

# کاربرد روش نگاشت برگشتی در تحلیل کشسانی-خمیری مخازن تحت فشار با رفتار سختی سینماتیک غیر خطی

علمی نایبی (استادیار)

دانشکده مهندسی، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

خسرو نادران طحان (دانشیار)

سجاد بازدار (کارشناس ارشد)

دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تحلیل کشسانی - خمیری مخازن تحت فشار نقش مهمی در طراحی آنها دارد. برای انجام این تحلیل استفاده از یک روش محاسباتی مناسب ضرورت دارد. «نگاشت برگشتی» یک روش محاسباتی مناسب برای تحلیل مسائل غیرخطی است. در این تحقیق با استفاده از این روش یک استوانه‌ی جدارضخیم تحت فشار داخلی تغییر به صورت کشسانی - خمیری تحلیل شده است. رفتار ماده، غیرخطی با سخت شوندهگی سینماتیک فرض شده است. از مدل فردریک - آرمسترانگ برای بیان معادلات اساسی و معیار تسلیم فون میسس برای ارزیابی رفتار ماده استفاده شد. با استفاده از معادلات گسترش یافته‌ی روش نگاشت برگشتی برای رفتار فوق در تحلیل استوانه‌ی جدارضخیم، نمودار تنش - کرنش سازه تحت بارگذاری دوره‌ی تعیین شد. مقایسه‌ی نتایج حاصله با نتایج ناشی از روش اجزاء محدود نشانگر انطباق قابل ملاحظه‌ی این نتایج است.

واژگان کلیدی: روش نگاشت برگشتی، تغییر شکل کشسانی - خمیری، مخازن جدارضخیم، بارگذاری دوره‌ی.

nayebi@shirazu.ac.ir  
naderan\_k@scu.ac.ir  
sajadbazdar59@yahoo.com

## ۱. مقدمه

هدف از این تحقیق کاربرد الگوریتم نگاشت برگشتی در تحلیل بارگذاری دوره‌ی مخازن جدارضخیم با رفتار سختی سینماتیکی غیرخطی است. در این روش ابتدا معادلات لازم برای مدل انتخاب شده بسط داده می‌شوند. در مرحله‌ی بعد، این معادلات به صورت جزئی و براساس الگوریتم نگاشت برگشتی ارائه می‌شوند. سپس کاربرد روش عددی برای یک استوانه‌ی جدارضخیم تحت فشار داخلی ارائه، و پاسخ الگوریتم ارائه شده با نتایج حاصل از مدل سازی توسط ANSYS مقایسه شده است.

تحلیل تنش و کرنش مخازن جدارضخیم که تحت بارگذاری دوره‌ی هستند، نقش مهمی در طراحی این مخازن دارد. استفاده از مدل‌های ساده برای تحلیل کشسانی - خمیری، امکان به دست آوردن روابط تحلیلی را فراهم می‌کند.<sup>[۱-۳]</sup> اگرچه کار با این معادلات ساده تر است، این مدل‌های ساده همانند مدل «سختی سینماتیکی خطی» توانایی پیش بینی یا تخمین دقیق بعضی از رفتارهای سازه‌ها (نظیر رج‌تینگ<sup>۱</sup>) را ندارند. اگرچه مدل‌های دقیق تر در توصیف رفتار مواد در بارگذاری‌های غیرمتناسب توانایی بهتری دارند، محاسبات آنها پیچیده تر است؛ استفاده از روش‌های عددی نیازمند صرف زمان طولانی است. بنابراین انتخاب روش عددی مناسب در تحلیل‌های کشسانی - خمیری نقش مهمی در دقت پاسخ‌ها و زمان لازم برای به دست آوردن آنها دارد. در سال ۱۹۸۵ روش نزدیک‌ترین تصویر<sup>۲</sup> با انجام اصلاحاتی به نام الگوریتم نگاشت برگشتی<sup>۳</sup> معرفی شد.<sup>[۴]</sup> الگوریتم نگاشت برگشتی یک شیوه‌ی مناسب برای انتگرال‌گیری از معادلات ساختاری توصیف رفتار مواد است.<sup>[۴،۵]</sup> اساس این روش بدین ترتیب است که ابتدا از معادلات کشسان برای نیل به یک تخمین کشسان انتگرال‌گیری می‌شود. این تخمین کشسان به عنوان شرط اولیه تصحیح خمیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس تنش‌های کشسان تخمین زده شده روی سطح تسلیم به روز شده، تصحیح می‌شود؛ در این تصحیح باید شرط تطابق نیز تأمین شود.<sup>[۶-۱۱]</sup>

