

بررسی اثر به کارگیری لایه‌های پیزوالکتریک بر ارتعاشات اجباری و آزاد ورق‌های چهارگوش FGM

محمد شریعت (دانشیار)

ایمان امینایی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار به منظور بررسی آثار ناشی از به کارگیری لایه‌های پیزوالکتریک حس‌گر و محرک، بر ارتعاشات ورق FGM چهارگوش، به مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد، ارتعاشات اجباری و کنترل فعال ارتعاشات گذرا در این خصوص خواهیم پرداخت. در تحلیل ارتعاشات آزاد، مقادیر فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی سیستم به دست آمده‌اند. در تحلیل ارتعاشات اجباری، پاسخ سیستم به‌ازای ورودی‌های متفاوت ولتاژهای مختلف اعمالی به لایه‌ی پیزوالکتریک به دست آمده‌اند. برای حل معادلات حاکم، از روش اجزاء محدود بهره گرفته شده است. در نهایت، نتایج حاصله حاکی از آن بوده است که استفاده از لایه‌ی پیزوالکتریک تأثیر اندکی بر مقادیر فرکانس طبیعی داشته و بر شکل مودهای ارتعاشی بی‌تأثیر است. اما می‌توان از ویژگی لایه‌های پیزوالکتریک حس‌گر و محرک برای کنترل فعال ارتعاشات گذرای سیستم‌ها استفاده کرد بدون آن که بازنگری در پارامترهای ارتعاشی ضرورتی داشته باشد.

واژگان کلیدی: ارتعاشات، ورق FGM، پیزوالکتریک، کنترل فعال، روش اجزاء محدود.

m_shariyat@yahoo.com
imanaminaee@yahoo.com

۱. مقدمه

پیدایش مواد جدید یکی از عوامل مهمی است که باعث پیشرفت و گسترش صنایع در زمینه‌های مختلف شده است؛ دست‌یابی به موادی از قبیل FGM ها و آلیاژهای حافظه‌دار همگی مبین این مطلب است. یکی از تازه‌ترین دستاوردهای مهندسی سازه و مواد در زمینه‌ی سازه‌های هوشمند، مواد تطبیقی است. این سازه‌ها با استفاده از اثرات مستقیم و معکوس شرایطی را برای تطبیق سازه با محیط پیرامون خود فراهم می‌سازند. در این بین، پیزوالکتریک‌ها سهم به‌سزایی دارند. استفاده از FGM ها موجب توزیع تنش یکنواخت در سازه می‌شود و مسائلی نظیر جهش مؤلفه‌های تنش در مرز لایه‌ها، ترک خوردن ماتریس و دیگر مشکلات موجود در کامپوزیت‌های رشته‌ای را برطرف می‌سازد. از سوی دیگر، سازه‌های FGM با داشتن خواص قبلی‌شان هنگامی که با لایه‌ی از مواد پیزوالکتریک ترکیب شوند، ماده‌ی FGM با خواص کنترل‌پذیر به وجود خواهند آورد که کاربرد آن را مطلوب‌تر از پیش می‌سازد.

در سال ۲۰۰۳ نیز محققین دیگر ارتعاش ورق‌های FGM را تحت نیروهای درون‌صفحه‌یی و به‌روش نیمه‌تحلیلی بررسی کردند.^[۱] و بالاخره در سال ۲۰۰۵ اثر دما بر ارتعاش ورق FGM با استفاده از نظریه‌ی مرتبه بالا و به‌شیوه‌ی نیمه‌تحلیلی بررسی شد.^[۲]

در تحقیق کنونی با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه سوم برای میدان جابه‌جایی، و المان مرتبه دوم لاگرانژی با ۹ نقطه‌گره، معادلات اجزاء محدود حاکم بر ارتعاشات گذرا و اجباری ورق FGM دارای لایه‌های حس‌گر و محرک به دست آمده‌اند. حاصل این پژوهش کسب نتایجی در خصوص بررسی اثر لایه‌های پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی در شرایط مرزی مختلف، اثر لایه‌های پیزوالکتریک بر پاسخ‌های اجباری ناشی از تحریک‌های پله‌یی و هارمونیک، و نیز اثر کنترل فعال پاسخ‌گذاری ناشی از ورودی پالس است.

برخلاف تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی بررسی ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی، پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی ورق‌های FGM محدود بوده‌اند. در سال ۲۰۰۱، تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۷/۱۶، داوری ۱۳۸۷/۸/۶، پذیرش ۱۳۸۷/۱۰/۱۰.

۲. معادلات ورق FGM با لایه پیزوالکتریک

پارامترهای هندسی و مؤلفه‌های جابه‌جایی ورق در شکل ۱ نشان داده شده است. برای میدان جابه‌جایی از نظریه‌ی برشی مرتبه سوم (رابطه‌ی ۱) استفاده شده است.^[۵]

$$u = u_0 + z\psi_x - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right)$$

$$v = v_0 + z\psi_y - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right)$$

$$w = w_0 \quad (۱)$$

که در آن w, v, u : جابه‌جایی نقاط ورق در راستای محوره‌های Z, Y, X ؛

w_0, v_0, u_0 : جابه‌جایی نقاط واقع بر صفحه‌ی میانی ورق در راستای محوره‌های Z, Y, X ؛

ψ_y, ψ_x : دوران نقاط واقع بر لبه‌های موازی Y, X صفحه‌ی میانی ورق حول محوره‌های X, Y ؛

z : متغیر مستقل در راستای ضخامت؛

h : کل ضخامت ورق.

تغییرات میدان ولتاژ در راستای ضخامت ورق به صورت خطی و مطابق رابطه‌ی

۲ در نظر گرفته شده است:

$$\varphi = \left[\left(\frac{\sqrt{h} - h}{2\sqrt{h}} \right) \varphi_T + \left(\frac{h}{2\sqrt{h}} \right) \varphi_B \right] + z \left[\left(\frac{1}{h} \right) \varphi_T + \left(\frac{-1}{h} \right) \varphi_B \right] \quad (۲)$$

که در آن φ_T پتانسیل الکتریکی روی صفحات بالایی ورق، φ_B پتانسیل الکتریکی روی صفحات پایینی ورق و h ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک است. برای محاسبات، از

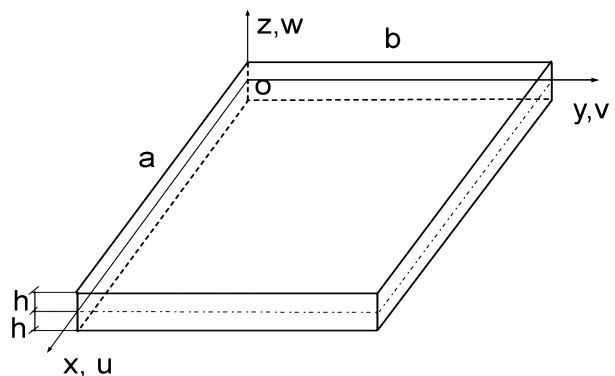
روابط کرنش - جابه‌جایی خطی استفاده شده است. اگر روابط میدان جابه‌جایی ۱

در روابط کرنش - جابه‌جایی قرار داده شود، آنگاه:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$



شکل ۱. پارامترهای هندسی و مؤلفه‌های جابه‌جایی ورق مورد بررسی.

