مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
دی ۱۳۸۸، شماره‌ی پنجاه و یکم، ص. ۱۵-۲۳

بررسی ارتعاشات غیرخطی سیستم کابل حامل جرم و فنر و دمپر تحت اثر حرکت شتاب‌دار جرم متصل به آن

امیررضا شاهانی (استاد)
مجید قدیری (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار ارتعاشات غیر خطی کابل حامل جرم متحرک که به‌کمک فنر و دمپر به کابل متصل شده، مورد بررسی قرار گرفته است. یک انتهای کابل ثابت، و انتهای دیگر آن، با اختلاف ارتفاع، غیرثابت است. کرنش مماسی کابل صفر فرض شده، اما طول کابل دائماً در حال تغییر است و این تغییر طول کابل، به آن اجازه‌ی ارتعاش می‌دهد. این تغییرات به‌گونه‌یی است که اختلاف کشش در انتهای غیر ثابت کابل صفر شود. ارتعاشات کابل به‌صورت درون‌صفحه‌یی در نظر گرفته شده و فرض بر این است که جرم متحرک فقط در راستای y نوسان می‌کند. در استخراج فرمول‌بندی حرکت، نیروی اصطکاک بین غلتک و کابل و نیز یک نیروی جلوبرنده که راستای آن مماس بر راستای کابل است مورد ملاحظه قرار گرفته، و معادلات حرکت با فرض متأثر بودن حرکت کابل از حرکت جرم به دست آمده است. برای حل، از روش گالرکین در حوزه‌ی مکان و از روش شتاب متوسط در حوزه‌ی زمان استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده از حل معادلات ارتعاش غیرخطی کابل با نتایج حاصل از معادلات ارتعاش خطیِ آن مقایسه شده است. نتایج این مطالعه در تحلیل و طراحی کابل تله‌کابین‌ها، جرثقیل‌های کابلی و غیره قابل استفاده است.

واژگان کلیدی: ارتعاشات غیرخطی کابل، جرم متحرک، روش گالرکین، روش شتاب متوسط.

shahani@kntu.ac.ir
mghadiri@dena.kntu.ac.ir

مقدمه

آن دسته از سازه‌های مهندسی که به‌نحوی با نقل و انتقال ارتباط دارند در حقیقت تحت اعمال بارهایی قرار می‌گیرند که با زمان و موقعیت تغییر می‌کنند. در مکانیک مهندسی چنین بارهایی را «بار متحرک» می‌نامند.[1] ارتعاشات کابل‌ها با جرم متحرک و بدون جرم متحرک، موضوع بسیاری از مطالعات بوده و هست. در سال ۱۹۶۴ رفتار دینامیکی یک کابل کشیده‌شده که حامل یک جرم متحرک بود با استفاده از روش‌های تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت.[2] در این بررسی جرم با سرعت ثابت در امتداد طناب در حال حرکت بود و از اثرات متقابل طناب و جرم درنتیجه‌ی بار متحرک صرف‌نظر شد. پس از آن در سال ۱۹۷۴، تأثیر شتاب جابه‌جایی را که به‌موجب آن اثر متقابل میان جرمِ در حال حرکت و سازه به‌صورت مهارشده در مسئله لحاظ می‌شد، مورد ملاحظه قرار دادند.[3] آنها خاطرنشان کردند که چنانچه فرمول‌بندی صحیح مورد نظر است، عبارات شتاب جابه‌جایی که قبلاً پذیرفته نشده بود باید مورد توجه واقع شود. در سال ۱۹۷۵ نیز کالسکه‌یی با راکت فشرده که با شتاب ثابت در امتداد یک کابل فولادیِ آویزان بین دو قله و تحت اثر نیروی پیش‌رانش در حال حرکت است مورد ملاحظه قرار گرفت.[4] در مطالعات بعدی، نتایج حاصل از تحلیلِ پاسخِ دینامیکیِ یک کابل ایده‌آل با طول بی‌نهایت درنتیجه‌ی حرکت جرمِ متصل به آن نشان داد که دینامیک سیستم می‌تواند شدیداً تحت تأثیر اینرسی جرم در حال حرکت واقع شود.[5] در سال ۱۹۸۴ مکانیک یک کابل شیب‌دارِ سفت کشیده‌شده، تحت تأثیر نیروهای خارجی بررسی، و خاطرنشان شد که کشسان‌بودن به‌ویژه در کابل‌های سفت کشیده‌شده تأثیر به‌سزایی دارد.[6] همچنین نتایج نشان می‌دهد که کابل غیرقابل کشسان با خمیدگی صفر غیرممکن است. در سال ۱۹۸۹ پاسخ دینامیکی یک کابل قابل کشسان آویزان از دو نقطه با ارتفاع مساوی، درنتیجه‌ی حرکت جرم متصل‌شده به آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.[7] در این تحلیل، از روش انتگرال‌گیری مستقیم نیومارک و برخورد تکراری نیوتن ـ رافسون برای پیش‌بینی تأثیر پارامترهای متعدد بر پاسخ سیستم استفاده شد.

در سال ۲۰۰۰ محققین ضمن تحلیل ارتعاشات گذرای یک کابل غیرکشسان با جرم شتابان سوار بر آن، مدل جدیدی را بسط و گسترش دادند که تأثیر اصطکاک غلطشی میان جرم در حال حرکت و کابل را شامل می‌شد.[8] پس از آن در سال ۲۰۰۲، ارتعاشات گذرای کابل کشیده‌شده‌یی که جرم متحرکی روی آن با سرعت ثابت

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۵/۳۱، داوری ۱۳۸۶/۱۱/۳، پذیرش ۱۳۸۷/۲/۱.

در حال حرکت است مورد بررسی قرار گرفت.[۹] برای تحلیل مسئله‌ی ارتعاشات جرم ـ کابل متغیر با زمان، از روش اجزاء محدود غیرخطی در نرم‌افزار $Ansys$ استفاده شده است. در این تحقیق اثر برخی پارامترهای مهم، مانند وزن و سرعت جرم متحرک، و همچنین نیروی کششی اولیه‌ی کابل بررسی شده است. نتایج عددی به دست آمده بیان‌گر آن است که تغییرات خیز وسط کابل و بیشینه نیروی کششی به سرعت جرم متحرک بستگی دارد.

در سال ۲۰۰۲ نیز محققین داخلی ارتعاشات خطی کابل‌های حامل اجرامِ دارای سیستمِ تعلیق را به‌روش تحلیلی و نیمه‌تحلیلیِ گالرکین مورد بررسی قرار دادند.[۱۰] آنان نشان دادند که اگر در بررسی سیستم از قسمت اینرسی جرم متحرک (در قبال کم‌بودن وزن جرم در برابر وزن کابل) صرف‌نظر و صرفاً جرم با نیروی معادل mg تحلیل شود خطای بزرگی حاصل می‌شود. آنان همچنین بیان داشتند که حالت بهینه‌یی برای ثابت فنر و استهلاک وجود دارد که در آن انرژی جنبشی کمینه می‌شود.

در این نوشتار ارتعاشات غیرخطی کابل حاملِ جرم متحرک که با فنر و دمپر به کابل متصل شده مورد بررسی قرار گرفته است. بدین‌منظور روابط ارائه‌شده در منابع موجود توسعه داده شده[۸] و معادلات با افزودن اثر جرم متحرک که با استفاده از سیستم تعلیق به کابل متصل‌شده استخراج شده‌اند. ضمناً برخی از عبارات غیر خطی که در این منابع از آنها صرف‌نظر شده در این پژوهش واردِ معادلات شده‌اند. ارتعاشات کابل و جرم متصل به آن درون‌صفحه‌یی در نظر گرفته شده و کرنش مماسی کابل صفر فرض شده است. یک انتهای کابل ثابت و انتهای دیگر آن، با اختلاف ارتفاع مشخص، غیر ثابت است و اجازه‌ی تغییر طول را به کابل می‌دهد. تغییر طول کابل به‌گونه‌یی است که اختلاف کشش در انتهای غیر ثابت کابل صفر شود. در استخراج معادلات حاکم، نیروی اصطکاک بین غلتک و کابل، و نیز نیروی جلوبرنده‌ی مماس بر راستای کابل به‌همراه اثر متقابل حرکت کابل و جرم بر هم مورد توجه قرارگرفته‌اند.