## ۲. معادلات ساختاری

در این تحلیل فرض می‌شود که استوانه‌ی جدارضخیم از معیار تسلیم فون میسس پیروی می‌کند. فون میسس در سال ۱۹۱۳ معیار ایجاد جریان خمیری را مطابق رابطه‌های ۱ و ۲ بیان کرد:<sup>[۱۲]</sup>

$$f = J_2(\sigma - X) - \frac{1}{3}\sigma_y^2 = 0 \quad (1)$$

$$J_2(\sigma - X) = \left[ \frac{1}{3}(\sigma' - X') : (\sigma' - X') \right] \quad (2)$$

که در آن  $X$  متغیر سخت‌شوندهگی سینماتیکی و نشانگر موقعیت مرکز سطح تسلیم،  $\sigma_y$  تنش تسلیم یا اندازه‌ی اولیه‌ی سطح تسلیم، و  $X'$  و  $\sigma'$  به ترتیب مقادیر انحرافی

جریان خمیری رخ داده باشد، مقدار کرنش خمیری محاسبه می‌شود. با توجه به حل آزمایشی کشسانی و توسط پارامتر سازگاری  $\lambda$ ، شرایط بارگذاری - باربرداری و رابطه‌ی سطح تسلیم، کرنش‌ها اصلاح می‌شوند. هدف از الگوریتم فوق، محاسبه‌ی تنش و کرنش‌های کشسان و خمیری در زمان  $t_{n+1}$  با توجه به سابقه‌ی تنش - کرنش در زمان  $t_n$  است:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (12)$$

تمامی متغیرها در زمان  $t_n$  معلوم فرض می‌شوند. در این صورت تنش در زمان  $t_n$  عبارت است از:

$$\sigma_n = E[\varepsilon_n - \varepsilon_n^p] \quad (13)$$

اکنون با اعمال جزء کرنش  $\Delta\varepsilon_n$  در زمان  $t_n$ ، به کمک الگوریتم نگاشت برگشتی مقادیر  $\varepsilon_{n+1}$ ،  $\varepsilon_{n+1}^p$  و  $X_{n+1}$  محاسبه می‌شوند (شکل ۱).

با اعمال روش اویلر ضمنی پسر، شکل جزئی معادلات اساسی به دست آورده می‌شود. رابطه‌ی ۸ با اعمال این روش به شکل جزئی نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta X_{n+1} \\ X_{n+1} = X_n + \frac{1}{\tau} C_x (Q_x P \tau_{n+1} - \sigma_y X_{n+1}) \Delta \lambda_{n+1} \end{cases} \quad (14)$$

و با فاکتورگیری از  $X_{n+1}$  رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} X_{n+1} = A_x^{-1} X_n + \frac{1}{\tau} A_x^{-1} C_x Q_x P \tau_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \\ A_x = 1 + \frac{1}{\tau} C_x \sigma_y \Delta \lambda_{n+1} \end{cases} \quad (15)$$

و با اعمال روش اویلر ضمنی بر روی روابط ۴ تا ۷ و رابطه‌ی ۱۰، چنین نوشته می‌شوند:

$$\tau_{n+1} = \sigma_{n+1} - X_{n+1} \quad (16)$$

$$f_{n+1} = \frac{1}{\tau} \tau_{n+1}^T P \tau_{n+1} - \frac{1}{\tau} \sigma_y^2 \leq 0 \quad (17)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + P \tau_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \quad (18)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{\tau} \sigma_y \Delta \lambda_{n+1} \quad (19)$$

$$\sigma_{n+1} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - C P \tau_{n+1} \Delta \lambda_{n+1} \quad (20)$$

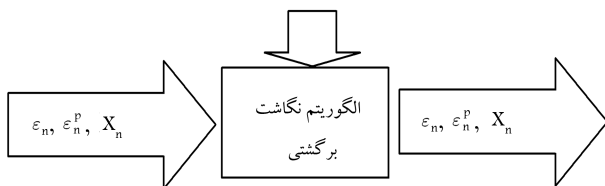
آزمون کشسانی را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۲۱ نوشت:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (21)$$

شرط ایجاد جریان خمیری نیز مطابق رابطه‌ی ۲۲ نوشته می‌شود:

$$f(\sigma_{n+1}^{trial}, X_n) = \begin{cases} \leq 0 & \text{Elastic state} \\ > 0 & \text{Plastic state} \end{cases} \quad (22)$$

بار جزئی اعمالی



شکل ۱. روند اعمال الگوریتم برگشتی.