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi_y - \frac{z^2}{h^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_x - \frac{z^2}{h^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{z^2}{2h^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (۳)$$

در محاسبات، مؤلفه‌های کرنش به صورت چندجمله‌ی مرتبه ۳ بر حسب z مرتب می‌شوند.

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z\varepsilon^1 + z^2\varepsilon^2 + z^3\varepsilon^3 \quad (۴)$$

برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (۵)$$

براین اساس، نتیجه‌ی حاصله عبارت است از:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[\left(\frac{h - \sqrt{h}}{2\sqrt{h}} \right) \frac{\partial\varphi_T}{\partial x} + \left(\frac{-h}{2\sqrt{h}} \right) \frac{\partial\varphi_B}{\partial x} \right] \\ &\quad + z \left[\left(\frac{-1}{h} \right) \frac{\partial\varphi_T}{\partial x} + \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial\varphi_B}{\partial x} \right] \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left[\left(\frac{h - \sqrt{h}}{2\sqrt{h}} \right) \frac{\partial\varphi_T}{\partial y} + \left(\frac{-h}{2\sqrt{h}} \right) \frac{\partial\varphi_B}{\partial y} \right] \\ &\quad + z \left[\left(\frac{-1}{h} \right) \frac{\partial\varphi_T}{\partial y} + \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial\varphi_B}{\partial y} \right] \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left[\left(\frac{-1}{h} \right) \varphi_T + \left(\frac{1}{h} \right) \varphi_B \right] \end{aligned} \quad (۶)$$

در محاسبات، میدان الکتریکی را می‌توان به صورت چندجمله‌ی مرتبه ۱ بر حسب z بیان کرد:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + z\mathbf{E}^1 \quad (۷)$$

معادلات حاکم بر سیستم از اصل همیلتون (رابطه‌ی ۸) به دست می‌آیند:

$$\delta \int L dt = 0 \quad (۸)$$

که در آن L چنین تعریف می‌شود:

$$L = \int (J - H) d\tilde{V} + W \quad (۹)$$

یادآور می‌شود J انرژی جنبشی بر واحد حجم، H انرژی پتانسیل بر واحد حجم، W کار نیروهای خارجی وارد بر سیستم، و $d\tilde{V}$ المان حجم ورق است. با انجام

محاسبات لازم، قانون همیلتون چنین به دست می‌آید:^[۶]

$$\int (\rho \delta \theta^T \ddot{\theta} + \delta \varepsilon^T \sigma - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{D}) d\tilde{V} - \int \delta \theta^T \mathbf{Tr} d\tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (۱۰)$$

که در آن θ بردار جابه‌جایی، ε بردار کرنش، σ بردار تنش، \mathbf{E} بردار میدان الکتریکی، \mathbf{D} بردار جابه‌جایی الکتریکی، \mathbf{Tr} بردار تنش خارجی وارد بر سطح ورق، $d\tilde{\mathbf{A}}$ المان سطح جانبی ورق و ρ چگالی مواد است. روابط حاکم بر ماده‌ی پیزوالکتریک عبارتند از:

$$\begin{cases} \sigma = \mathbf{c}_p \varepsilon - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \varepsilon + \mathbf{b} \mathbf{E} \end{cases} \quad (۱۱)$$

انرژی پتانسیل ناشی از میدان الکتریکی - جابه‌جایی الکتریکی که فقط در لایه‌ی پیزوالکتریک وجود دارد، نیز مطابق رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود.

$$\int \delta \mathbf{E}^T \mathbf{D} d\tilde{V} = \int \delta \mathbf{V}^T (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1)^T [\mathbf{e}(\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3) \mathbf{U} + \mathbf{b}(\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1) \mathbf{V}] d\tilde{V} \quad (18)$$

کار نیروی خارجی وارد بر لایه‌ی ورق را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۱۹ محاسبه کرد.

$$\int \delta \theta^T \mathbf{Tr} d\tilde{A} = \int \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{L}_\theta^0 + z \mathbf{L}_\theta^1 + z^T \mathbf{L}_\theta^2)^T \mathbf{Tr} d\tilde{A} \quad (19)$$

با تعریف نمادهای زیر، می‌توان روابط را ساده کرد.

$$\begin{aligned} \rho_i &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \rho z^i dz \\ \mathbf{c}_i &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \mathbf{c} z^i dz \\ \mathbf{e}_i &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \mathbf{e} z^i dz \\ \mathbf{b}_i &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \mathbf{b} z^i dz \end{aligned} \quad (20)$$

برای آن که روابط بالا مناسب کاربرد در حل عددی باشند، باید توابع تقریب را مطابق رابطه‌ی ۲۱ به ماتریس توابع شکل و مقادیر کمیت‌ها در نقاط گره ارتباط داد. در محاسبات از المان چهارگوش لاگرانژی مرتبه دوم با ۹ نقطه گره استفاده شده است.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{N}_U \bar{\mathbf{U}} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{N}_V \bar{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_U &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & N_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{U}}^T &= \{ \bar{u}_x, \bar{v}_x, \bar{w}_x, \bar{\psi}_x, \bar{\psi}_y \} \\ \mathbf{N}_V &= \begin{bmatrix} \dots & N_i & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_i & \dots \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{V}}^T &= \{ \bar{\varphi}_T, \bar{\varphi}_B \} \end{aligned} \quad (22)$$

و i شماره‌دهنده است.

برای برقراری ارتباط میان بردارهای کرنش، میدان الکتریکی و جابه‌جایی با بردار مقادیر نقاط گره، می‌توان از عملگرهای کمکی مطرح شده در رابطه‌ی ۲۳ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\mathbf{B}_E^0 + z \mathbf{B}_E^1 + z^T \mathbf{B}_E^2 + z^T \mathbf{B}_E^3) \bar{\mathbf{U}} \\ \mathbf{E} &= (\mathbf{B}_E^0 + z \mathbf{B}_E^1) \bar{\mathbf{V}} \\ \theta &= (\mathbf{B}_\theta^0 + z \mathbf{B}_\theta^1 + z^T \mathbf{B}_\theta^2) \bar{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن \mathbf{c}_p ماتریس سختی ماده‌ی پیزوالکتریک، \mathbf{e} ماتریس کوپل الکترومکانیکی و \mathbf{b} ماتریس گذردهی الکتریکی است. تغییرات ویژگی‌های مکانیکی ماده‌ی FGM برحسب فاصله از لایه‌ی مرجع چنین تعیین می‌شود:

$$P(z) = (P_t - P_b) \left(\frac{z + h/4}{h - h} \right)^n + P_b \quad (12)$$

که در آن \mathbf{P}_t ویژگی‌های مکانیکی مواد ایزوتروپیک لایه‌ی روین، و \mathbf{P}_b ویژگی‌های مکانیکی مواد ایزوتروپیک لایه‌ی زیرین است. اگر $n = 1$ باشد، رابطه‌ی ۱۲ خطی است و اگر $n \neq 1$ باشد این رابطه غیرخطی خواهد بود. در این رابطه فرض شده است که فقط از یک لایه‌ی پیزوالکتریک، که بر روی مجموعه قرار داده شده، استفاده می‌شود و نیز ماده‌ی FGM از ترکیب دو ماده ساخته شده است. از طریق رابطه‌ی ۱۲ می‌توان خصوصیات مکانیکی مواد - نظیر مدول الاستیسیته، چگالی حجمی و غیره - را در هر نقطه از ضخامت ورق محاسبه، و از طریق روابط ماتریس سختی و نرمی مواد ایزوتروپیک، ماتریس سختی و نرمی را نیز محاسبه کرد. بردار کرنش برحسب بردار توابع تقریب مکانیکی، مطابق رابطه‌ی ۱۳ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3) \mathbf{U} \quad (13)$$

که در آن \mathbf{L}_E^i عملگر کمکی کرنشی است و بردار توابع تقریب مکانیکی به صورت $\mathbf{U}^T = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \psi_x, \psi_y \}$ تعریف می‌شود. رابطه‌ی بردار میدان الکتریکی برحسب بردار توابع تقریب الکتریکی چنین است:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1) \mathbf{V} \quad (14)$$

که در آن \mathbf{L}_E^i عملگر کمکی میدان الکتریکی است و بردار توابع تقریب الکتریکی به صورت $\mathbf{V}^T = \{ \varphi_T, \varphi_B \}$ تعریف می‌شود. اما بردار جابه‌جایی برحسب بردار توابع تقریب مکانیکی نیز چنین بیان می‌شود:

$$\theta = (\mathbf{L}_\theta^0 + z \mathbf{L}_\theta^1 + z^T \mathbf{L}_\theta^2) \mathbf{U} \quad (15)$$

که در آن \mathbf{L}_θ^i عملگر کمکی جابه‌جایی است، و بردار توابع تقریب مکانیکی به صورت $\mathbf{U}^T = \{ u_x, v_x, w_x, \psi_x, \psi_y \}$ تعریف می‌شود. انرژی جنبشی لایه‌ها مطابق رابطه‌ی ۱۶:

$$\int \rho \delta \theta^T \tilde{\theta} d\tilde{V} = \sum \int \rho \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{L}_\theta^0 + z \mathbf{L}_\theta^1 + z^T \mathbf{L}_\theta^2)^T (\mathbf{L}_\theta^0 + z \mathbf{L}_\theta^1 + z^T \mathbf{L}_\theta^2) \tilde{\mathbf{U}} d\tilde{V} \quad (16)$$

و انرژی کرنشی مطابق رابطه‌ی ۱۷ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \int \delta \varepsilon^T \sigma d\tilde{V} &= \int \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3)^T [\mathbf{c}_p (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3) \mathbf{U} - \mathbf{e}^T (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1) \mathbf{V}] d\tilde{V} + \sum \int \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3)^T [\mathbf{c}_c (\mathbf{L}_E^0 + z \mathbf{L}_E^1 + z^T \mathbf{L}_E^2 + z^T \mathbf{L}_E^3) \mathbf{U}] d\tilde{V} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU}^t & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_t \\ \bar{\mathbf{V}}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU}^t & \mathbf{K}_{UV}^t \\ \mathbf{K}_{VU}^t & \mathbf{K}_{VV}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_t \\ \bar{\mathbf{V}}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_U^t \\ \circ \end{Bmatrix} \quad (29)$$

برای لایه‌ی پیزوالکتریک می‌توان دو نقش حس‌گرو محرک قائل شد، و با حل رابطه‌ی ۲۹ به نتایج مورد نظر دست یافت.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_E^i &= \mathbf{L}_E^i \mathbf{N}_U \\ \mathbf{B}_E^e &= \mathbf{L}_E^e \mathbf{N}_V \\ \mathbf{B}_\theta^i &= \mathbf{L}_\theta^i \mathbf{N}_U \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از رابطه‌های ۲۳ و ۲۴، معادله‌ی حاکم بر سیستم برای هر المان چنین خواهد بود:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\bar{\mathbf{Q}}}_e + \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{Q}}_e = \mathbf{F}^e \quad (25)$$

رابطه‌ی ۲۵ در حالت گسترده عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU}^e & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_e \\ \bar{\mathbf{V}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU}^e & \mathbf{K}_{UV}^e \\ \mathbf{K}_{VU}^e & \mathbf{K}_{VV}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_e \\ \bar{\mathbf{V}}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_U^e \\ \circ \end{Bmatrix} \quad (26)$$

که در آن:

۳. کنترل ارتعاشات گذرای ورق FGM

در این قسمت، به یافتن روابط کنترل و میرا کردن ارتعاشات ورق FGM می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا رفتار ارتعاشی ورق را پس از اعمال تحریک ضربه بر روی می‌کنیم و سپس با استفاده از خصوصیت ماده‌ی پیزوالکتریک به مطالعه‌ی نحوه‌ی میرایی ارتعاشات خواهیم پرداخت. از آنجا که میرایی سازه صفر فرض شده است، با اعمال تحریک ضربه به ورق، ارتعاش در ورق آغاز شده و با دامنه‌ی ثابت ادامه می‌یابد؛ اما اگر از ویژگی‌های کنترلی ماده‌ی پیزوالکتریک استفاده شود می‌توان ارتعاشات ورق را کنترل، و آن را میرا کرد. برای رسیدن به این منظور استفاده از دو لایه‌ی پیزوالکتریک - یک لایه‌ی حس‌گرو یک لایه‌ی محرک - ضرورت می‌یابد. بدین ترتیب دو سطح خارجی ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک پوشانده می‌شود. از بسط رابطه‌ی ۲۹ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_{UU}^t] \{\bar{\mathbf{U}}_t\} + [\mathbf{K}_{UU}^t] \{\bar{\mathbf{U}}_t\} + [\mathbf{K}_{UV}^t] \{\bar{\mathbf{V}}_t\} &= \{\mathbf{F}_U^t\} \\ [\mathbf{K}_{VU}^t] \{\bar{\mathbf{U}}_t\} + [\mathbf{K}_{VV}^t] \{\bar{\mathbf{V}}_t\} &= \{\circ\} \end{aligned} \quad (30)$$

ولتاژ ایجاد شده در لایه‌ی حس‌گرو، بر اثر تغییر شکل ناشی از اعمال بار مکانیکی، طبق رابطه‌ی ۳۱ به دست می‌آید:

$$\{\bar{\mathbf{V}}_t\}_s = -[\mathbf{K}_{VV}^t]^{-1} [\mathbf{K}_{VU}^t] \{\bar{\mathbf{U}}_t\} \quad (31)$$