استخراج معادلات حرکت[۱۱و۱۲]

مطابق شکل ۱، کابلی را در نظر می‌گیریم که از دو نقطه به‌طول L و با اختلاف ارتفاع بین دو تکیه‌گاه h_e آویزان است. یک انتهای کابل ثابت، و انتهای دیگر آن با اختلاف ارتفاع غیر ثابت است. بردار موقعیت کارتزین نقطه‌ی s در امتداد کابل در زمان t به‌وسیله‌ی $\vec{r}(s,t)$ نمایش داده می‌شود.

$$\vec{r}(s,t) = x(s,t)\hat{i} + y(s,t)\hat{j} \qquad (۱)$$

بردار موقعیت کارتزین جرم آویزان به کابل در زمان t به‌وسیله‌ی $\vec{R}(\bar{s},t)$ نمایش داده می‌شود.

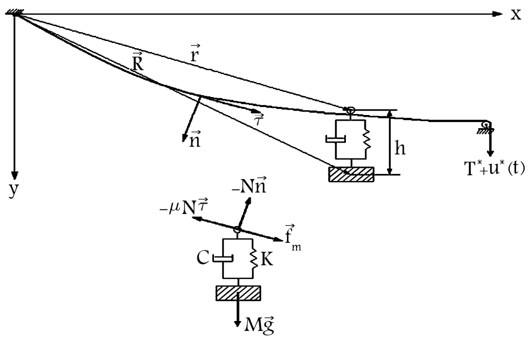
$$\vec{R}(\bar{s},t) = x(\bar{s},t)\hat{i} + (y(\bar{s},t) + h(t))(\hat{j}) \qquad (۲)$$

$$\vec{R}(\bar{s},t) = \vec{r}(\bar{s},t) + \vec{h}(t) \qquad (۳)$$

معادلات حرکت کابل نیز چنین به دست می‌آید:

$$(T\vec{r}\,')' + \vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \qquad ۰ < s < l. \qquad t > ۰ \qquad (۴)$$

که در آن T مقدار کشش و m مقدار جرم به‌ازای واحد طول کابل هستند. نیروهای خارجی وارده بر کابل جمعاً با $\vec{f}$ نشان داده شده که وزن کابل، جرم متحرک، و عکس‌العمل جرم آویزان بر روی کابل را شامل می‌شود؛ علامت پریم (′) نیز بیان‌گر



شکل ۱. نمایش کابل و جرم متحرک و پیکره آزاد نیرویی جرم متحرک.

مشتق نسبت به (s) و علامت دات (˙) بیان‌گر مشتق نسبت به زمان است. معادله‌ی قیدی به‌صورت رابطه‌ی ۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{r}\,'.\vec{r}\,' = ۱ \qquad (۵)$$

معادله‌ی حرکت جرم متحرک نیز با توجه به شکل ۱ به‌صورت رابطه‌ی ۶ بیان می‌شود:

$$M\vec{a}_m = M\vec{g} + \vec{f}_m - \mu N\vec{\tau} - N\vec{n} \qquad (۶)$$

که در آن M جرم متحرک، $\vec{g} = g\hat{j}$ شتاب گرانش، $\vec{f}_m = Mf\vec{\tau}$ نیروی پیش‌رانش، f تابع معلوم برحسب زمان، N عکس‌العمل کابل بر جرم، μ ضریب اصطکاک، $\vec{\tau} = \frac{\partial x}{\partial s}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial s}\hat{j} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ بردار یکه‌ی مماسی، $\vec{n} = -\frac{\partial y}{\partial s}\hat{i} + \frac{\partial x}{\partial s}\hat{j} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$ بردار یکه‌ی نرمال، و θ زاویه‌ی بین بردار مماس بر کابل ($\vec{\tau}$) و راستای محور X است. شتاب جرم متحرک ($\vec{a}_m$) مطابق رابطه‌ی ۷ حاصل می‌شود:

$$\vec{a}_m = \frac{d^۲}{dt^۲}\left[\vec{R}\left(\bar{s}\left(t\right),t\right)\right] = \frac{d^۲}{dt^۲}\left[\vec{r}\left(\bar{s}\left(t\right),t\right) + \vec{h}(t)\right] = \vec{r}\,''(\dot{\bar{s}})^۲ + ۲\dot{\vec{r}}\,'\dot{\bar{s}} + \vec{r}\,'\ddot{\bar{s}} + \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{h}}\left(t\right) \qquad (۷)$$

که در آن $\bar{s}\left(t\right)$ فاصله‌ی جرم متحرک در امتداد انحنای کابل است. در رابطه‌ی ۴ نیروی $\vec{f}$ چنین بیان می‌شود:

$$\vec{f} = m\vec{g} + \left(N\vec{n} + \mu N\vec{\tau}\right)\delta\left(s - \bar{s}\right) \qquad (۸)$$

که در آن $\delta\left(s - \bar{s}\right)$ تابع دلتای دیراک است. بنابراین معادلات حاکم بر حرکت سیستم، مرکب از حرکت جرم و حرکت کابل، چنین بیان می‌شوند:

$$\left(T\vec{r}\,'\right)' + m\vec{g} + \left(M\vec{g} + \vec{f}_m\right)\delta\left(s - \bar{s}\right) = m\ddot{\vec{r}} + M\delta\left(s - \bar{s}\right)\left[\vec{r}\,''\left(\dot{\bar{s}}\right)^۲ + ۲\dot{\vec{r}}\,'\dot{\bar{s}} + \vec{r}\,'\ddot{\bar{s}} + \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{h}}\left(t\right)\right] \qquad (۹)$$

این معادله از جایگذاری مقدار $\vec{f}$ از رابطه‌ی ۸ و ($N\vec{n} + \mu N\vec{\tau}$) از رابطه‌ی ۶ در رابطه‌ی ۴، که بیان‌گر معادله‌ی حرکت کابل است، حاصل شده است. با قراردادن $\vec{a}_m$ از رابطه‌ی ۷ در معادله‌ی ۶، معادله‌ی حرکت جرم به دست می‌آید که عبارت است از:

$$M\left[\vec{r}\,''\left(\dot{\bar{s}}\right)^۲ + ۲\dot{\vec{r}}\,'\dot{\bar{s}} + \vec{r}\,'\ddot{\bar{s}} + \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{h}}\left(t\right)\right] = \vec{f}_m + M\vec{g} - \left[N\vec{n} + \mu N\vec{\tau}\right], \qquad s = \bar{s}\left(t\right) \qquad (۱۰)$$

از طرفی معادله‌ی حاکم بر ارتعاش جرم با توجه به شکل ۱ به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ قابل استخراج است:

$$M\left\{\left[\left(\frac{d^2\vec{r}(\bar{s},t)}{dt^2}+\ddot{\vec{h}}(t)\right).\hat{j}\right]\right\}+C\left(\dot{h}(t)\right)+k\left(h-h_0\right)=0 \qquad (۱۱)$$

که در آن C ثابت میرایی، K سختی فنر و h_0 خیز استاتیکی فنر است. فرض بر این است که جرم فقط در راستای y ارتعاش می‌کند. از معادلات ۵، ۹، ۱۰ و ۱۱ برای محاسبه‌ی $h,\bar{s},N,T,\vec{r}$ زمانی که $\vec{g},\mu,M,m$ و نقاط تکیه‌گاهی کابل مشخص‌اند استفاده می‌شوند. شرایط مرزی مسئله عبارت است از:

$$\vec{r}=0,\qquad at\qquad s=0 \qquad (۱۲)$$

$$\vec{r}=L\hat{i}+h_e\hat{j},\qquad at\qquad s=\ell(t) \qquad (۱۳)$$

$$T=T^*+u^*(t),\qquad at\qquad s=\ell(t) \qquad (۱۴)$$

که در آن $u^*(t)$ نیروی کنترلی مشخص‌شده به‌وسیله‌ی الگوریتم کنترلی، T^* کشش استاتیکی کابل در $s=\ell(t)$ و $\ell(t)$ طول کل کابل است که باید تعیین شود. برای تعیین شکل استاتیکی کابل، زمانی که جرم آویزان به‌صورت ثابت روی کابل قرار دارد، مسئله را به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{d\vec{r}_0}{ds}\right)=-[m+M\delta(s-\bar{s})]\vec{g} \qquad (۱۵)$$

