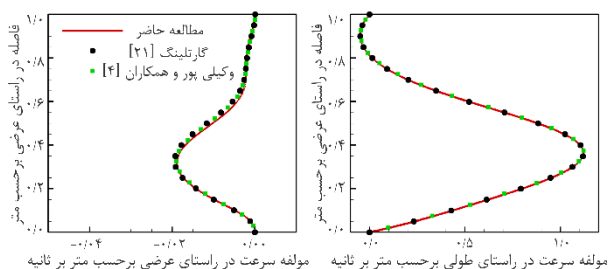
همانطور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، مطابقت مناسبی میان شیب نمودار فشار در ناحیه توسعه یافته با نتایج حاصل از حل وجود دارد. همچنین پروفیل سرعت توسعه یافته کاملا مطابق با حل تحلیلی می‌باشد.

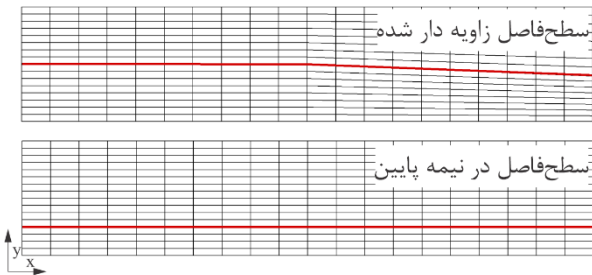
همچنین جریان در عبور از پله در عدد رینولدز ۸۰۰ نیز با کارهای وکیلی پور و همکاران [۴] و گارتلینگ [۲۱] مورد مقایسه قرار گرفته است. طول دامنه ۳۰ و عرض آن ۱ است. سرعت در ورودی به صورت سهموی و با مقدار حداکثر ۱/۵ اعمال شده است. هنده و شروط مرزی استفاده شده به صورت شکل ۹ ارائه شده است.



شکل ۹- دامنه، شروط مرزی و شبکه مورداستفاده جهت حل جریان پله.

همچنین شبکه مکانی مطابق با مرجع [۴] به اندازه ۱۸۰ سلول در راستای طولی و ۸۰ سلول در راستای عرضی انتخاب شده است. شکل ۱۰ مقایسه میان نتایج پروفیل های سرعت در مقطع به فاصله ۷ متر از ورودی را نمایش می‌دهد.

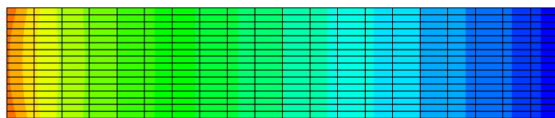




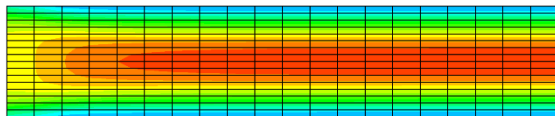
شکل ۱۵- دو آرایش سطح فاصل جهت بررسی عملکرد معادلات و جابجایی سطح.

در جریان پایای مجرا، در صورتی که سرعت ورودی به صورت کاملا توسعه یافته یا به صورت سرعت یکنواخت داده شود، سطح فاصل افقی جابجایی قابل توجهی از خود نشان نخواهد داد چراکه در واقع حالت نهایی سطح فاصل، همان حالت ابتدایی آن می باشد. به عبارتی در حالت سطح فاصل افقی چه در وسط عرض و چه در موقعیت نیمه پایین یا بالای عرض، شاهد هیچ گونه حرکت نوسانی نبوده ایم و صرفا جریان تا حل نهایی خود پیش رفته است. البته در اعداد رینولدز بالا امکان ایجاد امواج موقتی کوچک و سپس میرایی آنها وجود دارد. نتیجه چنین حلی برای عدد رینولدز ۱۰۰ در شکل های ۱۶ و ۱۷ نمایش داده شده است.

فشار سینماتیکی بر حسب مترمربع بر مربع ثانیه

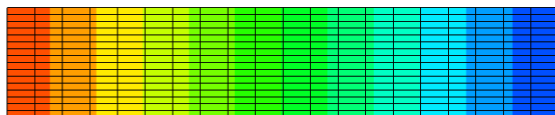


سرعت بر حسب متر بر ثانیه

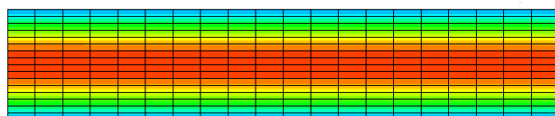


شکل ۱۶- سرعت و فشار برای جریان درون مجرا در حالت های سطح فاصل افقی و ورودی با سرعت یکنواخت برای عدد رینولدز ۱۰۰.

فشار سینماتیکی بر حسب مترمربع بر مربع ثانیه

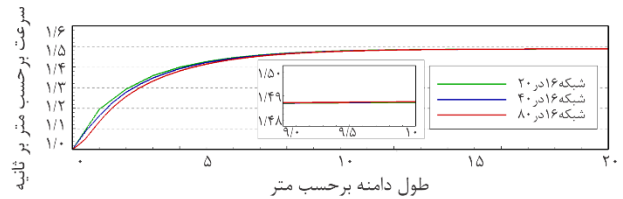


سرعت بر حسب متر بر ثانیه

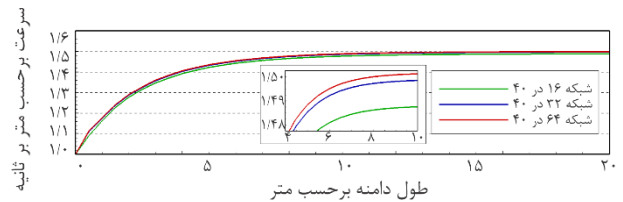


شکل ۱۷- سرعت و فشار برای جریان درون مجرا در حالت های سطح فاصل افقی و ورودی با سرعت سهموی برای عدد رینولدز ۱۰۰.