از جایگذاری رابطه‌ی ۳۱ در رابطه‌ی ۳۰، معادله‌ی حرکت کل سازه حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{M}_{UU}^t] \{\bar{\mathbf{U}}_t\} + ([\mathbf{K}_{UU}^t] - [\mathbf{K}_{UV}^t] [\mathbf{K}_{VV}^t]^{-1} [\mathbf{K}_{VU}^t]) \{\bar{\mathbf{U}}_t\} \quad (32)$$

$$= \{\mathbf{F}_U^t\} - [\mathbf{K}_{UV}^t] \{\bar{\mathbf{V}}_t\}_s \quad (33)$$

$$(34)$$

که در آن، $\{\bar{\mathbf{V}}_t\}_s$ ولتاژ لایه‌ی محرک است و در تحقیق کنونی معادل است با:

$$\{\bar{\mathbf{V}}_t\}_s = -gain \times \{\bar{\mathbf{V}}_t\}_e \quad (35)$$

مقدار gain ثابت است و میزان مناسب آن از طریق تحلیل‌های متوالی به دست می‌آید.

۴. نتایج به دست آمده

۱.۴. ارتعاش آزاد

ورق اولیه‌ی مورد بررسی، یک ورق چهارگوش به ابعاد $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ است که از ماده‌ی FGM به ضخامت 4 mm و یک لایه ماده‌ی پیزوالکتریک به ضخامت

ماتریس‌های جرم، سختی و نیروی کلی سازه از ترکیب ماتریس‌های جرم، سختی و نیروی المان‌ها به دست می‌آیند.

$$\mathbf{M}^t \ddot{\bar{\mathbf{Q}}}_t + \mathbf{K}^t \bar{\mathbf{Q}}_t = \mathbf{F}^t \quad (28)$$

تأیید نتایج روابط ارائه شده در این نوشتار و انتخاب نوع و تعداد مناسب المان، نتایج حاصله برای پنج فرکانس طبیعی اول ورق FGM بدون لایه های پیزوالکتریک با چهار لایه گیردار، برای مرتبه و تعداد گوناگونی از المان ها به دست آمده و با نتایج نرم افزار ANSYS مقایسه شدند. در این زمینه، پنج گونه المان بندی برای ورق در نظر گرفته شد:

۱. لایه گیردار که با نماد C نمایش داده می شود؛
 ۲. لایه روی تکیه گاه مفصلی که با نماد S نمایش داده می شود؛
 ۳. لایه آزاد که با نماد F نمایش داده می شود.
- در حالت اول برای اعمال شرط مرزی در لایه مورد نظر هر پنج درجه آزادی $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$ برابر صفر فرض می شوند. در حالت دوم برای اعمال شرط مرزی در لایه مورد نظر u_0, v_0, w_0 برابر صفر فرض می شوند؛ همچنین اگر لایه مورد نظر موازی محور X باشد ψ_x آزاد و ψ_y برابر صفر قرار می گیرد و اگر لایه مورد نظر موازی محور Y باشد ψ_y آزاد و ψ_x برابر با صفر قرار داده می شود. در حالت سوم، در لایه مورد نظر هر پنج درجه آزادی $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$ آزادند.

در جدول ۳ نتایج به دست آمده از پنج نوع المان بندی یاد شده، با نتایج نرم افزار ANSYS که بر پایه ۳۶ المان مرتبه دوم به دست آمده، مقایسه شده اند. چنان که ملاحظه می شود، بالاترین دقت نتایج کنونی به ازاء به کارگیری ۳۶ المان مرتبه دوم لاگرانژی به دست آمده است. در این حالت، بیشترین تطابق با نتایج نرم افزار ANSYS حاصل شده است. به همین دلیل برای دیگر محاسبات نوشتار نیز از این نوع المان با تعداد یاد شده، استفاده شد. اختلاف پدید آمده میان دقیق ترین نتایج کنونی و نتایج نرم افزار ANSYS ناشی از خطای برنامه نیست. در نرم افزار ANSYS از نظریه کلاسیک برای تقریب تغییرات میدان جابه جایی استفاده شده است، حال آن که در برنامه حل عددی نوشته شده از نظریه مرتبه بالا (مرتبه سوم) برای توصیف تغییرات میدان جابه جایی استفاده شده است. بیشینه اختلاف نتایج این نظریه، براساس نتایج جدول ۳، برای تحلیل یاد شده ۱۰ درصد بوده است. تحلیل های ارتعاش آزاد انجام شده، یافتن مقادیر فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی را شامل می شوند.

مقادیر فرکانس طبیعی بر حسب هرتز برای شرایط مرزی مختلف، به ازاء $n = 1$ در جدول ۴ ارائه شده اند. نمادهای F, FP, A, S به ترتیب، بیانگر ورق FGM بدون لایه پیزوالکتریک، ورق دارای لایه پیزوالکتریک، محرک و حسگر هستند. منظور از لایه پیزوالکتریک محرک در جدول ۳، لایه پیزوالکتریک اتصال کوتاه شده است. در حالت کلی، یافتن فرکانس های طبیعی ورق دارای لایه پیزوالکتریک محرک از طریق تحلیل زمانی - و نه حل مسئله مقادیر ویژه - امکان پذیر است.

جدول ۳. نتایج به دست آمده برای پنج فرکانس طبیعی اول ورق FGM، بر حسب هرتز، با انتخاب تعداد و مرتبه ای متفاوت برای المان ها، و مقایسه ای آن ها با نتایج نرم افزار ANSYS.

ANSYS (۳۶ المان مرتبه دوم)	المان چهارگوش مرتبه دوم		المان چهارگوش مرتبه اول			شماره مود
	۳۶	۱۶	۴۰۰	۱۰۰	۳۶	
۱۳۰۶	۱۳۷۵	۱۴۵۷	۱۵۷۳	۲۱۲۶	۳۰۹۸	۱
۲۶۷۲	۲۹۴۱	۳۳۱۹	۳۱۸۲	۴۱۳۳	۵۹۸۲	۲
۲۷۴۵	۲۹۴۲	۳۳۹۹	۳۵۷۳	۵۴۱۰	۸۷۷۲	۳
۳۸۵۰	۴۳۴۲	۴۹۷۱	۴۸۳۰	۶۶۰۵	۹۹۵۷	۴
۵۲۸۰	۵۷۴۹	۱۰۹۰۰	۶۸۷۲	۱۱۱۲۳	۱۸۸۷۶	۵

$2mm$ تشکیل شده است. نتایج براساس شرایط مرزی دسته بندی شده اند. شرایط مرزی انتخاب شده برای حل مسئله شامل: چهارسرگیردار (CCCC)، یک سرگیردار و سه سر آزاد (CFFF)، دو سرگیردار و دو سر مفصل (CCSS)، دو سر مفصل و دو سر آزاد (SSFF) و چهارسر مفصل (SSSS) است. بنابراین، شرایط مرزی منتخب ترکیبی است از سه حالت:

۱. لایه گیردار که با نماد C نمایش داده می شود؛
 ۲. لایه روی تکیه گاه مفصلی که با نماد S نمایش داده می شود؛
 ۳. لایه آزاد که با نماد F نمایش داده می شود.
- در حالت اول برای اعمال شرط مرزی در لایه مورد نظر هر پنج درجه آزادی $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$ برابر صفر فرض می شوند. در حالت دوم برای اعمال شرط مرزی در لایه مورد نظر u_0, v_0, w_0 برابر صفر فرض می شوند؛ همچنین اگر لایه مورد نظر موازی محور X باشد ψ_x آزاد و ψ_y برابر صفر قرار می گیرد و اگر لایه مورد نظر موازی محور Y باشد ψ_y آزاد و ψ_x برابر با صفر قرار داده می شود. در حالت سوم، در لایه مورد نظر هر پنج درجه آزادی $u_0, v_0, w_0, \psi_x, \psi_y$ آزادند.
- ماده ی FGM مورد استفاده از نوع آلومینیم - آلومینا است که ویژگی های مکانیکی آن در جدول ۱ داده شده اند؛ ماده ی پیزوالکتریک مورد استفاده نیز از نوع PZT-5A است که ویژگی های مکانیکی آن در جدول ۲ آورده شده اند. برای

جدول ۱. ویژگی های مکانیکی ماده ی FGM.

مقدار	ویژگی مکانیکی ماده ی FGM
$38^\circ (GPa)$	E_t
$7^\circ (GPa)$	E_b
$39^\circ (\frac{Kg}{m^3})$	ρ_t
$27^\circ (\frac{Kg}{m^3})$	ρ_b
$0/3$	ν

جدول ۲. ویژگی های مکانیکی ماده ی پیزوالکتریک.

مقدار	کمیت
$86,1856 (GPa)$	c_{11}
$50,7888 (GPa)$	c_{12}
$50,7888 (GPa)$	c_{21}
$99,201 (GPa)$	c_{22}
$22,6 (GPa)$	c_{33}
$21,1 (GPa)$	c_{44}
$21,1 (GPa)$	c_{55}
$15,115 (\frac{C}{m^2})$	e_{11}
$-7,209 (\frac{C}{m^2})$	e_{12}
$12,322 (\frac{C}{m^2})$	e_{25}
$12,322 (\frac{C}{m^2})$	e_{33}
$15 (\frac{nF}{m})$	b_{11}
$15,3 (\frac{nF}{m})$	b_{22}
$15,3 (\frac{nF}{m})$	b_{33}
$7750 (\frac{Kg}{m^3})$	ρ

چنان که ملاحظه می‌شود در حالتی که $n = 0/5$ است ورق دارای بالاترین مقادیر فرکانس طبیعی است. پس از آن، حالت متناظر با $n = 2$ دارای بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی است و در نهایت، حالت متناظر با کم‌ترین مقدار فرکانس طبیعی را دارد.

۲.۴. ارتعاشات اجباری سیستم

در این بخش، پاسخ سیستم به‌ازاء دو نوع ورودی زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد: الف) ورودی پله‌یی:

$$F(t) = 1000[N], \quad t > 0 \quad (36)$$

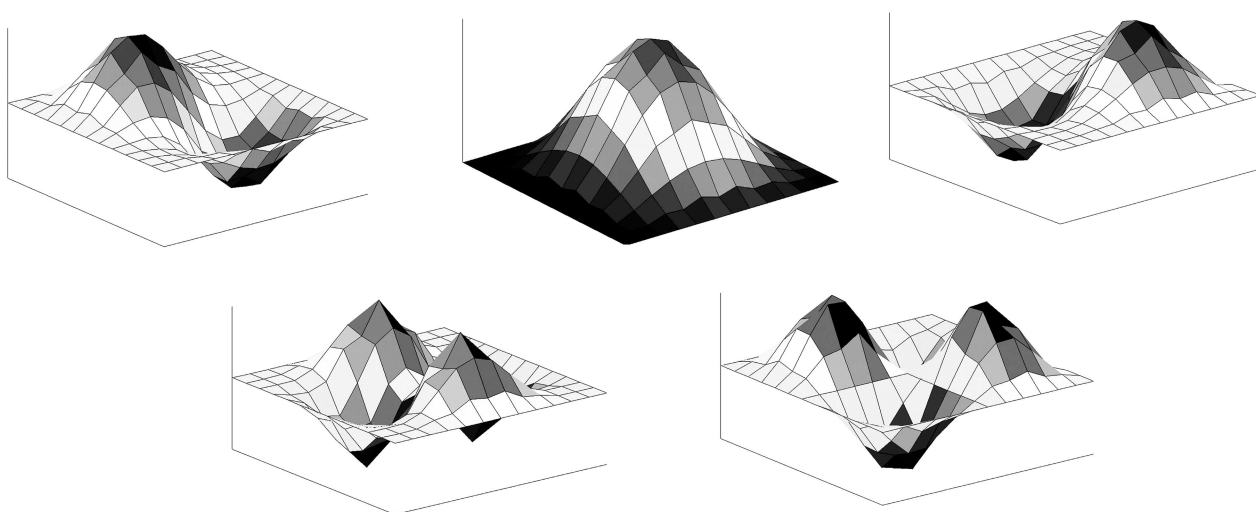
ب) ورودی هارمونیک با فرکانس تحریک 100 هرتز:

$$F(t) = 1000 \cdot \sin(100t)[N], \quad t > 0 \quad (37)$$

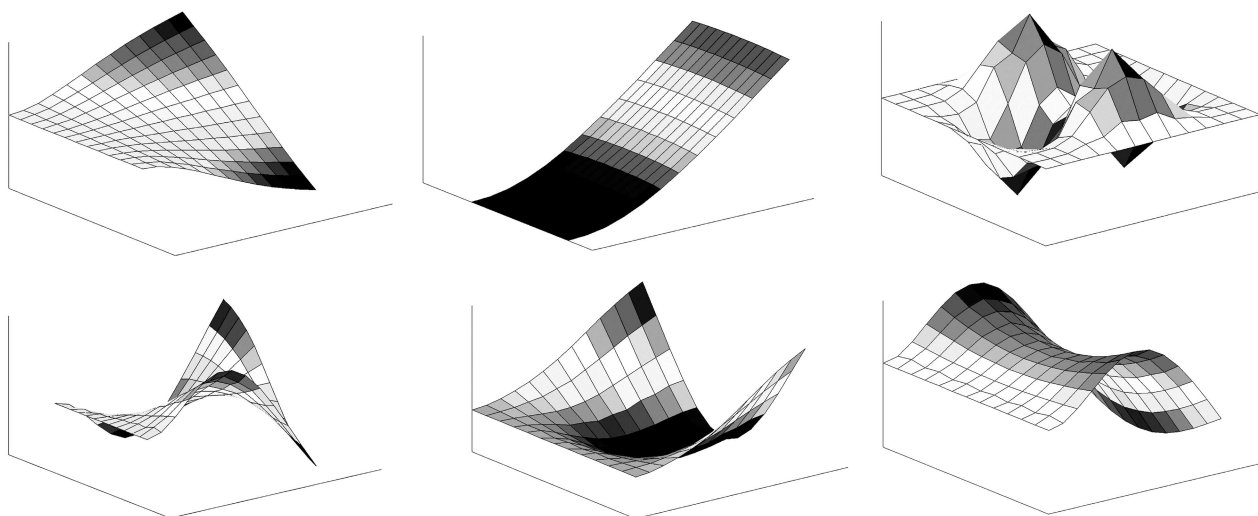
در شکل‌های ۲ تا ۶، پنج مود اول ارتعاش آزاد ورق‌های یادشده آورده شده است. نسبت ابعاد ورق و شرایط مرزی از عوامل مؤثر بر شکل مود ارتعاشی هستند، و نوع ماده‌ی ورق در شکل مودهای ارتعاشی تأثیری ندارد. بنابراین لایه‌ی پیزوالکتریک تأثیری بر شکل مودهای ارتعاشی ندارد.

مقایسه‌ی مقدار پنج فرکانس طبیعی اول، برای ورق کامپوزیت بدون لایه‌ی پیزوالکتریک، با لایه‌ی پیزوالکتریک حس‌گر (مدار باز) و با لایه‌ی پیزوالکتریک اتصال کوتاه شده، نشان می‌دهد که مقدار فرکانس‌های طبیعی به‌ترتیب متناظر با شرایط مرزی چهار سرگیردار، دو سرگیردار و دو سر مفصل، چهار سر مفصل، دو سر مفصل و دو سر آزاد و در نهایت یک سرگیردار و سه سر آزاد کاهش می‌یابند.

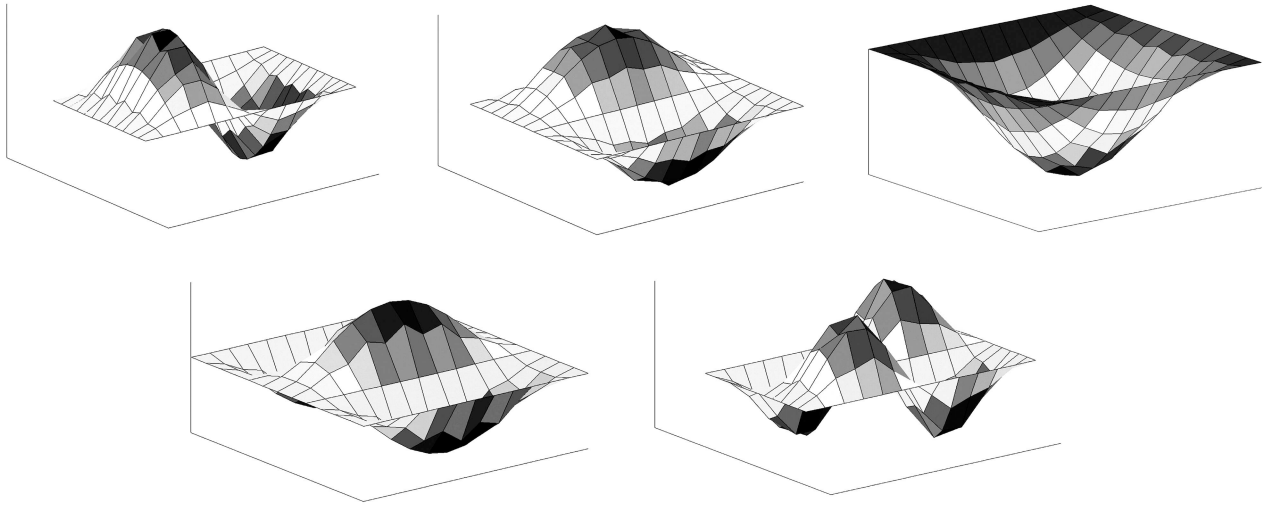
اثر افزایش ابعاد ورق (با ثابت نگه داشتن مقدار ضخامت ورق) بر کاهش فرکانس طبیعی اول ورق چهار لبه‌گیردار، در جدول ۵ بررسی شده است. همچنین اثر توان معادله‌ی حاکم بر رفتار مواد (رابطه‌ی ۱۲) بر فرکانس طبیعی اول، برای چند توان مختلف در جدول ۶ بررسی شده است.



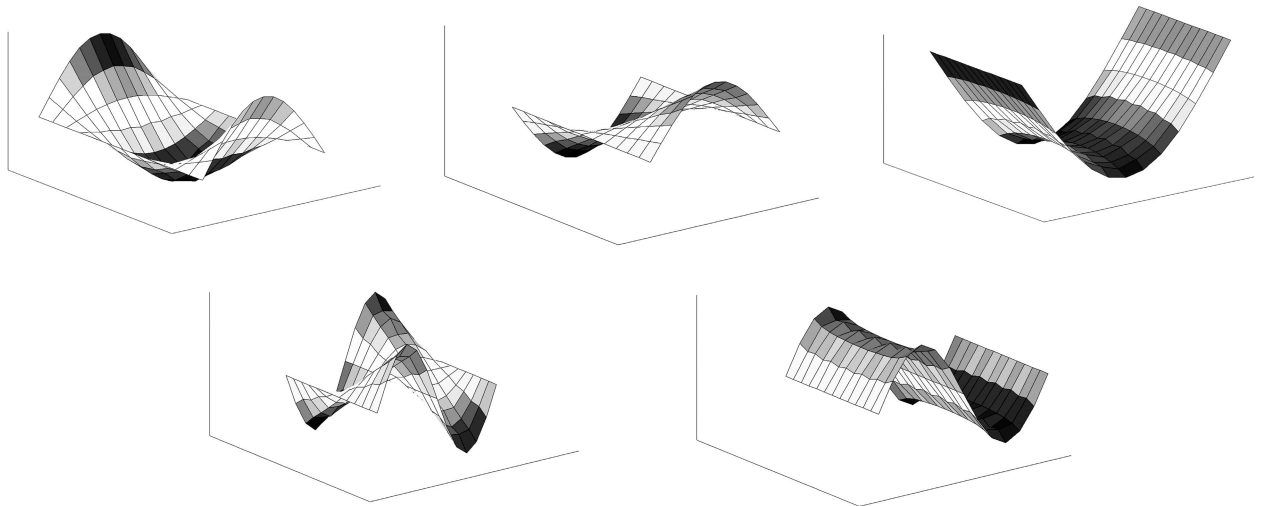
شکل ۲. شکل مودهای ارتعاشی حالت (CCCC).