معادله‌ی قیدی ۵ در حالت استاتیکی می‌شود:

$$\frac{d\vec{r}_0}{ds}.\frac{d\vec{r}_0}{ds}=1 \qquad (۱۶)$$

اندیس ۰ که در دو رابطه‌ی ۱۵ و ۱۶ به‌کار رفته متغیر را در حالت استاتیکی نشان می‌دهد. با شرایط مرزی در حالت استاتیکی به‌صورت زیر داریم:

$$\vec{r}_0=0,\qquad at\qquad s=0 \qquad (۱۷)$$

$$\vec{r}_0=L\hat{i}+he\hat{j},\qquad at\qquad s=\ell_0 \qquad (۱۸)$$

$$T_0(\ell_0)=T^* \qquad (۱۹)$$

در شکل اسکالر معادله‌ی ۱۵ چنین بیان می‌شود:

$$\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{dx_0}{ds}\right)=0 \qquad (۲۰)$$

$$\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{dy_0}{ds}\right)=-mg-Mg\delta(s-\bar{s}) \qquad (۲۱)$$

با انتگرال‌گیری از عبارت ۲۱ و با در نظر گرفتن رابطه‌ی قیدی ۱۶ داریم:

$$\frac{dy_0}{dx_0}=-\sin h\beta(x_0-c_1),\qquad 0<x_0<\bar{x}_0 \qquad (۲۲)$$

$$\frac{dy_0}{dx_0}=-\sin h\left[\beta(x_0-\hat{c}_1)+\frac{Mg}{T_0(\bar{s})}\right],\qquad \bar{x}_0<x_0<L \qquad (۲۳)$$

که در آن $\beta=\frac{mg}{H_0}$ و $H_0=T_0\frac{dx_0}{ds}$ است و H_0 مؤلفه‌ی افقی کشش کابل را نشان می‌دهد. عبارت $\frac{Mg}{T_0(\bar{s})}$ در معادله‌ی ۲۳ را می‌توان به‌طور تقریبی و به‌وسیله‌ی انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۱۵، روی بازه $\bar{s}-\varepsilon$ تا $\bar{s}+\varepsilon$ و با این ملاحظه که ε انحراف کوچک از موقعیت جرم ساکن بر کابل را نشان می‌دهد به دست آورد.

$$T_0\vec{r}_0\Big|_{\bar{s}-\varepsilon}^{\bar{s}+\varepsilon}=-M\vec{g} \qquad (۲۴)$$

معادله‌ی ۲۴ در شکل اسکالر چنین بیان می‌شود:

$$T_0\frac{dx_0}{ds}\Big|_{\bar{s}-\varepsilon}^{\bar{s}+\varepsilon}=0\qquad\Rightarrow\qquad T_0\frac{dx_0}{ds}\Big|_{\bar{s}-\varepsilon}=T_0\frac{dx_0}{ds}\Big|^{\bar{s}+\varepsilon}=H_0 \qquad (۲۵)$$

$$\frac{dy_0}{dx_0}\Big|_{\bar{s}+\varepsilon}-\frac{dy_0}{dx_0}\Big|_{\bar{s}-\varepsilon}=-\frac{Mg}{H_0} \qquad (۲۶)$$

با جایگزین کردن معادلات ۲۳ و ۲۴ در معادله‌ی ۲۶ داریم:

$$\frac{Mg}{T_0(\bar{s})}=-\beta(\bar{x}_0-\hat{c}_1)+sinh^{-1}\left[sinh\beta(\bar{x}_0-c_1)+\frac{Mg}{H_0}\right] \qquad (۲۷)$$

خیز استاتیکی کابل $'y_0'$ در اثر وزن کابل و جرم متصل به کابل را می‌توان از معادلات ۲۳ و ۲۴ به دست آورد که نتیجه می‌دهد:

$$y_0=\frac{1}{\beta}[-cosh\beta(x_0-c_1)+c_2],\qquad 0<x_0<\bar{x}_0 \qquad (۲۸)$$

$$y_0=\frac{1}{\beta}\left\{-cosh\left[\beta(x_0-\bar{x}_0)+sinh^{-1}\left[sinh\,\beta(\bar{x}_0-c_1)+\frac{Mg}{H_0}\right]\right]+\hat{c}_2\right\},\qquad \overline{x_0}<x_0<L \qquad (۲۹)$$

$\hat{c}_2,c_2,c_1$ ثوابت انتگرال‌گیری‌اند و از شرایط $y_0=0$ در $x_0=0$ و $y_0=h_e$ در $x_0=L$ و $y_0\big|_{\bar{s}-\varepsilon}=y_0\big|_{\bar{s}+\varepsilon}$ در $x_0=\bar{x}_0$ قابل تعیین‌اند. بنابراین کشش کابل T_0 مطابق رابطه‌ی ۳۰ و ۳۱ بیان می‌شود:

$$T_0=H_0\frac{ds}{dx_0}=H_0\cosh\beta\left(x_0-c_1\right),\qquad 0<x_0<\bar{x}_0 \qquad (۳۰)$$

$$T_0=H_0\frac{ds}{dx_0}=H_0\left\{\cosh\left[\beta\left(x_0-\bar{x}_0\right)+\sinh^{-1}\left[\sinh\beta\left(\bar{x}_0-c_1\right)+\frac{Mg}{H_0}\right]\right]\right\},\qquad \bar{x}_0<x_0<L \qquad (۳۱)$$

طول کابل در فاصله‌ی افقی $'x_0'$ از انتهای ثابت با $s(x_0)$ نشان داده شده و طبق رابطه‌ی ۳۲ قابل محاسبه است:

$$s(x_0)=\int_0^{\bar{x}_0}\left[1+\left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2\right]^{1/2}dx_0+\int_{\bar{x}_0}^{x_0}\left[1+\left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2\right]^{1/2}dx_0 \qquad (۳۲)$$

که در آن طول کل کابل $\ell_0=s(L)$ و $T^*=T_0(\ell_0)$ است. حال به‌منظور استخراج معادلات حرکت و با در نظر گرفتنِ روابط بیان شده در حالت استاتیکی داریم:

$$\vec{r}(s,t)=\vec{r}_0(s)+\vec{u}(s,t)=\vec{r}_0(s)+u(s,t)\,\vec{r}_0+w(s,t)\,\vec{n}_0 \qquad (۳۳)$$

$$T(s,t)=T_0(s)+\Delta T(s,t) \qquad (۳۴)$$

که در آن $\vec{u}$ بیانگر جابه‌جایی، ΔT تغییرات کشش کابل از حالت استاتیکی، $\vec{t}_0$ بردار یکه‌ی مماس و $\vec{n}_0$ بردار یکه‌ی عمود بر کابل در حالت استاتیکی است. با قراردادن روابط ۳۳ و ۳۴ در رابطه‌ی ۹، و با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۱۵ داریم:

$$\left[\Delta T\vec{r}_0+T_0\vec{u}_0'+\Delta T\,\vec{u}'\right]'+\vec{f}_m\delta\left(s-\bar{s}\right)=m\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+M\vec{a}_m\delta\left(s-\bar{s}\right) \qquad (۳۵)$$