جریان و رفتار جزئی آن نداشته است. همچنین نتیجه حل جریان برای شبکه ها با تعداد سلول ۲۰، ۴۰ و ۸۰ در راستای طولی و ۱۶، ۳۲ و ۶۴ برای راستای عرضی نیز در شکل های ۱۳ و ۱۴ ارائه گردیده است.



شکل ۱۳- نتایج حل جریان درون مجرا برای سه کیفیت مختلف شبکه در راستای طولی.



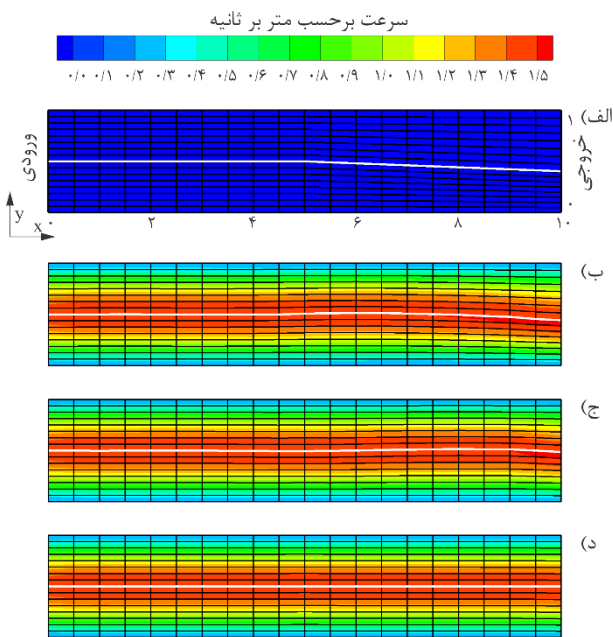
شکل ۱۴- نتایج حل جریان درون مجرا برای سه کیفیت مختلف شبکه در راستای عرضی.

مشاهده می شود که تعداد شبکه در راستای عرضی اثر چشمگیرتری در دقت پاسخ نهایی دارد. هرچند که رفتار جریان تفاوت چندانی ندارد و در واقع همه حل ها خود را به پاسخ صحیح نزدیک نموده اند. بنابراین چه در بحث طول دامنه و چه کیفیت شبکه، سعی بر استفاده از ساده ترین هندسه جهت بررسی بهتر و واضح تر رفتار حرکت سطح فاصل شده است. بدین منظور برای جریان درون مجرا، شبکه با نسبت طول به عرض ۱۰ و تعداد سلول ۱۶ در ۲۰ برای دو راستای عرضی و طولی انتخاب شده است.

جهت ارزیابی صحت عملکرد معادلات و توابع مربوط به جابجایی سطح فاصل و شبکه، سه حالت اولیه اصلی برای سطح فاصل در نظر گرفته شده است. ساده ترین حالت قرارگیری سطح فاصل به صورت کاملا افقی و در میانه عرض مجرا می باشد. در این حالت انتظار عدم جابجایی شبکه را داریم. حالت دوم که در واقع به عنوان اولین قدم در جابجایی شبکه در نظر گرفته شده شامل سطح فاصل در وسط عرض دامنه به صورت افقی تا میانه میدان و پس از آن شکستگی و زاویه دار شدن تا انتهای میدان است. حالت سوم نیز سطح فاصل در فاصله ای مشخص به صورت افقی در بخش پایین یا بالای میدان است. شکل ۱۵ دو چیدمان اصلی جهت بررسی عملکرد حلگر را نمایش داده است.

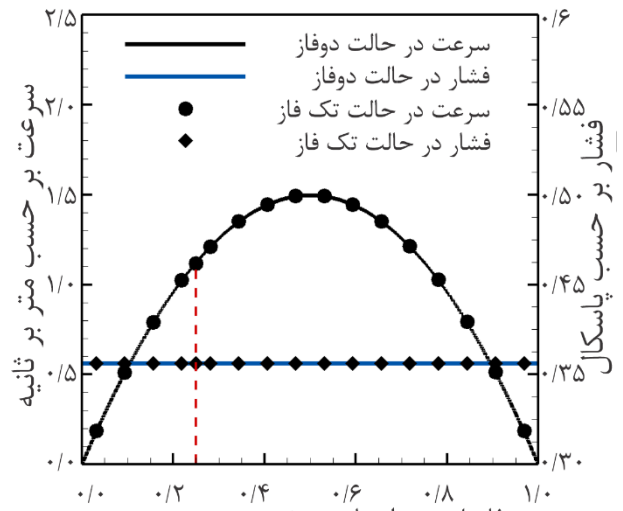
۵-۲-۱- سطح فاصل در وسط و زاویه داده شده:

اولین و شاید ساده‌ترین حالت حرکت سطح، حرکت سطح زاویه‌دهی شده باشد، چراکه شرایط در ورودی را می‌توان هم به صورت جریان توسعه یافته و هم به صورت جریان یکنواخت اعمال نمود و در هر دو حالت وجود تقارن هندسی و فیزیکی در بخش نزدیک به ورودی سبب سادگی و پایداری بیشتر حل می‌گردد. تصاویر مربوط به حرکت سطح و جابجایی نقاط شبکه به همراه سرعت و فشار در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ نمایش داده شده‌اند.