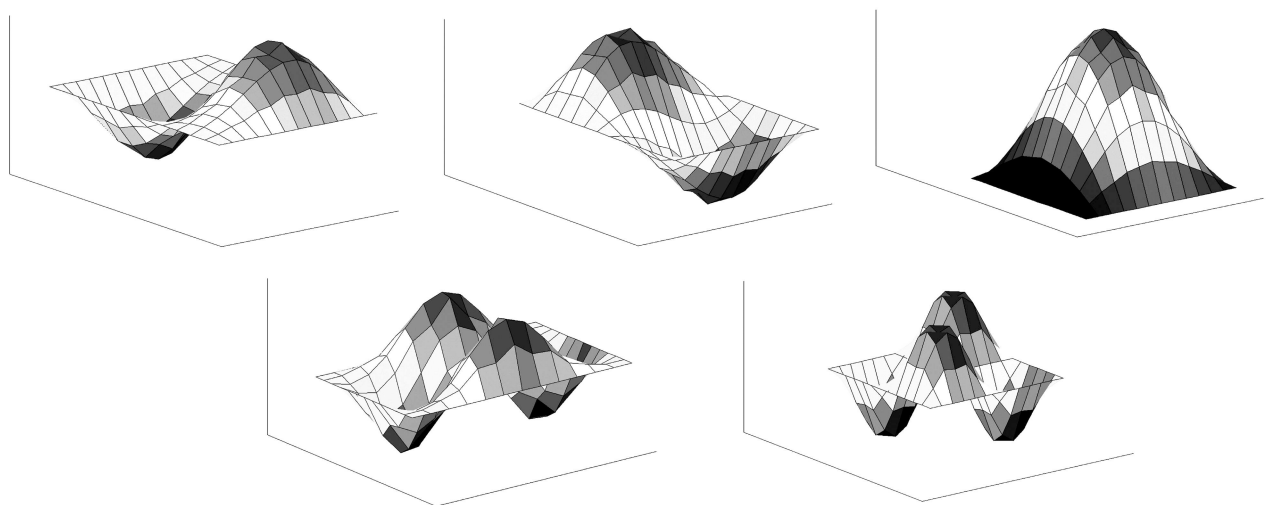
شکل ۳. شکل مودهای ارتعاشی حالت (CFFF).



شکل ۴. شکل موده‌های ارتعاشی حالت (CCSS).



شکل ۵. شکل موده‌های ارتعاشی حالت (SSFF).



شکل ۶. شکل موده‌های ارتعاشی حالت (SSSS).

جدول ۴. مقادیر فرکانس طبیعی متناظر با شرایط مرزی مختلف.

شماره مود	F	FP(S)	FP(A)
حالت (CCCC)			
۱	۱۳۷۵	۱۳۳۱	۱۳۲۸
۲	۲۹۴۱	۲۸۴۵	۲۸۳۹
۳	۲۹۴۲	۲۸۴۸	۲۸۴۴
۴	۴۳۴۲	۴۲۰۱	۴۱۹۳
۵	۵۷۴۹	۵۵۵۸	۵۵۴۸
حالت (CFFF)			
۱	۱۲۷	۱۲۴	۱۲۳
۲	۳۱۳	۳۰۲	۳۰۰
۳	۷۹۹	۷۷۳	۷۶۹
۴	۱۰۰۶	۹۷۳	۹۷۱
۵	۱۱۵۶	۱۱۱۷	۱۱۱۲
حالت (CCSS)			
۱	۱۱۰۵	۱۰۶۷	۱۰۶۴
۲	۲۰۸۱	۲۰۱۱	۲۰۰۸
۳	۲۷۸۶	۲۶۹۵	۲۶۸۶
۴	۳۷۱۱	۳۵۸۶	۳۵۷۷
۵	۴۰۴۰	۳۸۹۹	۳۸۹۶
حالت (SSFF)			
۱	۳۸۰	۳۶۱	۳۵۹
۲	۶۰۶	۵۸۲	۵۷۸
۳	۱۳۵۶	۱۳۰۹	۱۳۰۴
۴	۱۴۷۷	۱۴۳۰	۱۴۲۴
۵	۱۷۷۱	۱۷۰۸	۱۷۰۱
حالت (SSSS)			
۱	۷۶۷	۷۳۱	۷۲۹
۲	۱۸۷۱	۱۸۰۳	۱۷۹۸
۳	۱۸۷۲	۱۸۰۴	۱۸۰۲
۴	۲۹۸۴	۲۸۷۵	۲۸۶۸
۵	۳۸۸۵	۳۷۵۳	۳۷۴۴

ملاحظه‌ای در دامنه‌ی ارتعاشات پدید آورد. از سوی دیگر، ایجاد میدان الکتریکی نامطلوب، ممکن است به افزایش دامنه‌ی ارتعاشات بینجامد. چنان که مشاهده می‌شود از آنجا که میرایی سازه‌ی ورق ناپدید گرفته شده است، شوک الکتریکی اولیه وارده بر لایه‌ی پیزوالکتریک در اثر برقراری جریان الکتریکی، ارتعاشات گذرای نامیرایی در آن ایجاد کرده که بر ارتعاشات گذرای نامیرایی ورق سوار است. همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، ارتعاش کلی ورق با فرکانسی تقریباً برابر با فرکانس اول حالت CCCC از جدول ۳ انجام می‌پذیرد. همچنین، اثر ترکیب مودهای بعدی نیز در پاسخ آشکار است.

۲.۲.۴. ورودی هارمونیک

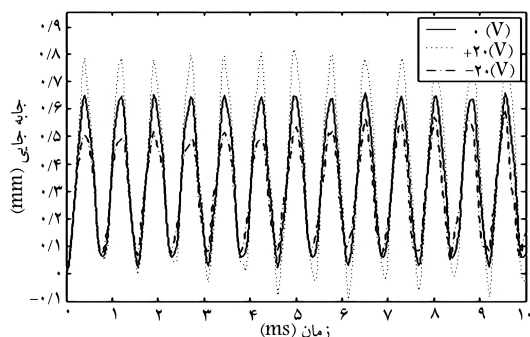
در شکل ۸ پاسخ ورق FGM بدون تحریک الکتریکی و با نیروی متمرکز هارمونیک با فرکانس تحریک ۱۰۰ هرتز، به همراه پاسخ آن به‌ازاء دو تحریک پیزوالکتریک

جدول ۵. اثر افزایش ابعاد ورق بر کاهش فرکانس‌های طبیعی.