رابطه‌ی قیدی ۵ با جایگذاری از رابطه‌ی ۳۳ و با توجه به عبارت ۱۶ می‌شود:

$$2\vec{r}'_o.\vec{u}' + \vec{u}'.\vec{u}' = 0 \tag{۳۶}$$

شرایط مرزی برای $\vec{u}$ به‌صورت $\vec{u} = 0$ در $s = 0$ است. برای شرایط مرزی ۱۳ و ۱۴، $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ را با $\ell_0 >> \Delta\ell$ در نظر می‌گیریم. حال با به‌کارگیری بسط تیلور برای معادله‌ی ۱۳ خواهیم داشت:

$$\vec{r}_0\left(\ell_0\right) + \tau_0 \Delta\ell + \vec{u}\left(\ell_0\right) + \vec{u}'\left(\ell_0\right)\Delta\ell = L\hat{i} + he\hat{j} \tag{۳۷}$$

این رابطه، با توجه به رابطه‌ی ۱۸، چنین کاهش می‌یابد:

$$\vec{\tau}_o\,\Delta\ell + \vec{u}\left(\ell_o\right) + \vec{u}'\left(\ell_o\right)\,\Delta\ell = 0 \tag{۳۸}$$

و به‌طور مشابه، معادله‌ی ۱۴ با در نظرگرفتن رابطه‌ی ۳۴ به شکل رابطه‌ی ۳۹ کاهش می‌یابد:

$$\left[T'_0\left(\ell_0\right) + \Delta T'\left(\ell_0\right)\right]\,\Delta\ell + \Delta T\left(\ell_0\right) = u^*\left(t\right) \tag{۳۹}$$

حال با حذف $\Delta\ell$ بین دو رابطه‌ی ۳۸ و ۳۹ داریم:

$$\left(T'_0 + \Delta T'\right)\,\vec{u} + \left(u^* - \Delta T\right)\left(\vec{\tau}_0 + \vec{u}'\right) = 0, \quad at \quad s = \ell_0 \tag{۴۰}$$

با توجه به فرض صفر بودن کرنش مماسی داریم:

$$\vec{u}'.\vec{\tau}_0 = u' - w\,\chi_0 = 0 \tag{۴۱}$$

بنابراین برای خلاصه‌کردن مسئله‌ی دینامیکی داریم:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\Delta T\right)\vec{\tau}_0 + T_0\vec{u}' + \Delta T\vec{u}'\right]' + \vec{f}_m\delta\left(s-\bar{s}\right) = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ &M\delta(s-\bar{s})\Big[\left(\chi_0\vec{n}_0 + \vec{u}''\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + 2\dot{\vec{u}}'\dot{\bar{s}} + \left(\vec{\tau}_0 + \vec{u}'\right)\ddot{\bar{s}} + \\ &\ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{h}}\left(t\right)\Big], \quad 0 < s < \ell_0\end{aligned} \tag{۴۲}$$

و

$$\begin{aligned}&M\,\left[\left(\chi_0\,\vec{n}_0 + \vec{u}''\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + 2\,\dot{\vec{u}}'\,\dot{\bar{s}} + \left(\vec{\tau}_0 + \vec{u}'\right)\ddot{\bar{s}} + \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{h}}\right] = \\ &\vec{f}_m + M\vec{g} - N\,\vec{n} - \mu\,N\,\vec{\tau}, \quad s = \bar{s}\left(t\right)\end{aligned} \tag{۴۳}$$

و

$$\begin{aligned}&M\,\left\{\left[\left(\frac{d^2\vec{r}\left(\bar{s},t\right)}{dt^2}.\hat{j} + \ddot{h}\left(t\right)\right)\right]\right\} + C\,\left(\dot{h}\left(t\right)\right) + \\ &K\,\left(h - h_0\right) = 0\end{aligned} \tag{۴۴}$$

معادلات ۴۱ تا ۴۴ شش معادله را برای به دست آوردن شش مجهول $\Delta T, N, w, u$، $h(t), \bar{s}(t)$ فراهم می‌کنند. شرایط مرزی به‌شکل اسکالر عبارت‌اند از:

$$u\left(s,t\right) = w\left(s,t\right) = 0 \quad at \quad s = 0 \tag{۴۵}$$

$$T'_0\,u + \Delta T'\,u + u^* - \Delta T = 0, \quad w = 0, \quad at \quad s = \ell_0 \tag{۴۶}$$

با حل معادله‌ی ۴۲ در راستای $\vec{n}_0, \vec{\tau}_0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&\left(\Delta T\right)' - T_0\,\chi_0\,\left(u\chi_0 + w'\right) - \Delta T\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right) + \left(\vec{f}_m.\vec{\tau}_0\right) \\ &\delta\left(s-\bar{s}\right) = m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M\,\delta\left(s-\bar{s}\right)\Big[-\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + \ddot{\bar{s}} + \\ &\ddot{u} + \ddot{h}\left(t\right).\frac{dy_0}{ds}\Big], \quad 0 < s < \ell_0\end{aligned} \tag{۴۷}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Delta T\right)\chi_0 + \left[T_0\left(\chi_0 u + w'\right)\right]' + \left[\Delta T\left(\chi_0 u + w'\right)\right]' + \\ &\vec{f}_m.\vec{n}_0\delta\left(s-\bar{s}\right) = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M\delta(s-\bar{s})\Big[\left(\chi_0 + \left(\chi_0 u + w'\right)'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 \\ &+2(\chi_0 u + w')^{\cdot}\dot{\bar{s}} + (\chi_0 u + w')\ddot{\bar{s}} + \ddot{w} + \ddot{h}(t)\frac{dx_0}{ds}\Big], \quad 0 < s < \ell_0\end{aligned} \tag{۴۸}$$

به‌طور مشابه با درنظرگرفتن معادله‌ی حرکت جرم متحرک (رابطه‌ی ۴۳) در راستای $\vec{n}_0, \vec{\tau}_0$، داریم:

$$\begin{aligned}&M\left[-\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + \ddot{\bar{s}} + \ddot{u} + \ddot{h}\,\frac{dy_0}{ds}\right] = \vec{f}_m.\vec{\tau}_0 + \\ &Mg\frac{dy_0}{ds} + N\left(\chi_0 u + w' - \mu\right), \quad s = \bar{s}\left(t\right)\end{aligned} \tag{۴۹}$$

$$\begin{aligned}&M\left[\left(\chi_0 + \left(u\chi_0 + w'\right)'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + 2\left(u\chi_0 + w'\right)^{\cdot}\dot{\bar{s}} + \right. \\ &\left.\left(u\chi_0 + w'\right)\ddot{\bar{s}} + \ddot{w} + \ddot{h}\frac{dx_0}{ds}\right] = \vec{f}_m.\vec{n}_0 + Mg\frac{dx_0}{ds} - \\ &N\left[1 + \mu\left(u\chi_0 + w'\right)\right], \quad s = \bar{s}\left(t\right)\end{aligned} \tag{۵۰}$$

اگر N را از رابطه‌ی ۴۹ به دست آورده و در رابطه‌ی ۵۰ قرار دهیم، آنگاه:

$$\begin{aligned}&M\left(\chi_0 u + w' - \mu\right)\left[\left(\chi_0 + \left(u\chi_0 + w'\right)'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + \right. \\ &\left.2\left(u\chi_0 + w'\right)^{\cdot}\dot{\bar{s}} + \left(u\chi_0 + w'\right)\ddot{\bar{s}} + \ddot{w} + \ddot{h}\frac{dx_0}{ds}\right] = \\ &\left(\chi_0 u + w' - \mu\right)\left[\left(\vec{f}_m.\vec{n}_0 + Mg\frac{dx_0}{ds}\right)\right] - \left[1 + \mu\left(u\chi_0 + w'\right)\right]. \\ &\left\{M\left[-\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + \ddot{\bar{s}} + \ddot{u} + \ddot{h}\,\frac{dy_0}{ds}\right] - \right. \\ &\left.\left(\vec{f}_m.\vec{\tau}_0 + Mg\frac{dy_0}{ds}\right)\right\}, \quad s = \bar{s}\left(t\right)\end{aligned} \tag{۵۱}$$