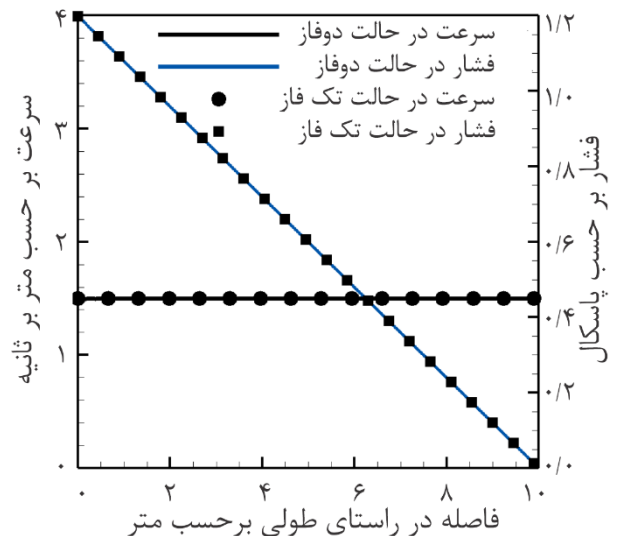


شکل ۲۰- حرکت سطح در حالت سطح فاصل زاویه‌دهی شده به همراه کانتورهای سرعت در عدد رینولدز ۱۰۰، الف) سطح فاصل در حالت اولیه، ب) شکل‌گیری موج اولیه و شروع حرکت سطح فاصل، ج) نوسان و خروج امواج بعدی و د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل.

همچنین از منظر دقت محاسبات، حل نهایی جریان در جریان دوفازی با سطح فاصل در میانه میدان در مقایسه با جریان کاملاً تک‌فازی مطابقت خوبی دارد. نمودارهای سرعت و فشار برای مقطع در فاصله ۹ در حالت ورودی توسعه یافته به صورت شکل‌های ۱۸ و ۱۹ نمایش داده شده‌است.

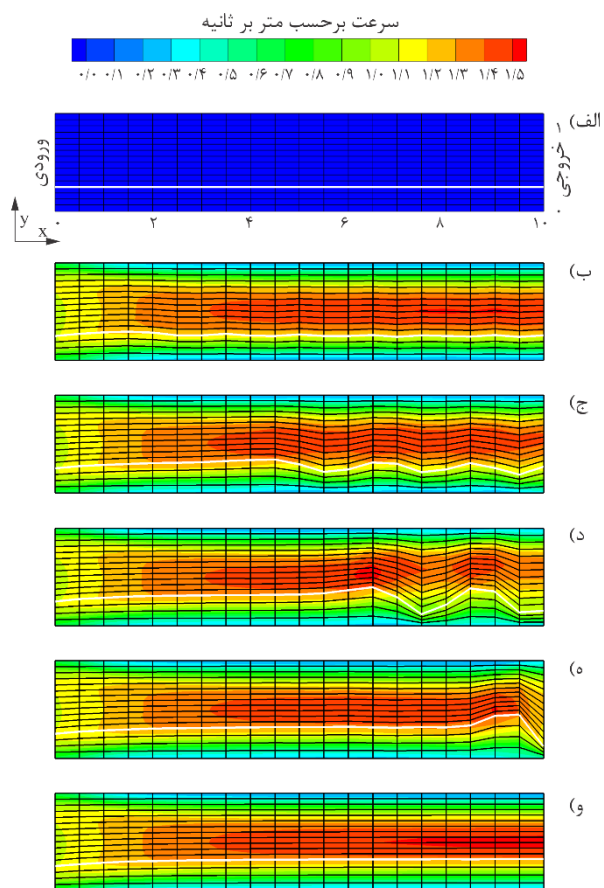


شکل ۱۸- منحنی سرعت و فشار در مقطع طولی با فاصله ۰.۷

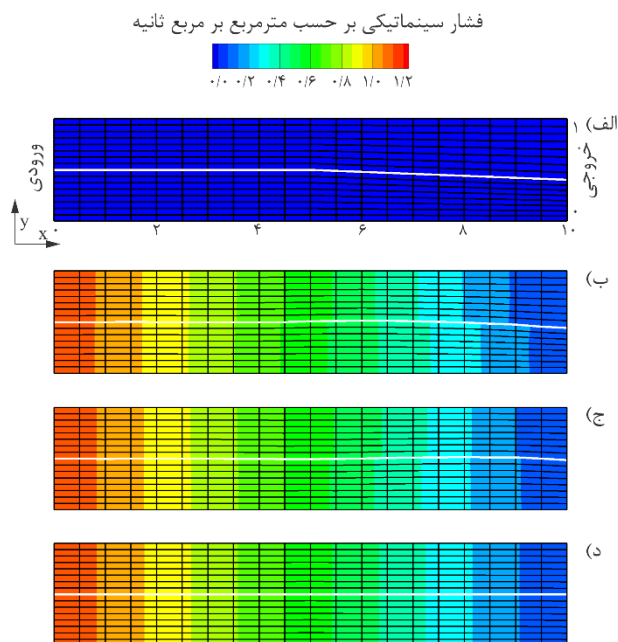


شکل ۱۹- منحنی سرعت و فشار در مقطع عرضی با فاصله ۰.۵

در حالتی که سطح فاصل در نیمه پایین یا نیمه بالای دامنه قرار گرفته باشد و سرعت ورودی به صورت یکنواخت تنظیم شود، جریان دو طرف سطح فاصل، سطح فاصل را به نحوی جابجا می‌کند که دبی ورودی هر طرف به سمت دبی حالت توسعه یافته یا همان سرعت سهموی در خروجی برسد. در واقع تمایل حرکت سطح فاصل به سمتی است که در نهایت در دو طرف سطح، ما شاهد یک منحنی سرعت سهموی باشیم و میزان دبی به دام افتاده در هر طرف، دقیقاً برابر با میزان ابتدایی دبی هر طرف باشد.