متغیر سخت‌شوندگی سینماتیکی و تنش است. می‌توان یک ماتریس تصویر برای فضای تنش در نظر گرفت که هرگاه در ماتریس تنش ضرب شود، ماتریس تنش انحرافی آن ماتریس را مشخص می‌کند:

$$\sigma' = P \sigma \quad (3)$$

اکنون اگر تنش مؤثر به صورت رابطه‌ی ۴ تعریف شود، با استفاده از خاصیت ماتریس  $P$ ، می‌توان رابطه‌ی سطح تسلیم را چنین نوشت:

$$\tau = \sigma - X \quad (4)$$

$$f = \frac{1}{\tau} \tau^T P \tau - \frac{1}{\tau} \sigma_y^2 \quad (5)$$

جزء کرنش خمیری در فضای تنش عمود بر سطح تسلیم است («قانون تعامد<sup>۴</sup>») و جریان خمیری نیز از این خاصیت پیروی می‌کند:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\lambda . P . \tau \quad (6)$$

با استفاده از رابطه‌ی کرنش خمیری تجمعی<sup>۵</sup> و رابطه‌ی ۶، نمو کرنش خمیری تجمعی برابر است با:

$$dp = \left( \frac{2}{3} d\varepsilon^p : d\varepsilon^p \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_y \quad (7)$$

به منظور توصیف چگونگی جابه‌جایی سطح تسلیم در فضای تنش، مدل آرمسترانگ - فردریک<sup>[۱۳]</sup> مطابق رابطه‌ی ۸ نوشته می‌شود:

$$dX = \frac{2}{3} c d\varepsilon^p - \gamma X dp \quad (8)$$

که در آن  $dX$  نشان‌دهنده‌ی جزء تانسور تنش پایه<sup>۶</sup> است که بیان‌گر انتقال جزئی مرکز سطح تسلیم در فضای تنش است.  $c$  و  $\gamma$  دو ثابت ماده‌اند که از منحنی هیستریزس پایدار تک‌محوری تعیین می‌شوند. اکنون با این فرض که  $C_x = c/\gamma$  و  $Q_x = \gamma$  و نیز با استفاده از رابطه‌های ۶ و ۷، رابطه‌ی سختی سینماتیکی غیر خطی مطابق رابطه‌ی ۹ ساده می‌شود:

$$dX = \frac{1}{\tau} C_x (Q_x P \tau - \sigma_y X) d\lambda \quad (9)$$

با توجه به ماهیت متفاوت تغییر شکل‌های کشسانی و خمیری، از اصل جمع‌پذیری کرنش‌ها استفاده می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (10)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی هوک و رابطه‌ی ۶ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$d\sigma = C(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = C(d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}) \quad (11)$$

### ۳. الگوریتم نگاشت برگشتی

در این بخش کاربرد الگوریتم نگاشت برگشتی برای مدل خمیری چندمحوری مستقل از نمو بارگذاری بیان می‌شود. ابتدا با در نظر گرفتن تانسور تنش یک نقطه‌ی مادی از جسم، و نیز با استفاده از معیار تسلیم (رابطه‌ی ۱) بررسی می‌شود که آیا در آن نقطه تحت بارگذاری اعمال‌شده شرط تسلیم تأمین می‌شود یا نه. سپس اگر

همچنین ماتریس تنش‌های انحرافی عبارت است از:

$$S = [\sigma'_{11}, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}]^T \quad (31)$$

در الگوریتم نگاشت برگشتی، ماتریس نگاشت در حالت تنش صفحه‌ی چین معرفی می‌شود:

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

که از ضرب این ماتریس در ماتریس تنش صفحه‌ی، ماتریس تنش‌های انحرافی در حالت تنش صفحه‌ی به دست می‌آید:

$$\sigma' = P\sigma \quad (33)$$

ماتریس معرفی شده در رابطه‌ی ۳۲ فقط در حالت تنش صفحه‌ی کاربرد دارد.  $C$  ماتریس مدول کشسان در حالت تنش صفحه‌ی عبارت است از:

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

در مورد مواد الاستیسیته‌ی ایزوتروپیک، ماتریس  $C$  و ماتریس تصویر  $P$  خصوصیات زیرفضایی یکسانی دارند و به راحتی قطری می‌شوند:

$$P = Q\Lambda_p Q^T \quad (35)$$

$$C = Q\Lambda_c Q^T \quad (36)$$

ماتریس  $Q$  یک ماتریس متعامد است ( $Q^{-1} = Q^T$ ) که در حالت تنش صفحه‌ی چین نوشته می‌شود:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

ماتریس‌های  $\Lambda_c$  و  $\Lambda_p$  نیز چنین معرفی می‌شوند:

$$\Lambda_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\Lambda_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (39)$$

که در آن  $\mu$  ثابت لامه است.