معادله‌ی ارتعاش جرم متحرک عبارت است از:

$$\begin{aligned}&M\left\{\left[\left(\chi_0 + u'\chi_0 + u\,\chi'_0 + w''\right)\frac{dx_0}{ds} - \left(u\chi_0 + w'\right)\chi_0\frac{dy_0}{ds}\right]\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 \right. \\ &\left.+2\left[\left(\dot{u}\chi_0 + \dot{w}'\right)\frac{dx_0}{ds}\right]\dot{\bar{s}}\right\} + M\left\{\left[\frac{dy_0}{ds} + \left(u\chi_0 + w'\right)\frac{dx_0}{ds}\right]\ddot{\bar{s}} + \right. \\ &\left.\ddot{u}\frac{dy_0}{ds} + \ddot{w}\frac{dx_0}{ds} + \ddot{h}\right\} + C\dot{h}\left(t\right) + K\left(h - h_0\right) = 0, \quad s = \bar{s}\left(t\right)\end{aligned} \tag{۵۲}$$

بنابراین معادلات ۴۱، ۴۷، ۴۸، ۵۱ و ۵۲ برای تعیین $\Delta T(s,t), w(s,t), u(s,t)$، $h(t), \bar{s}(t)$، و با در نظرگرفتن شرایط مرزی ۴۵ و ۴۶ مورد استفاده قرار می‌گیرند. نیروی $\vec{f}_m$، روی جرم متحرک و در راستای مماس برکابلِ در حال ارتعاش به‌صورت

رابطه‌ی ۵۳ عمل می‌کند:

$$\vec{f}_m = Mf\vec{r} = Mf\left[\vec{r}_0 + \left(\chi_0 u + w'\right)\vec{n}_0\right] \qquad (۵۳)$$

که در آن f یک تابع معلوم بر حسب زمان است؛ برای مثال f می‌تواند در یک بازه مشخص، یک ثابت مثبت برای جرم با سرعت در حال افزایش و یک ثابت منفی برای سرعت در حال کاهش باشد و به توقف‌گاهی در انتهای کابل برسد.

بیان حل

برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی کوپله حاکم بر مسئله، از روش گالرکین به‌همراه روش شتاب متوسط برای گسسته‌کردن زمان استفاده می‌شود. از این رو w, u را به‌صورت توابع پیوسته در نظر گرفته و مطابق رابطه‌های ۵۴ و ۵۵ تعریف می‌کنیم:

$$w(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_0}s\right) \qquad (۵۴)$$

$$u(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t)\; R_n(s) \qquad (۵۵)$$

که در آن w, u به‌گونه‌یی تعریف می‌شوند که شرایط مرزی ۴۵ ارضاء شود. با قرار دادن این روابط در رابطه‌ی قیدی ۴۱ داریم:

$$u' = \chi_0 w \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) R'_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0 \alpha_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_0}s\right) \qquad (۵۶)$$

از تساوی بالا دو نتیجه حاصل می‌شود:

$$\beta_n(t) = \alpha_n(t) \qquad (۵۷)$$

$$R_n(s) = \int_0^s \chi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{\ell_0}s\right) ds \qquad (۵۸)$$

فرض می‌شود که حاصل‌ضرب u, w در ΔT کوچک، و قابل صرف‌نظر کردن است. حال اگر در معادله‌ی ۴۷ از عبارت $\Delta T\chi_0(u\chi_0 + w')$ و در معادله‌ی ۴۸ از عبارت $[\Delta T(\chi_0 u + w')]'$ صرف‌نظر کنیم، با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی معادله‌ی ارتعاش کابل در راستای مماسی روی بازه $0 < s < \ell_0$ داریم:

$$\Delta T = \int_0^s \left[T_0\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] ds + b_1(t), \quad 0 < s < \bar{s} \qquad (۵۹)$$

$$\Delta T = \int_0^s \left\{T_0\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right) - Mf\delta\left(s - \bar{s}\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M\delta\left(s - \bar{s}\right)\left[-\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + \ddot{\bar{s}} + \ddot{u} + \ddot{h}(t).\frac{dy_0}{ds}\right]\right\} ds + b_2(t), \qquad \bar{s} < s < \ell_0 \qquad (۶۰)$$

برای به دست آوردن دو ثابت انتگرال‌گیری $b_2(t), b_1(t)$ از دو شرط زیر استفاده می‌شود:

۱. شرط مرزی ۴۶ با صرف‌نظر کردن از عبارت $\Delta T'u$، یعنی:

$$T'_0 u + u^* - \Delta T = 0, \qquad at \quad s = \ell_0 \qquad (۶۱)$$

۲. فرض پیوسته بودن تغییرات کشش کابل در $s = \bar{s}(t)$. درنتیجه:

$$\Delta T = T'_0 u\Big|_{s=\ell_0} + u^*|_{s=\ell_0} - \int_s^{\ell_0} \left[T_0\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] ds, \quad 0 < s < \ell_0 \qquad (۶۲)$$

با جایگذاری ΔT به دست آمده از رابطه‌ی ۶۲، در معادله‌ی ۴۸ که بیانگر ارتعاش کابل در راستای عمود بر کابل است، خواهیم داشت:

$$\left[T_0\left(\chi_0 u + w'\right)\right]' + \chi_0\left\{T'_0 u\Big|_{s=\ell_0} + u^*\Big|_{s=\ell_0} - \int_s^{\ell_0}\left[T_0\chi_0\left(u\chi_0 + w'\right) + m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] ds\right\} + Mf\left(\chi_0 u + w'\right)\delta\left(s - \bar{s}\right) = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M\delta\left(s - \bar{s}\right).\left[\left(\chi_0 + \left(\chi_0 u + w'\right)'\right)\left(\dot{\bar{s}}\right)^2 + 2\left(\chi_0 u + w'\right)^{\cdot}\,\dot{\bar{s}} + \left(\chi_0 u + w'\right)\,\ddot{\bar{s}} + \ddot{w} + \ddot{h}(t)\frac{dx_0}{ds}\right], \quad 0 < s < \ell_0 \qquad (۶۳)$$

معادلات ۵۲،۵۱ و ۶۳ توصیف‌گر حرکت کابلِ حاملِ جرمِ متحرک، شامل سه معادله‌ی دیفرانسیل کوپله‌شده، هستند.

برای حل تقریبی سیستم جرم و کابل از روش گالرکین استفاده می‌کنیم. با استفاده از روش گالرکین و برای کمینه‌سازی خطا، معادله‌ی ارتعاش کابل در راستای عمودی (رابطه‌ی ۶۳) را در تابع وزن $\sin\left(\frac{n\pi}{\ell_0}s\right)$ ضرب کرده و نسبت به s از صفر تا ℓ_0 انتگرال‌گیری می‌کنیم. چنان که مشاهده می‌شود، در معادلات بالا علاوه بر $h(t), s(t), \alpha(t)$ مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آنها نیز ظاهر شده است؛ برای ایجاد رابطه بین این متغیرها و مشتقات آنها از روش شتاب متوسط استفاده می‌کنیم.[13]

$$\dot{\alpha}_n^{t+\Delta t} = \dot{\alpha}_n^t + a_1\ddot{\alpha}_n^t + a_2\ddot{\alpha}_n^{t+\Delta t} = c1\alpha\left(\dot{\alpha}_n^t, \ddot{\alpha}_n^t\right) + a_2\ddot{\alpha}_n^{t+\Delta t}$$
$$\alpha_n^{t+\Delta t} = \alpha_n^t + a_3\dot{\alpha}_n^t + a_4\ddot{\alpha}_n^t + a_5\ddot{\alpha}_n^{t+\Delta t} = c2\alpha\left(\alpha_n^t, \dot{\alpha}_n^t, \ddot{\alpha}_n^t\right) + a_5\ddot{\alpha}_n^{t+\Delta t} \qquad (۶۴)$$

$$\dot{\bar{s}}^{t+\Delta t} = \dot{\bar{s}}^t + a_1\ddot{\bar{s}}^t + a_2\ddot{\bar{s}}^{t+\Delta t} = c1\bar{s}\left(\dot{\bar{s}}^t, \ddot{\bar{s}}^t\right) + a_2\ddot{\bar{s}}^{t+\Delta t}$$
$$\bar{s}^{t+\Delta t} = \bar{s}^t + a_3\dot{\bar{s}}^t + a_4\ddot{\bar{s}}^t + a_5\ddot{\bar{s}}^{t+\Delta t} = c2\bar{s}\left(\bar{s}^t, \dot{\bar{s}}^t, \ddot{\bar{s}}^t\right) + a_5\ddot{\bar{s}}^{t+\Delta t} \qquad (۶۵)$$

$$\dot{h}^{t+\Delta t} = \dot{h}^t + a_1\ddot{h}^t + a_2\ddot{h}^{t+\Delta t} = c1h\left(\dot{h}^t, \ddot{h}^t\right) + a_2\ddot{h}^{t+\Delta t}$$
$$h^{t+\Delta t} = h^t + a_3\dot{h}^t + a_4\ddot{h}^t + a_5\ddot{h}^{t+\Delta t} = c2h\left(h^t, \dot{h}^t, \ddot{h}^t\right) + a_5\ddot{h}^{t+\Delta t} \qquad (۶۶)$$