شکل ۲۲- حرکت سطح در حالت سطح فاصل در نیمه پایین مجرا به همراه کانتورهای سرعت در عدد رینولدز ۱۰۰، الف) سطح فاصل در حالت اولیه، ب) شکل گیری امواج اولیه و شروع موج شدن سطح فاصل، ج تا ه) توسعه موج اولیه تا خروج کامل آن د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل.

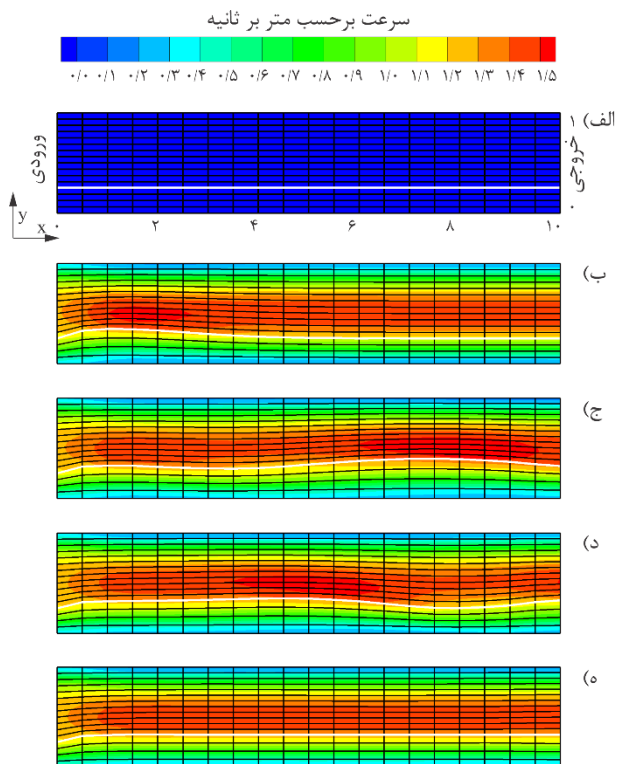


شکل ۲۱- حرکت سطح در حالت سطح فاصل زاویه دهی شده به همراه کانتورهای فشار در عدد رینولدز ۱۰۰، الف) سطح فاصل در حالت اولیه، ب) شکل گیری موج اولیه و شروع حرکت سطح فاصل، ج) نوسان و خروج امواج بعدی و د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل.

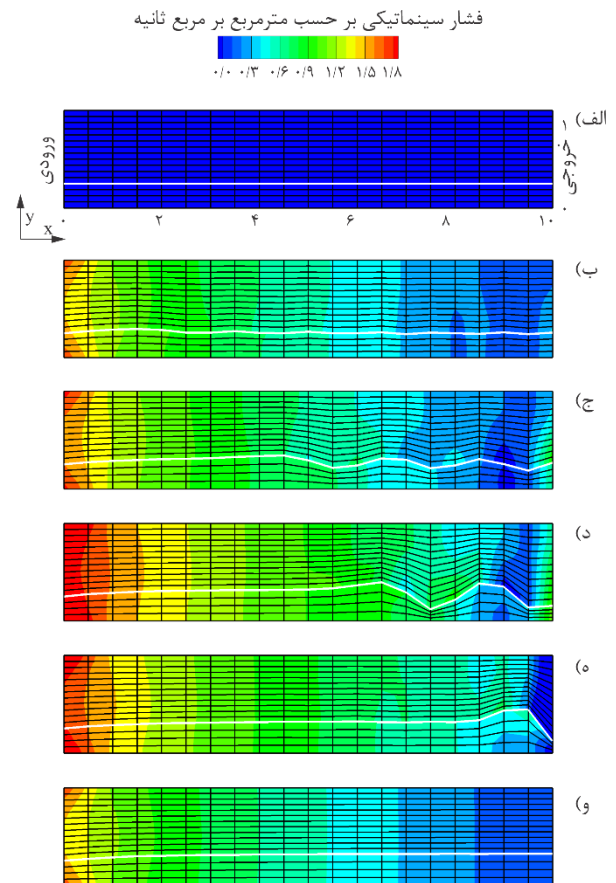
همانطور که مشاهده می شود، سطح موقعیت نهایی را به خوبی پیدا کرده است و امواج نیز به تدریج میرا شده اند. امواج شکل گرفته، حرکتی نسبتاً یکنواخت داشته و بدون افزایش شدت و دامنه تا رسیدن به حالت نهایی، پیش رفته اند.

۵-۲-۲- سطح فاصل در یک نیمه و افقی:

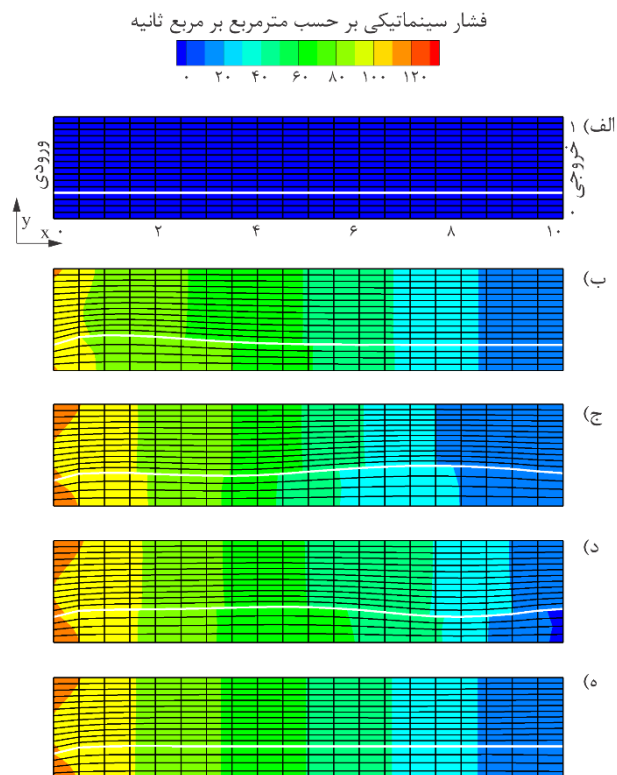
دومین حالت جابجایی سطح، حالتی است که سطح فاصل با فاصله از خط میانی مجرا و به صورت افقی موقعیت دهی اولیه شده است. با اعمال شرط سرعت یکنواخت در ورود، انتظار حرکت سطح به سمت بالا تا اجابت شدن شرایط جریان توسعه یافته در پایین دست با ثابت بودن دبی جریان دو طرف سطح را داریم. رفتار جابجایی سطح فاصل برای این حالت در شکل های ۲۲ و ۲۳ ارائه شده است.



شکل ۲۴- حرکت سطح در حالت سطح فاصل در نیمه پایین مجرا به همراه کانتورهای سرعت در عدد رینولدز ۱۰ (الف) سطح فاصل در حالت اولیه، (ب) شکل گیری امواج اولیه و شروع موج شدن سطح فاصل، ج و د) توسعه موج اولیه تا خروج کامل آن و د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل.



شکل ۲۳- حرکت سطح در حالت سطح فاصل در نیمه پایین مجرا به همراه کانتورهای فشار در عدد رینولدز ۱۰۰ (الف) سطح فاصل در حالت اولیه، (ب) شکل گیری امواج اولیه و شروع موج شدن سطح فاصل، ج تا ه) توسعه موج اولیه تا خروج کامل آن د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل. در این حالت با پیش روی حل، امواج به تدریج در بخش ورودی میرا شده اند و شکل نهایی را به سطح داده اند، در حالی که امواج بخش پایین دست جریان دامنه بزرگتر و فرکانس کمتری را به خود گرفته اند. شاید بتوان اینطور بیان نمود که امواج از ورود به سمت خروج سبب هم افزایی بر یکدیگر شده اند و تا زمان خارج شدن همه یا بخش تحریک شده اصلی، بر میزان دامنه آن افزوده شده است.

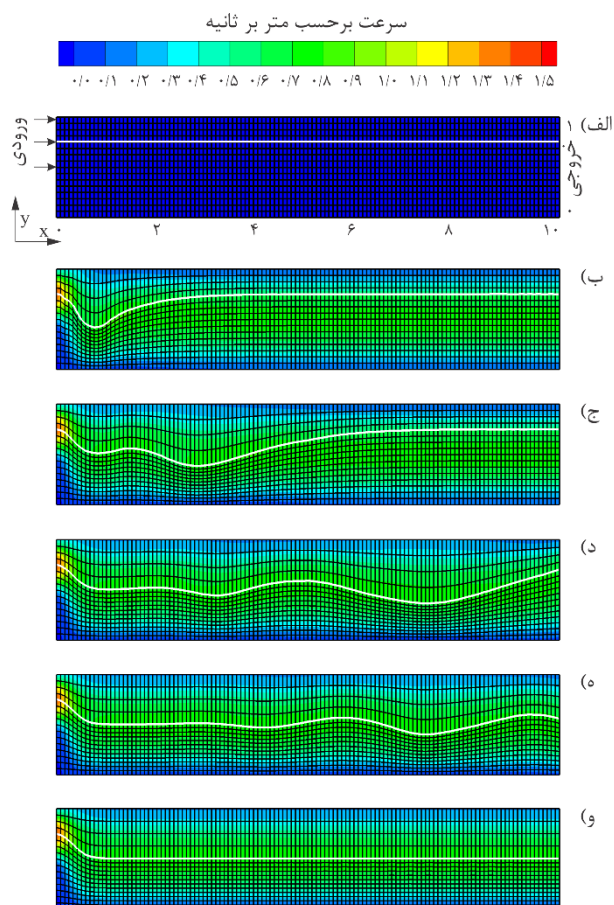


شکل ۲۵- حرکت سطح در حالت سطح فاصل در نیمه پایین مجرا به همراه کانتورهای فشار در عدد رینولدز ۱۰ (الف) سطح فاصل در حالت اولیه، (ب)

در اعداد رینولدز بالا، این رفتار هم افزایی امواج یا به عبارتی رشد دامنه و کاهش فرکانس چشمگیرتر خواهد بود. در واقع این رفتار می تواند یکی از عوامل محدود کننده حل در جریان های با عدد رینولدز بالا باشد و برای کنترل آن نیاز به ابزارهایی همچون مدیریت شبکه های زمانی و مکانی و همچنین استفاده از تقلیل دهنده ها^{۲۲} و میراکننده های مصنوعی می باشیم. حرکت امواج برای عدد رینولدز ۱ در شکل های ۲۴ و ۲۵ نمایش داده شده است.

^{۲۲} Relaxation factors

تا رسیدن به حل نهایی پایا به صورت شکل‌های ۲۷ و ۲۸ ارائه شده است.