## ۵. تحلیل استوانه جدار ضخیم

تانسور تنش در یک استوانه‌ی جدارضخیم توخالی تحت فشار داخلی  $P$  به شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  در مختصات استوانه‌ی مطابق رابطه‌ی ۴۰ نوشته می‌شود:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (40)$$

با به کار بردن روابط تعادل، سازگاری و تنش - کرنش، روابط را می‌توان برای تنش‌های شعاعی و محیطی استوانه‌ی جدارضخیم تحت حالت تنش صفحه‌ی با شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$ ، تحت فشار داخلی به دست آورد. برای سهولت تنش‌ها و کرنش‌ها به شکل رابطه‌ی ۴۱ بی‌بعد می‌شوند:

$$S_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_y}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_y}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\sigma_y}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad e_r = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_y}, \quad e_\theta = \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_y} \quad (41)$$

اگر آزمون کشسانی صحیح باشد، شرط حالت کشسان برقرار است، اما اگر شرط جریان خمیری برقرار شده باشد باید با استفاده از روش نیوتن - رافسون و شرایط بارگذاری - باربرداری (رابطه‌ی ۲۳) کرنش‌ها را محاسبه کرد:

$$f_{n+1} \leq 0, \quad \Delta\lambda > 0, \quad \Delta\lambda \cdot f_{n+1} = 0 \quad (23)$$

برای حل معادلات فوق، پیشنهاد شده است که تنش موثر در فضای تنش  $k$  بعدی به صورت مجموع حاصل ضرب بردارهای ویژه  $\nu_k$  در مقادیر ویژه  $\xi_k$  در نظر گرفته شود.<sup>[۸]</sup>

$$\tau_{n+1} = \sum_{k=1}^r \xi_k \nu_k \quad (24)$$

برای مقادیر ویژه از دستگاه ۲۵ استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} v_k^T C^{-1} v_k = \delta_{k1} \\ v_k^T P v_k = \mu_k \delta_{k1} \\ P v_k = \mu_k C^{-1} v_k \end{cases} \quad (25)$$

با حل این دستگاه مقادیر ویژه مطابق رابطه‌ی ۲۶ و ۲۷ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \xi_k = \frac{\alpha_k}{1 + \Delta\lambda \left( \frac{1}{2} C_x Q_x A_x^{-1} + \mu_k \right)} \\ \alpha_k = v_k^T C^{-1} \tau_{n+1} \end{cases} \quad (26)$$

و

$$\tau_{n+1}^{Trial} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - A_x^{-1} X_n \quad (27)$$

اکنون با جایگذاری روابط ۲۶ و ۲۷ در رابطه‌ی ۲۴ و با کاربرد روابط ۱۵، ۲۰ و ۲۴ در رابطه‌ی ۱۶ و سپس جایگذاری نتیجه‌ی آن در رابطه‌ی سطح تسلیم (رابطه‌ی ۱۷)، می‌توان نوشت:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^r \mu_k \frac{\alpha_k^2}{[1 + \Delta\lambda_{n+1} \left( \frac{1}{2} C_x Q_x A_x^{-1} + \mu_k \right)]} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y^2 = 0 \quad (28)$$

با استفاده از روش تکراری نیوتن - رافسون نیز می‌توان معادله‌ی غیرخطی ۲۸ را با استفاده از رابطه‌ی ۲۹ حل کرد:

$$\Delta\lambda_{n+1}^{s+1} = \Delta\lambda_n^s - \frac{f_{n+1}^s}{\left( \frac{df}{d\Delta\lambda} \right)_{n+1}^s} \quad (29)$$

معادلات ۱۴ تا ۲۹ روابط الگوریتم نگاشت برگشتی را تشکیل می‌دهند و پارامتر  $s$  نشان‌گر تعداد مراحل تکرار است.