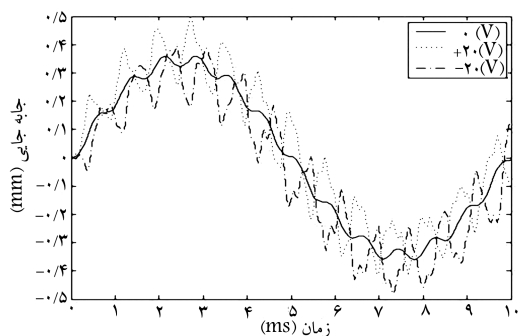
ابعاد ورق Cm*Cm	F	FP(S)	FP (A)
۲۰ * ۲۰	۱۳۷۵	۱۳۳۱	۱۳۲۸
۴۰ * ۴۰	۳۴۷	۳۳۶	۳۳۵
۶۰ * ۶۰	۱۵۴	۱۵۰	۱۴۹

جدول ۶. اثر توان معادله‌ی حاکم بر رفتار مواد FGM، بر فرکانس‌های طبیعی ورق.

n	F	FP(S)	FP(A)
۱	۱۳۷۵	۱۳۳۱	۱۳۲۸
۰٫۵	۱۵۲۱	۱۴۷۵	۱۴۷۲
۲	۱۲۵۲	۱۲۱۰	۱۲۰۸



شکل ۷. پاسخ ورق به اِزاء ورودی پله‌ی.



شکل ۸. پاسخ ورق در ازای ورودی پله‌ی.

شرایط مرزی ورق در این حالت چهار لبه گیردار یا CCCC است. دامنه‌ی بار معادل ۱ کیلو نیوتن است و این بار بر نقطه‌ی میانی ورق و در راستای عمود بر سطح آن اعمال می‌شود.

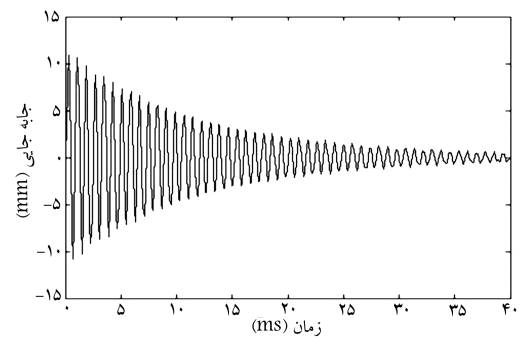
۱.۲.۴. ورودی پله‌ی

در این قسمت نتایج حاصل از ورودی پله‌ی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. با توجه به نتایج گذشته، وجود لایه‌ی پیزوالکتریک و همچنین اعمال ولتاژهای گوناگون، تأثیر اندکی بر مقادیر فرکانس طبیعی ورق دارد. در ولتاژهای اعمالی بزرگ‌تر، این اثر مشهودتر است. در شکل ۷، اثر تک‌لایه‌ی پیزوالکتریک بر دامنه‌ی ارتعاشات ورق FGM نشان داده شده است. چنان که از شکل ۷ پیداست، اعمال ولتاژ مناسب به تک‌لایه‌ی پیزوالکتریک ممکن است سختی ورق را افزایش دهد و کاهش قابل

به لایه‌ی محرک، ۵۰- در نظر گرفته شده است. بار وارده به ورق، یک پالس با شدت ۱ کیلو نیوتن و در نقطه‌ی میانی ورق در نظر گرفته شده است. اثر کنترل فعال بر ارتعاشات ورق در شکل ۹ نشان داده شده است. چنان که ملاحظه می‌شود، با وجود نادیده گرفتن میرایی سازه‌ی، ارتعاشات ورق از طریق به‌کارگیری لایه‌های پیزوالکتریک میرا شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار کنونی، از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه سوم برای میدان جابه‌جایی استفاده شده و برای المان بندی ورق از المان‌های مرتبه دو با ۹ نقطه گره بهره گرفته شده است. بنابراین نتایج به دست آمده از دقت بالایی برخوردارند. در این نوشتار ورق مربعی از جنس مواد FGM که توسط یک یا دو لایه از مواد پیزوالکتریک پوشانده شده بود، مورد تحلیل قرار گرفت و در نهایت این نتیجه حاصل شد که لایه‌ی پیزوالکتریک تأثیر اندکی بر مقادیر فرکانس طبیعی ورق دارد. توان اختلاط مواد (n) و نسبت ابعاد درون صفحه‌ی به ضخامت، از جمله عوامل مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی‌اند. استفاده از ولتاژ ثابت در لایه‌های پیزوالکتریک محرک می‌تواند دامنه‌ی ارتعاشات را کاهش دهد ولی ارتعاشات را میرا نمی‌سازد و اغتشاشاتی را در پاسخ به همراه خواهد داشت. فقط با استفاده‌ی هم‌زمان از یک لایه‌ی پیزوالکتریک حس‌گر و دست‌کم یک لایه‌ی پیزوالکتریک محرک می‌توان به کنترل فعال ارتعاشات پرداخت و ارتعاشات پدیدآمده را میرا ساخت.



شکل ۹. کنترل ارتعاشات ورق FGM.

مختلف نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، با وجود آن که ارتعاش کلی ورق بدون تحریک الکتریکی، با فرکانس تحریک مکانیکی انجام می‌گیرد، نوسانات گذرای نامیرا با فرکانس طبیعی اول ورق نیز بر نوسان اصلی ورق سوارند و به همین دلیل، پاسخ ورق به فرم هارمونیک ساده نیست. ولتاژ الکتریکی مثبت، باعث اغتشاشاتی عموماً با انحراف مثبت و ولتاژ الکتریکی منفی، موجب نوساناتی با انحراف عموماً منفی نسبت به سیگنال اصلی شده‌اند.

۳.۲.۴. کنترل فعال ارتعاشات ورق

برای بررسی اثر کنترل مدار بسته‌ی ارتعاشات ورق، از دو لایه‌ی پیزوالکتریک -- یک لایه‌ی حس‌گر در بالای مجموعه و یک لایه‌ی محرک در زیر لایه‌های ورق کامپوزیت -- استفاده شده است. در مثال کنونی، مقدار ضریب تقویت ولتاژ حس‌گر برای اعمال

پانویس

1. Functionally graded material

منابع

3. Yang, J.; Kitipornchai, S.; Liew, K.M. "Large amplitude vibration of thermo-electro-mechanically stressed FGM laminated plates", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, pp. 3861-3885 (2003).
4. Huang, X.L.; Shen, H.S. "Nonlinear free and forced vibration of simply supported shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *International Journal of Mechanical Sciences*, **47**, pp. 187-208 (2005).
5. Reddy, J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells theory and analysis*, 2nd ed., CRC Press (2004).
6. Saravanos, D.A.; Heyliger, P.R.; Hopkins, D.A. "Layerwise mechanics and Finite element for the dynamics analysis of piezoelectric composite plates", *Int J Solids Struct*, **34** (3), pp. 359-78 (1997).
1. He, X.Q.; Ng, T.Y.; Sivashanker, S.; Liew, K.M. "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *International journal of solids and structures*, **38**, pp. 1641-1655 (2001).
2. Wu, X.H.; Chen, C.Q.; Shen, Y.P.; Tian, X.G. "A high order theory for functionally graded piezoelectric shells", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 5325-5344 (2002).