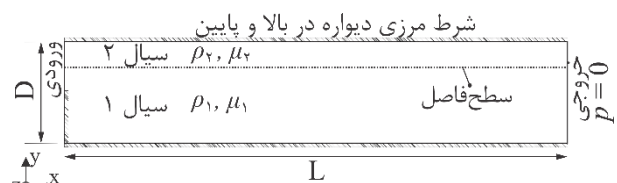
شکل ۲۷- حرکت سطح فاصل در جریان بر روی پله به همراه کانتورهای سرعت در عدد رینولدز ۱۰، الف) سطح فاصل در حالت اولیه، ب) تورفتگی سطح فاصل و شکل‌گیری موج اول، ج) توسعه موج اولیه و تشکیل موج ثانویه، د و ه) حرکت امواج تا خروج کامل از دامنه، و) تثبیت کامل موقعیت سطح فاصل.

شکل‌گیری امواج اولیه و شروع موج‌شدن سطح فاصل، ج و د) توسعه موج اولیه تا خروج کامل آن و د) خروج کامل امواج و تثبیت موقعیت سطح فاصل.

حرکت ملایم‌تر امواج از ورود تا خروج و همینطور روند میرایی امواج ابتدایی به وضوح قابل مشاهده می‌باشد. در تمام نمونه‌های مورد بررسی بالا، تمایل سطح فاصل به حرکت و قرارگیری در موقعیتی است که بتواند به تعادل نیرویی برسد. به عبارت دیگر در مواردی که سطح نهایی به صورت افقی است، تعادل نیرویی به معنای برابر شدن فشار دوطرف نیز می‌باشد. در حالتی که سطح به موقعیت نهایی خود نرسیده باشد، حرکت سطح به سمتی است که فشار کمتری دارد. شاید این تعبیری ملموس‌تر باشد که ناحیه با فشار بیشتر، سطح را به سمت ناحیه با فشار کمتر هل می‌دهد.

۵-۳- جریان بر روی پله:

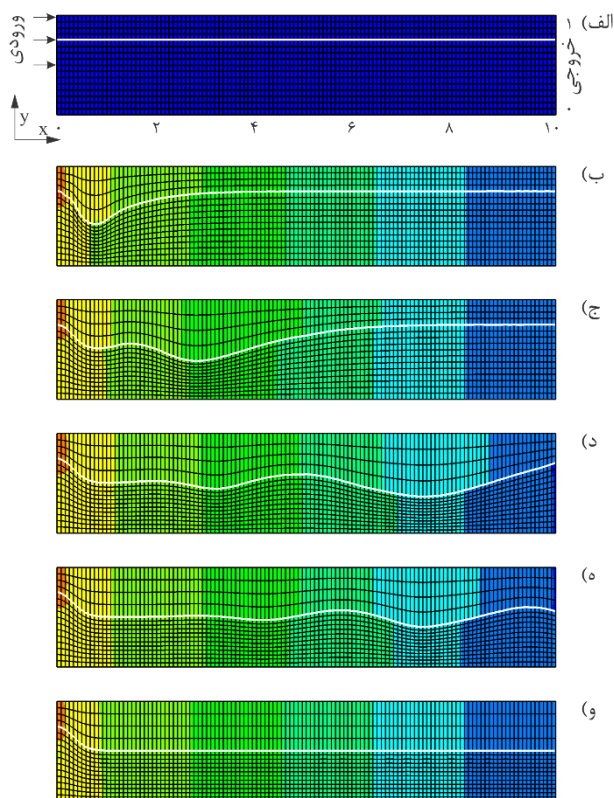
جریان بر روی پله نیز می‌تواند به عنوان یک نمونه مناسب جهت بررسی عملکرد حرکت سطح فاصل و همچنین رفتار نوسانات شکل‌گیرنده تا رسیدن به پاسخ پایا مورد توجه قرار گیرد. دامنه و شرایط مرزی برای جریان روی پله در شکل ۲۶ ارائه شده است.



شکل ۲۶- دامنه حل، شرایط مرزی و شبکه برای حل جریان بر روی پله.

شبکه برای جریان روی پله، ۴۰ در ۱۰۰ به ترتیب در راستای عرض و طول می‌باشد. در جریان بر روی پله، سیال پس از ورود به صورت توسعه یافته به میدان حل، با عبور از یک پله، با فضایی واگراتر نسبت به ورودی مواجه می‌شود. این فضا در کنار تمایل سیال جهت حرکت روبه جلو، سبب شکل‌گیری گردابه در ناحیه پله یا در پایین دست جریان می‌گردد که بسته به عدد رینولدز و دیگر مشخصات جریان می‌تواند هم از جهت اندازه و هم از نظر تعداد توسعه یابد. در بررسی حاضر، به دلیل عدم نیاز به کار با اعداد رینولدز بالا، صرفاً عدد رینولدز ۱۰ مورد ارزیابی قرار گرفته است ولی اعداد رینولدز بالاتر نیز می‌تواند به عنوان زمینه تحقیقاتی جذابی در آینده مورد توجه قرار گیرد.

باتوجه به موقعیت اولیه سطح فاصل و همچنین جریان ورودی توسعه یافته، انتظار این است که نقطه اتصال سطح و ورودی بدون تغییر بماند چراکه در موقعیت ایده آل و نهایی خود قرار دارد، اما دیگر نقاط سطح سیال با شکل‌گیری جریان، شروع به تغییر شکل می‌نمایند. مراحل حرکت سطح سیال و رفتار امواج شکل گرفته



شکل ۲۸- حرکت سطح فاصل در جریان بر روی پله به همراه کانتورهای فشار در عدد رینولدز ۱۰، (الف) سطح فاصل در حالت اولیه، (ب) تورفتگی سطح فاصل و شکل گیری موج اول، (ج) توسعه موج اولیه و تشکیل موج ثانویه، (د و ه) حرکت امواج تا خروج کامل از دامنه، (و) تثبیت کامل موقعیت سطح فاصل.