که در آن:

$$a_1 = \frac{\Delta t}{2},\; a_2 = \frac{\Delta t}{2},\; a_3 = \Delta t,\; a_4 = \frac{\Delta t^2}{4},\; a_5 = \frac{\Delta t^2}{4} \qquad (۶۷)$$

$c2h, c1h, c2\bar{s}, c1\bar{s}, c2\alpha, c1\alpha$ عبارت‌هایی هستند که در زمان t محاسبه می‌شوند. با استفاده از روابط تعریف‌شده در بالا و جایگذاری آنها در معادلات حرکت سیستم، معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی به معادلات جبری غیرخطی تبدیل و به‌صورت معادلات گسسته‌ی زمانی بیان‌شده، و برحسب سه مجهول $h(t), s(t), \alpha(t)$ به دست می‌آیند.

نتایج عددی

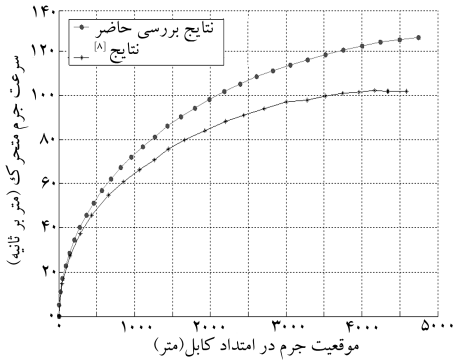
نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات، تحت شرایط زیر آورده شده است.

$$Mg = ۲۵۰۰۰\ N;\ mg = ۲۱٫۴۵\ N/m;\ g = ۹٫۸۰۶\ m/s^{۲};$$

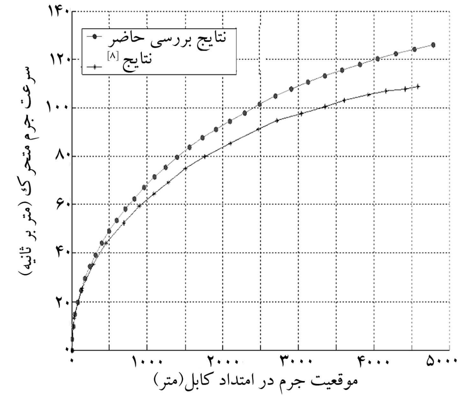
$$L = ۴۵۰۰\ m;\ h_e = ۷۵۰\ m;\ \mu = ۰;\ f = ۰\ m/s^{۲};\ u^{*} = ۰.$$

در شکل ۲ و ۳ نمودار سرعت جرم متحرک ($\dot{\bar{s}}$) نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل برای $H_{۰} = ۵۰۰\ KN$ و $H_{۰} = ۷۵۰\ KN$ نشان داده شده، و پاسخ به دست آمده از حل عددی با پاسخ‌های ارائه‌شده توسط دیگر محققین[۸] مقایسه شده است. برای مقایسه‌ی این نتایج، معادلات به‌شکل معادلات ارائه شده توسط آنان ساده شده و سپس مقایسه‌ی مورد نظر انجام شده است. مقادیر سرعت به دست آمده در این پژوهش بیشتر از مقادیر سرعت گزارش شده توسط این محققین است ولی شکل کلی نمودارها مشابه‌اند.

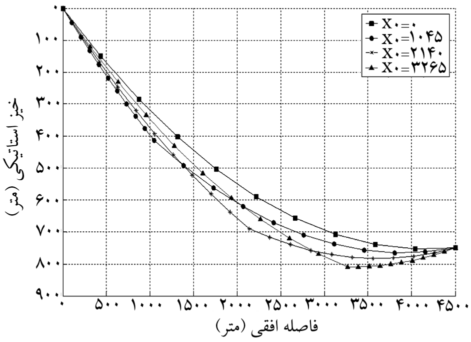
شکل‌های ۴، ۵ و ۶ خیز استاتیکی کابل را در اثر بار نقطه‌یی در $x_{۰}$های مختلف و تحت $H_{۰}$های متفاوت نشان می‌دهد. در شکل ۴ خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز $Mg = ۲۵\ KN$ و $H_{۰} = ۲۵۰\ KN$ در $x_{۰} = ۱۰۴۵\ m, x_{۰} = ۲۱۴۰\ m,$



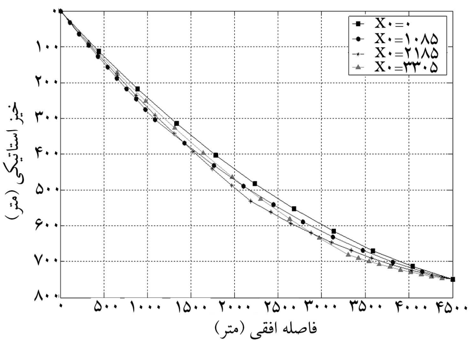
شکل ۲. نمودار سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل برای $H_{۰} = ۵۰۰\ KN$، که از حل عددی آن و مقایسه‌ی نتایج حاصله با پاسخ ارائه‌شده در دیگر مراجع[۸] حاصل شده است.



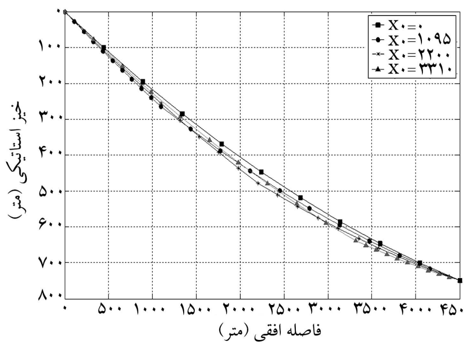
شکل ۳. نمودار سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل برای $H_{۰} = ۷۵۰\ KN$، که از حل عددی آن و مقایسه‌ی نتایج حاصله با پاسخ ارائه‌شده در دیگر مراجع[۸] حاصل شده است.



شکل ۴. خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز در نقاط متفاوت به‌ازای $H_{۰} = ۲۵۰\ KN$.



شکل ۵. خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز در نقاط متفاوت به‌ازای $H_{۰} = ۵۰۰\ KN$.

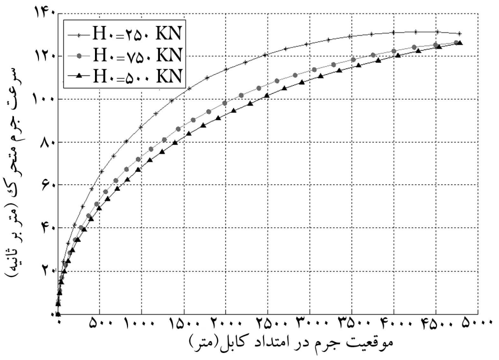


شکل ۶. خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز در نقاط متفاوت به‌ازای $H_{۰} = ۷۵۰\ KN$.

