مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
دی ۱۳۸۸، شماره‌ی پنجاه و یکم، ص. ۵۹-۶۸

مدل‌سازی جریان در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

کریم گودرزی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
بهار فیروزآبادی (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار جریان دوفازی در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید پیاده‌سازی و حل شده است. با استفاده از تعریف فشار و سرعت کلی، معادلات جریان در محیط متخلخل به فرم ساده‌تری از لحاظ عددی تبدیل شده است. در این معادلات، معادله‌ی فشار و درجه‌ی اشباع نسبت به هم وابستگی کمی دارند ولی سرعت در معادله‌ی درجه‌ی اشباع مستقیماً ظاهر می‌شود. به‌همین دلیل برای رسیدن به جواب‌های قابل قبول باید سرعت با دقت خوبی محاسبه شود. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را با هم و به‌طور هم‌زمان حل می‌کند و از خطاهای ناشی از مشتق‌گیری عددی از میدان فشار برای رسیدن به میدان سرعت اجتناب می‌کند. بدین‌ترتیب میدان سرعت و فشار دقت یکسانی دارند. معادله‌ی درجه‌ی اشباع نیز از یک روش هیبریدی گسسته می‌شود. در این نوشتار میدان‌های یک‌بعدی و دوبعدی با استفاده از روش مذکور حل شده است. نتایج نشان داده است که جواب‌های به دست آمده از این روش، خصوصاً در شبکه‌ی درشت، نسبت به روش‌های دیگر ازجمله روش‌های اختلاف محدود و اجزاء محدود گلرکین به حل دقیق نزدیک‌تر است.

واژگان کلیدی: محیط متخلخل، اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، جریان دوفازی.

karim.goodarzi@gmail.com
firoozabadi@sharif.edu

مقدمه

شناخت جریان در محیط متخلخل برای مهندسین اهمیت زیادی دارد. ازجمله روش‌هایی که برای این کار پیشنهاد می‌شود، روش‌های آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی است. از آنجا که روش‌های آزمایشگاهی هزینه‌بر هستند، عمده‌ی رویکردها استفاده از روش‌های عددی است. شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل مشکلات خاصی دارد. در این محیط از معادله‌ی دارسی برای بیان حرکت سیال استفاده می‌شود. در این معادله ضریب نفوذپذیری نسبی تابعی از درجه‌ی اشباع سیال است که این خود باعث غیرخطی شدن معادلات می‌شود. همچنین معادلات در محیط متخلخل از نوع معادلات جابه‌جایی ـ پخشی بوده که جمله‌ی جابه‌جایی آن قوی‌تر است و این امر باعث افزایش اتلاف عددی[1] معادلات می‌شود؛ همچنین معادلات به‌شکل هذلولی بوده که جواب آن‌ها همراه با ناپیوستگی است. از طرف دیگر در بیشتر مسائل واقعی، محیط متخلخل محیطی ناهمگن است و این امر باعث تغییرات شدید مکانی می‌شود. روش‌هایی از نوع اجزاء محدود کلاسیک، هنگامی که محیط همگن باشد، جواب‌های نسبتاً خوبی ارائه می‌کنند. اما با وجود ناهمگنی در محیط، به‌طور مثال ناهمگنی در تخلخل یا نفوذپذیری، این روش‌ها نمی‌توانند ناپیوستگی‌ها را به‌خوبی مدل کرده و به این‌ترتیب جواب‌هایی که از این روش‌ها به دست می‌آیند دقت خوبی نخواهند داشت. برای غلبه بر این مشکل، روش‌هایی به‌شکل حجم کنترل بالادستی[2] ارائه شده‌اند، اگرچه در این روش‌ها نیز اتلاف عددی زیاد بوده و در نقاط ناپیوستگی دارای جواب‌های خوبی نیستند. در این روش‌ها ابتدا معادله‌ی فشار را حل، و سپس با مشتق‌گرفتن از میدان فشار میدان سرعت را به دست می‌آورند ــ مشتق عددی خود باعث به وجود آمدن خطاهای عددی زیادی می‌شود. بنابر این میدان سرعتی که از این روش به دست می‌آید دارای دقت قابل قبولی نخواهد بود. برای رفع این مشکل، روش اجزاء محدود ترکیبی[3] ارائه شد.[1] در روش اجزاء محدود ترکیبی میدان سرعت و فشار هم‌زمان حل می‌شود و میدان سرعتی که از این روش به دست می‌آید برای نفوذپذیری‌های همگن و ناهمگن دقت مناسبی دارد. دورلفسکی روش اجزاء محدود ترکیبی و حجم محدود را برای جریان تک‌فاز در محیط ناهمگن با هم مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که خطوط جریانی که از روش اجزاء محدود ترکیبی به دست می‌آید بسیار دقیق‌تر از روش حجم محدود است.[2] اما گسسته‌سازی معادلات به‌روش اجزاء محدود ترکیبی به دستگاهی از نوع مسائل زینی[4] منجر می‌شود که حل آن با استفاده از روش‌های استاندارد امکان‌پذیر نیست.[1] برای از بین بردن این مشکل مسعود و هیوز روشی ارائه کردند که در آن توابع وزنی و شکلی فشار و سرعت یکسان است.[3] این روش، دستگاه معادلات ضعیف را به دستگاه پایدار تبدیل می‌کند. روش دیگر استفاده از روش هیبرید است که توسط شاونت ارائه شد.[1] به‌وسیله‌ی این روش دستگاهی خوش‌رفتار نتیجه می‌شود که می‌توان آن را به‌راحتی با استفاده از روش‌های استاندارد حل کرد. نتایج به دست آمده