همانطور که مشاهده می شود، پس از ورود جریان به ناحیه بعد از پله، موج اولیه و درستی نیز شکل می گیرد. همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، در اعداد رینولدز بالاتر به دلیل افزایش ابعاد این موج، نیازمند ابزارهای کنترل شدت موج همچون ضرایب تقلیل و یا توابع تقلیل دامنه می باشیم. با حرکت موج به سمت خروجی، به تدریج در چند حرکت زیگزاگی به سمت بالا و پایین، موج اصلی از دامنه حل خارج شده و سطح فاصل، موقعیت نهایی خود را پیدا می کند. موقعیت نهایی در واقع یک خط جریان است که از ورودی تا خروجی امتداد یافته است. در اینجا نیز حرکت سطح با مشاهده توزیع فشار تا حد زیادی قابل توجیه می باشد، به نحوی که سطح به سمت ناحیه با فشار پایین متمایل شده و تا رسیدن به تعادل نیرویی نهایی، این حرکت رفت و برگشتی سطح ادامه داشته است.

۶- نتیجه گیری:

در این مقاله جزئیات بخش های حلگر و نحوه اعمال معادلات جریان و شروط سطح فاصل به منظور رسیدن به حل همزمان

معادلات و شروط مرزی سطح فاصل در بستر فوم-اکستند شرح داده شده است. حلگر ایجاد شده برای جریان های با عدد رینولدز پایین با موفقیت آزموده شده است. نمونه های آزمون جریان درون مجرا و جریان روی پله با موقعیت های اولیه مختلف برای سطح فاصل مورد ارزیابی قرار گرفته اند. در ادامه برخی نتایج حاصل شده، ارائه شده است:

- ترند سلول با ضخامت ناچیز می تواند به منظور اعمال شروط مرزی سطح فاصل و به منظور ایجاد سلول های فعال در دستگاه معادلات وارد شوند. این سلول ها عملاً به عنوان سلول های محاسباتی مرزی و ضمنی، مورد استفاده قرار گرفته اند.
- ترند سلول با ضخامت ناچیز به راحتی در بسترهای با کد متن باز قابل اعمال است چراکه نیازی به تغییر رویکرد از مرکز سلولی به دیگر دیدگاه ها وجود ندارد و به راحتی با رویکرد حجم محدود مطابقت دارد.
- روند ارائه شده در بستر فوم-اکستند، قابلیت کار با کلاس ها و ابزارهای جایجایی شبکه با روش های مختلف را دارد.
- در صورت بهره بردن از قابلیت های موجود در بستر فوم-اکستند و در اختیار گرفتن کلاس ها و اوپراتورهای گرادینتی، قابلیت حل موازی نیز به خوبی حفظ می گردد.
- در حل جریان های دوفازی با اعداد رینولدز پایین، امواج شکل گرفته می تواند بدون اعمال ضرایب تصحیح، از دامنه خارج شوند، در حالی که برای اعداد رینولدز بالاتر، امکان تشدید امواج و متعاقب آن استفاده از ضرایب تقلیل دهنده دامنه درواز انتظار نخواهد بود.
- می توان مشاهده کرد که در محدوده اعداد رینولدز پایین، موج اول شکل گیرنده بر سطح فاصل بحرانی ترین موج است به نحوی که با خروج یا میرایی این موج اول، عملاً سطح فاصل موقعیت خود را پیدا کرده و به سمت تثبیت شدن پیش رفته است.
- فرآیند انجام شده در واقع، گام ابتدایی و شروع برای رسیدن به یک حلگر برای انواع رژیم جریان ها و در مراحل آینده با خواص متفاوت در هر یک از دوفاز به همراه در نظر گرفتن مباحث دمایی و انتقال جرم می باشد.

۷- پیوست:

سه بخش اصلی از معادلات دینامیکی در ادامه ارائه شده اند [۴].

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 2\mu \left(n_x n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y n_x \frac{\partial u}{\partial y} + n_z n_x \frac{\partial u}{\partial z} + n_x n_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_y n_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_z n_y \frac{\partial v}{\partial z} + n_x n_z \frac{\partial w}{\partial x} + n_y n_z \frac{\partial w}{\partial y} + n_z n_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} = & \left(-\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \right. \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t_1} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t_1} \right) \right) \\ & \left/ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) \right. \right. \\ & - \frac{\partial y}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} = & \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \right. \\ & - \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t_1} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t_1} \right) \right) \\ & \left/ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) \right. \right. \\ & - \frac{\partial y}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n.T.t} = & \mu \left(n_x t_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_x t_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_x t_z \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ & + n_y t_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y t_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_y t_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + n_z t_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_z t_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_z t_z \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + n_x t_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y t_x \frac{\partial u}{\partial y} + n_z t_x \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + n_x t_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_y t_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_z t_y \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \left. + n_x t_z \frac{\partial w}{\partial x} + n_y t_z \frac{\partial w}{\partial y} + n_z t_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n.T.s} = & \mu \left(n_x s_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_x s_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_x s_z \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ & + n_y s_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y s_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_y s_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + n_z s_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_z s_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_z s_z \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + n_x s_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y s_x \frac{\partial u}{\partial y} + n_z s_x \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + n_x s_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_y s_y \frac{\partial v}{\partial y} + n_z s_y \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \left. + n_x s_z \frac{\partial w}{\partial x} + n_y s_z \frac{\partial w}{\partial y} + n_z s_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

سه مولفه گرادیان برای سه جهت دستگاه مختصات به صورت زیر

حاصل شده است.