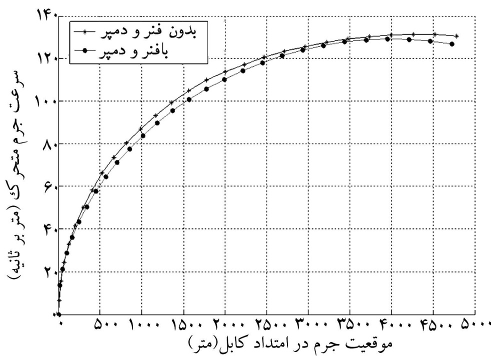
$x_{۰} = ۰\ m$ و $x_{۰} = ۳۲۶۵\ m$ نمایش داده شده است. همچنین در شکل ۵ خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز $Mg = ۲۵\ KN$ و $H_{۰} = ۵۰۰\ KN$ در $x_{۰} = ۰\ m, x_{۰} = ۱۰۸۵\ m, x_{۰} = ۲۱۸۵\ m$ و $x_{۰} = ۳۳۰۵\ m$ به نمایش درآمده است. و در شکل ۶ خیز استاتیکی کابل تحت اثر بار متمرکز $Mg = ۲۵\ KN$ و $H_{۰} = ۷۵۰\ KN$ در $x_{۰} = ۰\ m\ , x_{۰} = ۱۰۹۵\ m, x_{۰} = ۲۲۰۰\ m$ و $x_{۰} = ۳۳۱۰\ m$ نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها نتیجه‌گیری می‌شود که خیز استاتیکی کابل در اثر وزن جرم متحرک افزایش یافته و با افزایش $H_{۰}$، کاهش می‌یابد.

در شکل ۷ سرعت جرم متحرک ($\dot{\bar{s}}$) نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل، بدون احتساب سیستم تعلیق برای جرم متحرک برای سه مقدار $H_{۰} = ۲۵۰\ KN$, $H_{۰} = ۵۰۰\ KN$ و $H_{۰} = ۷۵۰\ KN$ نمایش داده شده است. چنان‌که مشاهده

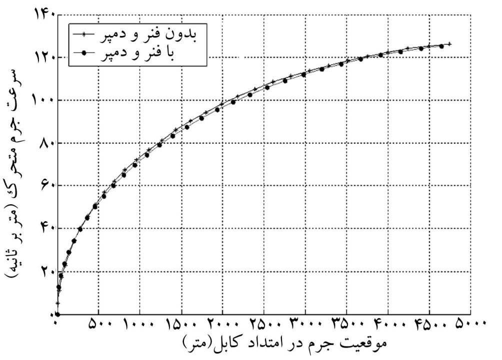
می‌شود در آغاز حرکت شیب مربوط به $H_\circ$های کوچک‌تر، بیشتر از $H_\circ$های بزرگ‌تر است و این رفتار با توجه به شکل استاتیکی کابل دور از انتظار نیست؛ زیرا شیب کابل در حالت استاتیکی در آغاز حرکت برای $H_\circ$های کوچک‌تر، بیشتر از $H_\circ$های بزرگ‌تر است و درنتیجه جرم متحرک با سرعت بیشتر به سمت پایین حرکت خواهد کرد. بنابراین می‌توان گفت که در ابتدای حرکت، با افزایش $H_\circ$ نرخ افزایشِ سرعت کاهش می‌یابد ولی در ادامه‌ی مسیر نرخ کاهش سرعت برای $H_\circ$های کوچک به‌مراتب بیشتر از $H_\circ$های بزرگ‌تر است. لذا مشاهده می‌شود که با افزایش فاصله‌ی جرم متحرک از مبداء، سرعت جرم متحرک با $H_\circ$های کوچک‌تر به سمت کاهش سرعت پیش می‌رود.



شکل ۷. نمودار سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل برای سه مقدار $H_\circ = ۷۵۰\ KN, H_\circ = ۵۰۰\ KN, H_\circ = ۲۵۰\ KN$.



شکل ۸. مقایسه‌ی نمودار مربوط به سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل، در دو حالت بدون فنر و دمپر، و با فنر و دمپر در $H_\circ = ۲۵۰\ KN$.

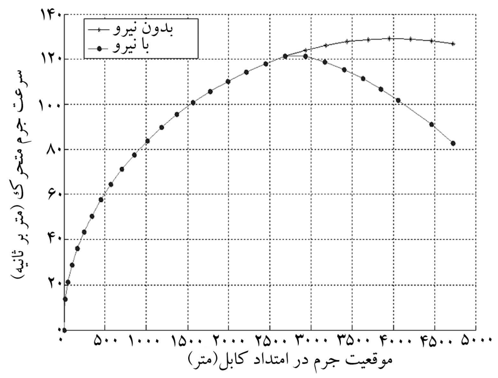


شکل ۹. مقایسه‌ی نمودار مربوط به سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در امتداد کابل در دو حالت بدون فنر و دمپر، و با فنر و دمپر در $H_\circ = ۵۰۰\ KN$.

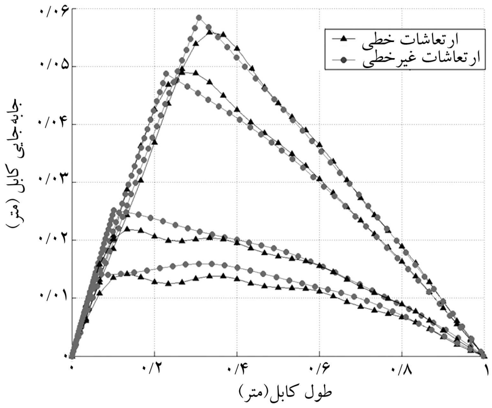
در شکل‌های ۸ و ۹ نمودارهای مربوط به سرعت جرم متحرک ($\dot{s}$) نسبت به موقعیت این جرم در راستای کابل در دو حالتِ بدون فنر و دمپر، و با فنر و دمپر برای $H_\circ = ۵۰۰\ KN, H_\circ = ۲۵۰\ KN$ با هم مقایسه شده‌اند. ضریب سختی فنر $K = ۱۰^۶\ N/m$ و ضریب دمپینگ $C = ۱۰^۶\ N\,s/m$ و جابه‌جایی اولیه $h_\circ = ۰/۰۱\,m$ است. مشاهده می‌شود که در حالت بدون فنر و دمپر مقادیر سرعت برای موقعیت‌های یکسان روی کابل بیشتر از حالت با فنر و دمپر است و در انتهای مسیر حرکت، جرم متحرک در حالتی که با سیستم تعلیق است زودتر شروع به کاهش سرعت می‌کند. بروز این رفتار به‌دلیل اتلاف مقداری از انرژی جنبشی جرم متحرک در طول مسیر حرکت به‌وسیله‌ی فنر و دمپر است که درنتیجه مقادیر سرعت کم‌تری برای جرم با سیستم تعلیق خواهیم داشت. در حالت کلی ضریب سختی فنر (K) و ضریب دمپینگ (C) به‌عنوان پارامترهای کنترلی، طوری می‌توانند بهینه شوند که نه‌تنها از نوسانات جرم متحرک با دامنه‌ی بزرگ جلوگیری شود بلکه علاوه بر کاهش دامنه‌ی نوسان، جرم متحرک به‌عنوان جاذب ارتعاشی عمل کرده و دامنه‌ی نوسان کابل را کاهش دهد.

در شکل ۱۰ نمودار سرعت جرم متحرک ($\dot{s}$) نسبت به موقعیت‌اش در راستای کابل در دو حالت بدون نیروی ترمزی $f = ۰\ m/s^۲$ و با نیروی ترمزی $f = -۲/۵\,m/s^۲$. در $H_\circ = ۲۵۰\ KN$ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای داشتن نیروی ترمزی کافی است که نیروی پیش‌رانش (f) با علامت منفی در نظر گرفته شود که در این صورت f به‌عنوان نیروی بازدارنده بر روی سیستم اثر می‌کند. نیروی ترمزی وقتی که جرم در موقعیت $s = ۰/۶\ell_\circ$ روی کابل قرار می‌گیرد بر جرم اثر کرده و تا پایان مسیر، با همان مقدار ثابت روی جرم متحرک اثر دارد. مشاهده می‌شود که به‌محض اثر نیروی ترمزی سرعت جرم متحرک شروع به کاهش کرده و در انتهای مسیر سرعت آن برابر مقدار معین غیر صفر است؛ در واقع نیروی ترمزی می‌تواند طوری تنظیم شود که اولاً به‌صورت ناگهانی به جرم اثر نکند، ثانیاً در انتهای مسیر سرعت جرم متحرک صفر شود. این بدان معناست که نیروی f به‌عنوان پارامتر کنترلی طوری تعیین شود که بدون ورود ناگهانی به جرم متحرک، درکم‌ترین زمان و با کم‌ترین اتلاف انرژی، سرعت جرم متحرک در انتهای مسیر را صفر سازد.