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۷/۷، داوری ۱۳۸۶/۱۲/۷، پذیرش ۱۳۸۸/۵/۳.

از این روش با روش اجزاء محدود کلاسیک برای هندسه‌های کاملاً ناهمگن مقایسه و نشان داده شد که خطوط جریانی که از روش هیبرید به دست آمده بسیار دقیق‌تر از روش اجزاء محدود کلاسیک است.[۴] روش اجزاء محدود ترکیبی اولین‌بار توسط شاونت و همکاران برای جریان دوفاز در محیط متخلخل مورد مطالعه قرار گرفت.[۵] پس از آن بود که شاونت روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید[۵] را ارائه کرد.[۱]

معادلات حاکم بر جریان چندفازی در محیط متخلخل مشتمل است بر قانون دارسی تعمیم‌یافته، قانون بقای جرم برای هریک از فازها، و دو رابطه نیز برای فشار موئینگی و نفوذپذیری نسبی. این معادلات شدیداً به یکدیگر وابسته‌اند و حل آن‌ها با روش‌های عددی مرسوم مشکل است، و لذا آن‌ها را با تبدیلات خاصی به معادلاتی با وابستگی کم‌تر و همچنین فرم ریاضی قابل قبول‌تر تبدیل می‌کنند. لازم به ذکر است که معادلاتی که به این روش به وجود می‌آید معادلات گذرا و میانی بوده و فعلاً معنای خاص فیزیکی برای آن‌ها پیدا نشده است. یکی از این گروه معادلات با استفاده از تعریف فشار کلی به دست می‌آید. در این فرم، معادله‌ی درجه اشباع به‌وسیله‌ی سرعت به معادله‌ی فشار ربط پیدا می‌کند، ولی فشار مستقیماً در معادله‌ی درجه اشباع ظاهر نمی‌شود. همچنین در این معادله سرعت به‌صورت صریح نمایان است و بدین‌ترتیب معادله‌ی درجه اشباع شدیداً به سرعت وابسته است؛ لذا محاسبه‌ی دقیق میدان سرعت در یافتن جواب مسئله از اهمیت‌به‌سزایی برخوردار است. بدین‌ترتیب باید به‌دنبال روشی بود که میدان سرعت و فشار را به‌صورت هم‌زمان حل، و بقای موضعی و کلی را حفظ کند. از طرف دیگر معادله‌ی درجه اشباع یک معادله‌ی گذرای جابه‌جایی ـ پخشی است که در اغلب مسائل ازجمله جابه‌جایی غالب است. دقت حل این معادله نیز در حل زمانی اهمیت زیادی دارد.

در این نوشتار از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید برای حل معادلات جریان دو فاز در محیط متخلخل استفاده شده است. در معادله‌ی فشار به جای درجه اشباع از درجه اشباع زمان قبل استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب معادله‌ی فشار به‌صورت ضمنی و درجه اشباع به‌صورت صریح حل می‌شود. به‌دلیل این که فشار براثر تغییر درجه اشباع تغییرات ناچیزی دارد، حل معادله‌ی فشار به‌صورت ضمنی توجیه‌پذیر می‌شود. به‌این ترتیب ابتدا معادله‌ی دارسی حل می‌شود و سپس با به دست آوردن مقدار فشار و سرعت، این مقادیر به‌صورت صریح در معادله‌ی درجه اشباع قرار گرفته و درجه اشباع مشخص می‌شود.