## ۴. کاربرد الگوریتم نگاشت برگشتی در حالت دوبعدی

در حالت تنش صفحه‌ی، تانسور تنش چنین نمایش داده می‌شود:

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]^T \quad (30)$$

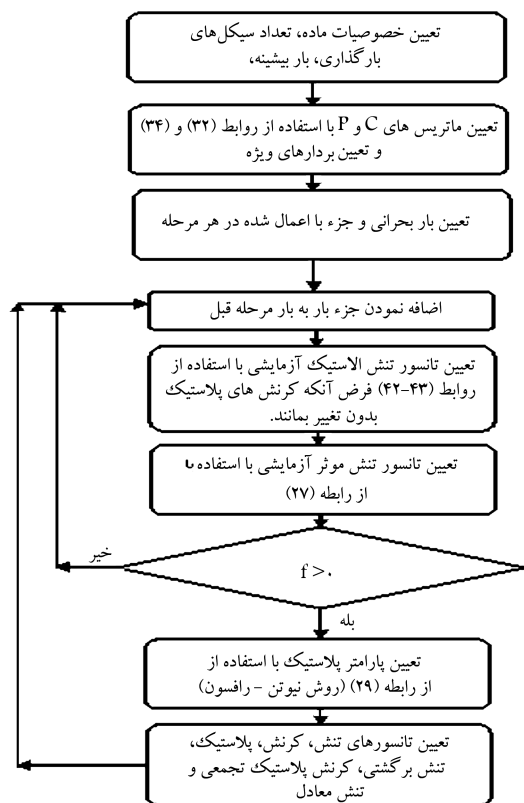
روابط تنش های شعاعی و تماسی در منطقه‌ی خمیری عبارت اند از:

$$S_r = -\frac{\bar{P}}{\rho^2} + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \left(\frac{1}{\beta^2 - 1}\right) \left[\bar{p} - \int \left(\int \frac{e_r^p - e_\theta^p}{\rho} d\rho\right) \rho d\rho\right] + \frac{1}{2} \int \frac{e_r^p - e_\theta^p}{\rho} d\rho - \frac{1}{4} (e_r^p - e_\theta^p) \quad (42)$$

$$S_\theta = \frac{\bar{P}}{\rho^2} + \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \left(\frac{1}{\beta^2 - 1}\right) \left[\bar{P} - \int \left(\int \frac{e_r^p - e_\theta^p}{\rho} d\rho\right) \rho d\rho\right] + \frac{1}{2} \int \frac{e_r^p - e_\theta^p}{\rho} d\rho + \frac{1}{4} (e_r^p - e_\theta^p) \quad (43)$$

## ۶. روش تحلیل

برای بررسی رفتار اجسامی که تحت بارگذاری‌های دوره‌یی قرار می‌گیرند دو روش وجود دارد: ۱. کنترل تغییر شکل، بدین صورت که بیشینه و کمینه‌ی تغییر شکل در هر دوره محدود است و به‌ازای این تغییر شکل‌های کنترلی تنش‌ها محاسبه می‌شوند؛ ۲. کنترل بار، بدین صورت که بیشینه و کمینه‌ی بار در هر دوره محدود می‌شود و به‌ازای این بارهای کنترلی کرنش‌های به‌وجود آمده در هر دوره محاسبه می‌شوند. تحقیق حاضر بر مبنای کنترل بار انجام می‌شود. در آغاز فشار داخلی بیشینه‌ی وارد بر جسم به بازه‌های مساوی تقسیم می‌شود. سپس برای هر جزء بار اعمال شده تانسور تنش کشسانی یا آزمایشی طبق رابطه‌های ۴۲ و ۴۳ محاسبه می‌شود، و بعد با قرار گرفتن این تانسور تنش در دستگاه معادلات ۱۴ تا ۲۹ که تشکیل دهنده‌ی الگوریتم نگاشت برگشتی‌اند، تانسور تنش برگشتی، کرنش معادل، و کرنش تجمعی خمیری برای هر افزایش بار محاسبه می‌شود. فرایند تحلیل به‌صورت خلاصه در شکل ۲ نشان داده شده است. در انتهای هر مرحله از حل عددی توسط روش نگاشت برگشتی، پاسخ‌ها با پاسخ معادلات تعادل به‌ازاء جزء کرنش‌های خمیری یکسان مقایسه می‌شوند و این حل تا رسیدن به پاسخ مناسب تکرار می‌شود.



شکل ۲. الگوریتم روش عددی.