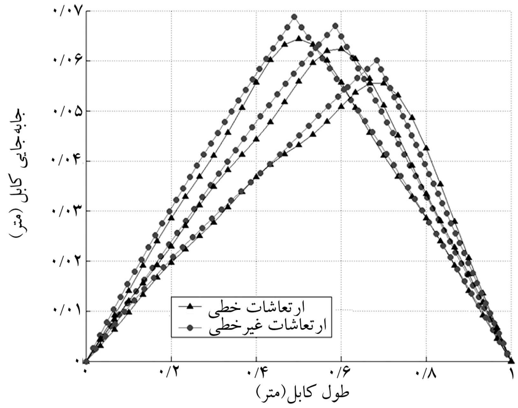
نمودارهای مربوط به شکل ۱۱ و ۱۲ تحت شرایط زیر برای مقایسه‌ی پاسخ عددی ناشی از حل معادلات غیر خطی ارتعاش کابل حامل جرم متحرک با پاسخ



شکل ۱۰. مقایسه‌ی نمودار سرعت جرم متحرک نسبت به موقعیت‌اش در راستای کابل، در دو حالت بدون نیروی ترمزی $f = ۰\ m/s^۲$ **و با نیروی ترمزی** $f = -۲/۵\,m/s^۲$ **در** $H_\circ = ۲۵۰\ KN$.



شکل ۱۱. مقایسه‌ی شکل ارتعاشی کابل در حالت خطی و غیر خطی برای زمان‌های متفاوت.



شکل ۱۲. مقایسه‌ی شکل ارتعاشی کابل در حالت خطی و غیر خطی برای زمان‌های متفاوت.

مربوط به ارتعاش خطی کابل حامل بار q متحرک به دست آمده‌اند.

$$L = 1\, m;\ x_0 = 0\, m;\ v_0 = 0\, m;\ a = 1\, m/s^2;\ m = 10\, kg/m;$$

$$q = 500\, N;\ T_0 = 2000\, N;\ Mg = 500\, N.$$

مقایسه‌ی شکل ارتعاشی کابل تحت اثر بار متحرک در حالت خطی و غیرخطی برای زمان‌های متفاوت در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است. در حالت خطی، علاوه بر خطی‌بودن معادله‌ی ارتعاش کابل، جرم متحرک به‌صورت بار متمرکز با مقدار ثابت در نظر گرفته شده است؛ در حالت غیرخطی نیز علاوه بر غیرخطی بودن معادله‌ی حاکم بر ارتعاش کابل، اینرسی جرم متحرک هم در نظر گرفته شده است.

به‌وضوح مشخص است که با در نظر گرفتن اثر اینرسی، در نقاط دور از بیشینه‌ی دامنه‌ی نوسان، پاسخ‌های خطی و غیرخطی به‌خوبی با هم مطابقت دارند ولی در نزدیکی نقطه‌ی اثر بار متحرک دامنه‌ی نوسان غیرخطی بزرگ‌تر از دامنه‌ی نوسان خطی است. نتیجه این که برای به دست آوردن پاسخ واقعی و دقیق‌تر از رفتار سیستم، باید اثر اینرسی جرم متحرک در نظر گرفته شود.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه ارتعاشات غیرخطی کابل حاملِ جرمِ متحرک که به‌کمک فنر و دمپر به کابل متصل شده، مورد بررسی قرارگرفت. یک انتهای کابل ثابت، و انتهای دیگر آن (با اختلاف ارتفاع) غیرثابت است. کرنش مماسی کابل صفر فرض شده، اما طول کابل دائماً در حال تغییر است و همین مسئله اجازه‌ی ارتعاش را به کابل می‌دهد. این تغییرات به‌صورتی است که اختلاف کشش در انتهای غیرثابت کابل صفر شود. معادلات حرکت با فرض متأثر بودن حرکت کابل و حرکت جرم نسبت به هم به دست آمد. برای حل از روش گالرکین در حوزه‌ی مکان و از روش شتاب متوسط در حوزه‌ی زمان استفاده شد.

نتایج حاصل از حلِ معادلاتِ ارتعاش غیرخطی کابل با نتایج معادلات ارتعاش خطی کابل مقایسه شد و نهایتاً، با توجه به نمودارهای عنوان‌شده، نتایج حاصله عبارت‌اند از:

۱. در مسائلی که حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد استفاده از روش نیمه‌تحلیلیِ گالرکین و روش شتابِ متوسط برای گسسته‌سازی زمان پاسخ قابل قبول و مطلوبی ارائه می‌دهد.

۲. تأثیر H_0 (تصویر افقی کشش کابل) درکاهش دامنه‌ی نوسان و همچنین تنظیم زمان لازم برای عبور جرم متحرک از روی کابل قابل توجه است.

۳. اگر در بررسی سیستم از قسمت اینرسیِ جرم متحرک صرف‌نظر شود، خطای قابل توجهی در تحلیل ایجاد می‌شود.

۴. استفاده از فنر و دمپر به‌عنوان رابط بین کابل و جرم متحرک تأثیر به‌سزایی در دامنه‌ی نوسان کابل خواهد داشت.

منابع

1. Fryba L. "Vibration of solids and structures under moving loads", Noordholt International Publishing, The Netherlands (1972).
2. Smith C.E. "Motions of a stretched string carrying a moving mass particle," *J. Applied Mech,* (31), pp. 29-37 (1964).
3. Ting, E.C.; Genin, J., and Ginsberg, J.H. "A general algorithm for moving mass problems," *J. Sound and Vibrations,* (33), pp. 49-58 (1974).
4. Forrestal, M.J.; Bickel, D.C., and Sagartz, M.J. "Motion of a stretchedcable with small curvature carrying an accelerating mass," *AIAA J,* (13), pp. 1533-1535 (1975).
5. Rodeman, R.; Longcope, D.B., and Shampine, L.F. "Response of a string to an accelerating mass," *J. Applied Mech,* (43), pp. 675-680 (1976).
6. Triantafyllou, M.S. "The dynamics of a taut inclined cable," *Q.J. Mech. and Applied Maths,* (37), pp. 421-440 (1984).

7. Wu, J.S., and Chen, C. "The dynamic analysis of a suspended cable due to a moving load," *Int. J. Numer. Method in Engrg,* (28), pp. 2361-2381 (1989).

8. Wang, Y.M. "The transient dynamics of a cable-mass system due to the motion of an attached accelerating mass," *Int. J. Solids and Structures,* (37), pp. 1361-1383 (2000).

9. Yanlin, G.; Hong, W., and Gexue, R. "Dynamic response of the cable to moving mass," *Proceedings of the Third International Conference on Advances in Steel Structures 9-11 December 2002*, pp. 873-879, Hong Kong, China (2002).

10. Shahani, A.R., Jafari, B."Analysis of vibration of a taut cable supporting moving masses," M.SC. Thesis, Depatrment of Mechanical Engineering, K.N.Toosi University of Technology, (April 2002).

11. Shahani, A.R., Ghadiri, M."Nonlinear Vibration of a cable supporting a moving mass." M.SC. Thesis, Depatrment of Mechanical Engineering, K.N.Toosi, University of Technology, (November 2005).

12. Shahani, A.R., Ghadiri, M."Nonlinear vibration of a cable supporting a moving mass." 15th Annual International conference on Mechanical Engineerin - ISME 2007, Amirkabir University of Technology, Tehran,Iran.

13. Siddiqui, S.A.; Golnaraghi, M.F., and Heppler, G.R. "Large free vibration of a beam carrying a moving mass," *Int. J. Non-Linear Mechanics,* (38), pp. 1481-1493 (2003).