معادلات حاکم

در این تحقیق سیال را به‌صورت دوفازی (نفت و آب)، غیر امتزاجی، و غیر قابل تراکم در نظرگرفته‌ایم. معادلات حرکت سیال در محیط متخلخل شامل معادلات بقای جرم و اندازه‌حرکت هستند. از آن‌جا که استفاده از این اصول در محیط متخلخل با همان شکل عمومی امکان‌پذیر نیست، در محیط متخلخل معمولاً از روابط نیمه‌تجربی استفاده می‌شود؛ مثلاً چون سیال در محیط متخلخل با سرعت کمی جریان می‌یابد به‌جای معادله‌ی بقای اندازه‌حرکت از معادله‌ی نیمه‌تجربی دارسی استفاده می‌شود.

قانون بقای جرم

معادله‌ی بقای جرم در محیط متخلخل عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)+\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right)=q \qquad (۱)$$

که در آن φ ضریب تخلخل، q چشمه یا چاه و ρ چگالی است. وقتی از واژه‌ی امتزاج‌ناپذیر استفاده می‌شود منظور این است که هیچ انتقال جرمی بین دو فاز وجود ندارد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که قانون بقای جرم، برای هر فاز در محیط متخلخل مطابق رابطه‌ی ۲ قابل بیان است:[۶]

$$\frac{\partial(\varphi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t}+\nabla.(\rho_\alpha \vec{u}_\alpha)=q_\alpha \qquad \alpha=w,n, \qquad (۲)$$

که در آن w علامت فاز ترکننده، n علامت فاز غیر ترکننده، S_α درجه‌ی اشباع هر فاز و u_α سرعت همان فاز است.

قانون دارسی

دارسی رابطه‌ی بین نرخ جریان و عامل به‌وجودآورنده‌ی آن را در سال ۱۸۵۶ ارائه کرد که به «قانون دارسی» مشهور است.[۷] با در نظر گرفتن اثرات گرانش، قانون دارسی در حالت کلی (یک، دو، یا سه‌بعدی) برای سیال تک‌فاز چنین است:[۸]

$$\vec{u}=\frac{-k}{\mu}(\nabla P-\rho g\nabla D) \qquad (۳)$$

که در آن ∇P تغییرات فشار، μ لزجت سیال، k نفوذپذیری ماده‌ی متخلخل، g شتاب گرانش و D معرف عمق (تابع دلخواهی از سیستم مختصات) است. در حالتی که بیش از یک فاز در محیط حضور داشته باشد، با اندک اصلاحی می‌توان از قانون تعمیم‌یافته‌ی دارسی استفاده کرد:[۶]

$$\vec{u}_\alpha=\frac{-kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha}(\nabla P_\alpha-\rho_\alpha g\nabla D) \qquad (۴)$$

که در آن $k_{r\alpha}$ نفوذپذیری نسبی برای فاز α بوده و تابعی از درجه اشباع این فاز در نقطه‌ی مورد نظر S_α است.

برای هر فاز در محیط متخلخل معادله‌ی ۳ و ۴ برقرار است. هدف در این نوشتار، حل جریان دوفازی غیرقابل امتزاج و تراکم‌ناپذیر است. معادله‌ی ۲ برای دو فاز w و n مطابق رابطه‌ی ۵ بازنویسی می‌شود:[۶]

$$\frac{\partial(\varphi\rho_n S_n)}{\partial t}+\nabla.\left(\frac{-kk_{rn}}{\mu_n}(\nabla P_n-\rho_n g\nabla D)\right)=q_n \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial(\varphi\rho_w S_w)}{\partial t}+\nabla.\left(\frac{-kk_{rw}}{\mu_w}(\nabla P_w-\rho_w g\nabla D)\right)=q_w \qquad (۶)$$

با حل دو معادله‌ی ۵ و ۶ یک جریان دوفاز در محیط متخلخل به‌طورکامل مشخص می‌شود. مجهولات مسئله عبارت‌اند از: S_n, S_w, P_n, P_w. بدین‌ترتیب برای حل معادلات فوق باید دو معادله‌ی کمکی به دست آورد. برای درجه اشباع‌ها می‌توان نوشت:

$$S_w+S_n=۱ \qquad (۷)$$

از طرفی فشار موئینگی P_c را می‌توان طبق رابطه‌ی ۸ بیان کرد:

$$P_n-P_w=P_c \qquad (۸)$$

در متون فنی روابطی برای فشار موئینگی برحسب درجه اشباع ارائه شده است. با استفاده از این روابط می‌توان دستگاه معادلات را کامل کرد. بدین‌ترتیب با توجه به معادلات کمکی، به صورت دستگاه معادلات (۵ ــ ۸) بسته می‌شود و به دستگاه معادلاتی با چهارمعادله و چهار مجهول تبدیل می‌شود.