جدول ۱. ثابت‌های مدل آرمسترانگ - فردریک برای ماده‌ی استوانه‌ی جدارضخیم.

$\gamma$	$c$ (MPa)	$\nu$	تنش تسلیم $\sigma_y$ (MPa)	مدول یانگ E (GPa)
۶۰	۳۰۰۰۰	۰٫۳	۱۳۳	۱۹۶

تعداد جزء بارها در هر دو نوع بارگذاری یک‌نوا و دوره‌یی در هر دو روش نگاشت برگشتی و اجزاء محدود، یکسان فرض شد. مشاهده شد که زمان لازم برای تحلیل اجزاء محدود سه برابر زمان لازم برای الگوریتم نگاشت برگشتی است.

## ۱.۸. بارگذاری دوره‌یی

در تحلیل بارگذاری دوره‌یی استوانه‌ی جدارضخیم، فشار داخلی بین صفر و مقدار بیشینه تغییر می‌کند. در هر دوره تفاوت فشار داخلی و فشار بیشینه به ۱۰۰ نمو بار تقسیم، و در هر مرحله از روش نگاشت برگشتی استفاده شد. سپس تنش‌های شعاعی و تماسی به دست آمدند. شکل ۳ تغییرات تنش‌های شعاعی و محیطی را برحسب کرنش شعاعی و محیطی در شعاع داخلی استوانه نشان می‌دهد. همچنین تغییرات کرنش خمیری در راستای شعاع استوانه تعیین شد. با افزایش تعداد دوره‌های بارگذاری، کرنش خمیری شعاعی و محیطی افزایش می‌یابد. با توجه به این که بارگذاری و تنش‌های ناشی از آن از نوع اولیه‌اند، این رفتار نشان‌دهنده‌ی پدیده‌ی رچتینگ (پدیده‌ی افزایش کرنش‌های خمیری در هر دوره با نمو ثابت یا افزایشی) است (شکل ۴).

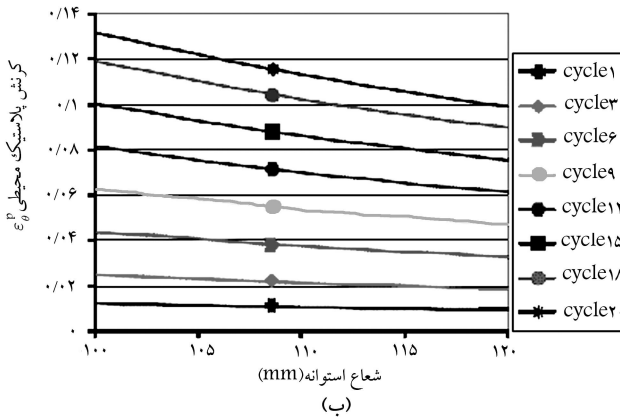
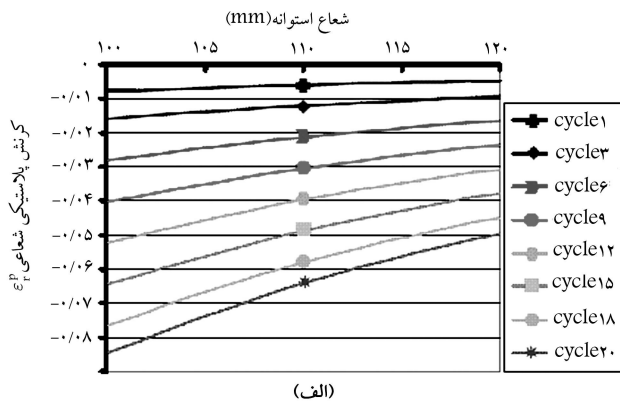
چنان که در شکل‌های ۵ الف و ۵ ب نشان داده شده است، تنش‌های پسماند

## ۷. تحلیل به‌روش اجزاء محدود

در این تحقیق مدل‌سازی رفتار پلاستیسیته مستقل از زمان، و با استفاده از مدل سخت‌شوندگی سینماتیکی آرمسترانگ - فردریک با معیار تسلیم فون میسس برای یک استوانه‌ی جدارضخیم تحت بارگذاری دوره‌یی و شرایط تنش صفحه‌یی انجام شده است. به‌منظور تحلیل این مسئله به‌روش اجزاء محدود از نرم‌افزار ANSYS بهره گرفته شد. با وجود تقارن محوری، یک جزء دوبعدی که توانایی انجام تحلیل فوق را دارد، انتخاب شد. تعداد ۱۱۷۶ المان PLANE183 برای مدل‌سازی به کار برده شد. تعداد لایه‌ها در راستای شعاع با تعداد تقسیمات در روش نگاشت برگشتی یکسان در نظر گرفته شد تا بتوان نتایج دو روش را مقایسه کرد.