فهرست علائم

تانسور تنش	T
تانسور نرخ کرنش	D
بردار یکه عمود بر سطح	n
بردار اول یکه مماس بر سطح	s
بردار دوم یکه مماس بر سطح	t
مولفه‌های بردار یکه عمود	n_x, n_y, n_z
مولفه‌های بردار اول یکه مماس	s_x, s_y, s_z
مولفه‌های بردار دوم یکه مماس	t_x, t_y, t_z
بردار سرعت سیال (m / s)	u
مولفه های بردار سرعت سیال	u, v, w
فشار دینامیکی سیال (Pa)	P
چگالی (kg / m^3)	ρ
لزجت دینامیکی سیال ($Pa.s$)	μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = & \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) \right. \\ & - \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t_1} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right) \right) \\ & \left/ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) \right. \right. \\ & - \frac{\partial y}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial z}{\partial t_2} - \frac{\partial z}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} \frac{\partial y}{\partial t_2} - \frac{\partial y}{\partial t_1} \frac{\partial x}{\partial t_2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

[۱۱] Apsley, D. and Hu, W., ۲۰۰۳. CFD simulation of two-and three-dimensional free-surface flow. International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۴۲(۵), pp.۴۶۵-۴۹۱.

[۱۲] Ahmadi, A., Badiei, P. and Namin, M.M., ۲۰۰۷. An implicit two-dimensional non-hydrostatic model for free surface flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۵۴(۹), pp.۱۰۵۵-۱۰۷۴.

[۱۳] Holzmann, T., ۲۰۱۶. Mathematics, numerics, derivations and OpenFOAM®. Loeben, Germany: Holzmann CFD.

[۱۴] C. Rhee, W. Chow, Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, AIAA J. ۲۱ (۱۱) (۱۹۸۳) ۱۵۲۵-۱۵۳۲.

[۱۵] T.F. Miller, F. Schmidt, Use of a pressure-weighted interpolation method for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid system, Numer. Heat Transf., Part A, Appl. ۱۴ (۲) (۱۹۸۸) ۲۱۳-۲۳۳.

[۱۶] S. Vakili-pour, S. Ormiston, A coupled pressure-based co-located finite-volume solution method for natural-convection flows, Numer. Heat Transf., Part B, Fundam. ۶۱ (۲) (۲۰۱۲) ۹۱-۱۱۵.

[۱۷] M. Darwish, A. Abdel Aziz, F. Moukalled, A coupled pressure-based finite-volume solver for incompressible two-phase flow, Numer. Heat Transf., Part B, Fundam. ۶۷ (۱) (۲۰۱۵) ۴۷-۷۴.

[۱۸] A. Ashrafizadeh, B. Alinia, P. Mayeli, A new co-located pressure-based discretization method for the numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations, Numer. Heat Transf., Part B, Fundam. ۶۷ (۶) (۲۰۱۵) ۵۶۳-۵۸۹.

[۱۹] Uroić, Tessa. "Implicitly coupled finite volume algorithms." PhD diss., University of Zagreb. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, ۲۰۱۹.

[۲۰] Cengel, Y. and Cimbala, J., ۲۰۱۳. Ebook: Fluid mechanics fundamentals and applications (si units). McGraw Hill.

[۲۱] Gartling, D.K., ۱۹۹۰. A test problem for outflow boundary conditions—flow over a backward-facing step. International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۱۱(۷), pp. ۹۵۳-۹۶۷.

انحنای سطح K

نمایشگر سطح S

مساحت سطح (m^2) A

حجم جاروب شده (m^3) $\dot{\Omega}$

مولفه‌های تنش برشی τ_{ij}

کشش سطحی (N/m) σ

هر متغیری از جریان ϕ

بخش روی سطح مربوط به هریک از فازهای گاز یا مایع iL, iG

مراجع و منابع

[۱] Gueyffier D, Li J, Scardovelli R, Zaleski S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. J Comput Phys ۱۹۹۹;۱۵۲:۴۲۳-۵۶.

[۲] Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. J Comput Phys ۱۹۸۱;۳۹:۲۰۱-۲۵.

• [۳] Ž. Tukovic, ' H. Jasak, A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow, Comput. Fluids ۵۵ (۲۰۱۲) ۷۰-۸۴

• [۴] S. Vakili-pour, M. Mohammadi, S. Ormiston, A fully coupled ALE interface tracking method for a pressure-based finite volume solver, Journal of Computational Physics ۴۲۷ (۲۰۲۱) ۱۱۰۰۵۴.

[۵] McKee S, Tome MF, Ferreira VG, Castelo A, Sousa FS, Mangiavacchi N. The MAC method. Comput Fluids ۲۰۰۸;۳۷(۸):۹۰۷-۳۰.

[۶] Tryggvason G, Bunner B, Esmaeeli A, Juric D, Al-Rawahi N, Tauber W, et al. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. J Comput Phys ۲۰۰۱;۱۶۹(۲):۷۰۸-۵۹.

[۷] S. Muzaferija, M. Peric, Computation of free surface flows using finite volume method moving grids, Numer. Heat Transf. ۳۲ (۱۹۹۷) ۳۶۹-۳۸۴.

[۸] Hochstein, J. and Williams, T., ۱۹۹۶. An implicit surface tension model. In ۳۴th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (p. ۵۹۹).

[۹] Oishi, C.M., Tomé, M.F., Cuminato, J.A. and McKee, S., ۲۰۰۸. An implicit technique for solving ۳D low Reynolds number moving free surface flows. Journal of Computational Physics, ۲۲۷(۱۶), pp.۷۴۴۶-۷۴۶۸.

[۱۰] Denner, F. and van Wachem, B.G., ۲۰۱۵. Numerical time-step restrictions as a result of capillary waves. Journal of Computational Physics, ۲۸۵, pp.۲۴-۴۰.