## ۸. نتایج، بحث و بررسی

به‌منظور کاربرد روش، یک استوانه‌ی جدارضخیم به شعاع داخلی ۱۰ mm و شعاع خارجی ۱۲ mm تحت فشار داخلی یک‌نوا و دوره‌یی در نظر گرفته شد. فرض شد ماده از مدل سختی سینماتیکی آرمسترانگ - فردریک پیروی کند. ثابت‌های ماده براساس مدل فوق در جدول ۱ ارائه شده است.

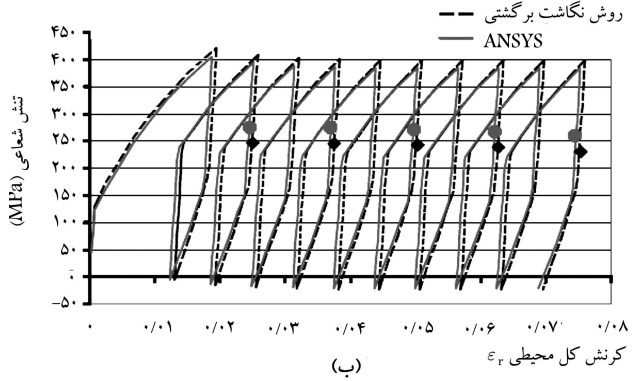
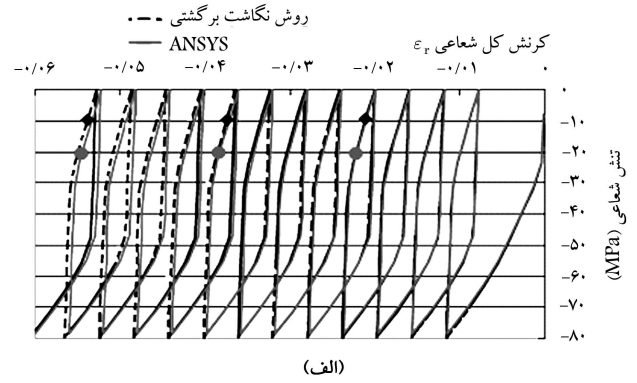


شکل ۵. الف) تغییرات تنش‌های شعاعی و محیطی؛ ب) پسماند برحسب شعاع استوانه.

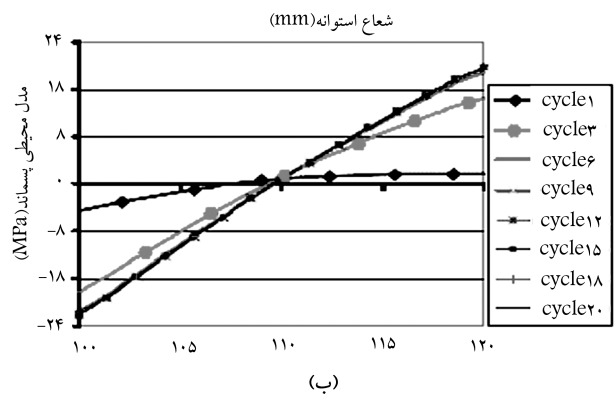
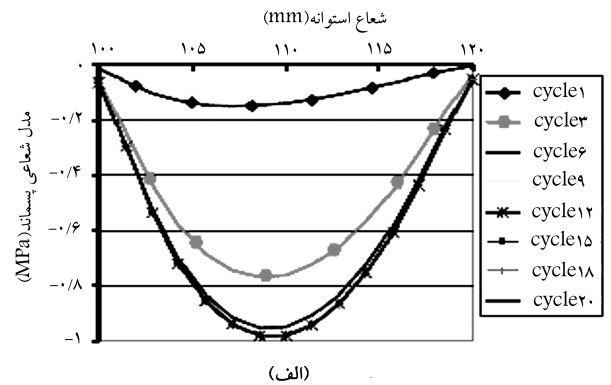
شعاعی و محیطی از دوره‌ی ۶ به بعد تقریباً ثابت بوده و تغییرات زیادی در آن مشاهده نمی‌شود. همچنین همه‌ی نمودارهای تنش‌های محیطی در یک نقطه تلاقی می‌کنند و تنش پسماند تقریباً در وسط ضخامت استوانه و مستقل از دوره‌ی بارگذاری است.

## ۹. نتیجه‌گیری

در این تحقیق کاربرد الگوریتم نگاشت برگشتی برای تحلیل مسائل تنش صفحه‌یی با رفتار سختی سینماتیکی غیرخطی بررسی شد. معادلات الگوریتم توسعه داده شدند و سپس برای مسائل تنش صفحه‌یی ساده شدند. از این الگوریتم برای تحلیل بارگذاری دوره‌یی یک استوانه‌ی جدارضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی و شرایط تنش صفحه‌یی استفاده شد. کرنش‌های خمیری با استفاده از مدل سخت‌شوندگی سینماتیکی غیرخطی آرمسترانگ - فردریک در قالب الگوریتم نگاشت برگشتی محاسبه شدند. به منظور انجام مقایسه، مسئله به کمک روش اجزاء محدود نیز بررسی شد. روش الگوریتم نگاشت برگشتی در مقایسه با روش اجزاء محدود سریع‌تر به پاسخ همگرا می‌شود. همچنین مشخص شد که این روش برای تعداد اجزاء برابر در راستای شعاع، با دقت بیشتری شرایط مرزی را تأمین می‌کند. پس از ۶ مرحله تکرار بارگذاری، تغییرات تنش‌های شعاعی و پسماند ناچیز می‌شود و با توجه به نوع بار اعمال شده، کرنش‌های خمیری در هر دوره افزایش یافته و پدیده‌ی رجتینگ قابل پیش‌بینی است. با توجه به جامعیت روش ارائه‌شده، می‌توان از آن برای تحلیل سازه‌های مختلف با مدل‌های پیچیده‌تر همچون مدل سختی سینماتیکی غیرخطی شاباش و تحت بارگذاری‌های بارگذاری حرارتی استفاده کرد.



شکل ۳. الف) تغییرات تنش شعاعی برحسب کرنش شعاعی در شعاع داخلی استوانه؛ ب) تغییرات تنش محیطی برحسب کرنش محیطی در شعاع داخلی استوانه.



شکل ۴. الف) تغییرات کرنش‌های شعاعی و محیطی؛ ب) برحسب شعاع استوانه در سیکل‌های مختلف.

## پانویس

1. Ratchetting
2. closest-point-projection
3. return mapping algorithm
4. normality rule
5. accumulated plastic strain
6. back stress increment tensor

## منابع

1. Lemaitre, J., and Chaboche, J.L. *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, (1990).
2. Chaboche, J.L. "Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity", *Int. J. Plasticity*, **5**, pp. 247-302 (1989).
3. Ohno, N. "Recent topics in constitutive modeling of cyclic plasticity and viscoplasticity", *Appl. Mech. Rev.* **43**, pp. 283-295 (1990).
4. Simo, J.C., and Taylor, R.L. "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **48**, pp. 101-118, (1985).
5. Wilkins, M.L. *Calculation of elastic-plastic flow methods of computational physics*, **3**, Academic Press, New York (1964).
6. Krieg, R.D., and Key, S.W. "Implementation of time independent plasticity theory into structural computer

programs, in: constitutive equations in viscoplasticity", *Computational and Engineering Aspects*, AMD-20, ASME, New York, pp. 125-138 (1986).

7. Simo, J.C. "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **22**, pp. 649-670 (1986).
8. Hopperstad, O.S., and Remseth, S., "A return mapping algorithm for a class of cyclic plasticity models", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **38**, pp. 549-564 (1995).
9. Hartmann, S.; Lührs, G., and Haupt, P. "An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **40**, pp. 991-1013 (1997).
10. Lubarda, V., and Benson, D. "On the numerical algorithm for isotropic kinematic hardening with the Armstrong-Fredrick evolution of the back stress", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **191**, pp. 3583-3596 (2002).
11. Nukala, P. V.V. "A return mapping algorithm for cyclic viscoplastic constitutive models", *Comput. Meth. Appl. Engrg.*, **195**, pp. 148-178 (2006).
12. Von Mises, R. "Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand" In: *Nachr. königl. Ges. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl.*, pp. 582-593 (1913).
13. Armstrong, P.J., and Fredrick, C.O. "A mathematical representation of multiaxial baushinger effect", C.E.G.B. Report RD/B/N, 731 (1966).