چنان که مشاهده می‌شود این دستگاه معادلات دستگاهی کامل است که با داشتن مقدار تخلخل و مقادیر چشمه‌های دوفاز، ضریب لزجت، توابع فشار مویینگی و ضریب نفوذپذیری نسبی دو فاز، و نیز مقدار ضریب نفوذپذیری سنگ مخزن به‌طورکامل قابل حل است. با کمی دقت مشخص می‌شود که معادلات این دستگاه به‌شدت به هم وابسته‌اند و همین امر باعث سخت‌شدن حل این دستگاه می‌شود، به‌طوری که ممکن است حل آنها با استفاده از روش‌های عددی مرسوم مشکل باشد. برای حل این دستگاه باید این وابستگی را از بین برد و معادلات را به‌شکل قابل قبول‌تری از لحاظ ریاضی نوشت. برای این کار از تعریف فشارکلی[۶] و سرعت کلی[۷] استفاده شده است.[۷]

قبل از تبدیل این معادلات به فرم قابل قبول، فشار مویینگی را چنین تعریف کرده‌اند:[۲]

$$P_c = P_{CM}(x)p_c(S) \qquad (۹)$$

ضریب $P_{CM}(x) \geq ۰$ بیشترین مقدار فشار مویینگی در یک نقطه‌ی خاص است، و $p_c(S)$ تابعی بدون بعد است که ویژگی‌های آن در قالب روابط ۱۰ و ۱۱ آمده است:[۸]

$$۰ \leq p_c(S) \leq ۱ \qquad (۱۰)$$

$$p_c(S_c) = ۰ \qquad (۱۱)$$

S_c درجه اشباعی است که مقدار p_c در آن صفر است. برای رسیدن به معادلات قابل قبول، ابتدا دو معادله‌ی ۵ و ۶ را با هم جمع می‌کنند. با در نظرگرفتن دوفاز به‌صورت غیر قابل تراکم، معادله‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$\vec{\nabla}.(\vec{u}_w + \vec{u}_n) = ۰ \qquad (۱۲)$$

اکنون قابلیت حرکت[۸] یک فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \qquad i = n, w \qquad (۱۳)$$

برای رسیدن به فشارکلی توابع ۱۴ و ۱۵ تعریف می‌شوند:[۸]

$$\gamma = \int_{S_c}^{S} \left(f_w - \frac{۱}{۲}\right) \frac{dP_c}{dS} ds \qquad (۱۴)$$

$$\gamma_۱ = \int_{S_c}^{S} \frac{df_w}{dS} p_c ds \qquad (۱۵)$$

در این روابط $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w+\lambda_n}$ و $f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_w+\lambda_n}$ و فشار مویینگی در درجه‌اشباع S_c برابر صفر است. نهایتاً فشارکلی مطابق رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:[۸]

$$P = \frac{۱}{۲}(P_w + P_n) + \gamma P_{CM} \qquad (۱۶)$$

با گرادیان گرفتن از طرفین معادله‌ی ۱۶ و با انجام عملیات جبری نتیجه می‌شود که:[۸]

$$\vec{u} = \vec{u}_n + \vec{u}_w = -\lambda \overleftrightarrow{K}.(\vec{\nabla}P + \gamma_۱\vec{\nabla}P_{CM} - \gamma_۲\vec{\nabla}gz) \qquad (۱۷)$$

که در آن $\vec{u}$ سرعت کلی است و $\gamma_۲$ نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\gamma_۲ = \rho_w f_w + \rho_n f_n \qquad (۱۸)$$

بدین‌ترتیب معادله‌ی درجه اشباع عبارت خواهد بود از:[۸]

$$\varphi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS}\vec{u}.\vec{\nabla}S_w - \frac{d}{dS}(\lambda f_w f_n)\left(\vec{K}.\vec{\nabla}\vec{P}_{CM}\right).\vec{\nabla}S_w - \vec{\nabla}.\left\{\lambda f_w f_n \vec{K}.\left[P_{CM}\frac{dp_c}{dS} - \vec{\nabla}((\rho_w - \rho_n)gz)\right]\right\} = (\lambda f_w f_n p_c)\vec{\nabla}.(\vec{K}.\vec{\nabla}\vec{P}_{CM}) \qquad (۱۹)$$

حال اگر فشار مویینگی مستقل از مکان باشد، می‌توان نوشت:[۸]

$$\vec{u} = -\lambda\overleftrightarrow{K}.(\vec{\nabla}P - (\rho_w f_w + \rho_n f)\vec{\nabla}gz) \qquad (۲۰)$$

و لذا:

$$\vec{\nabla}.(\vec{u}_w + \vec{u}_n) = ۰ \qquad (۲۱)$$

$$\varphi\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS}\vec{u}.\vec{\nabla}S_w - \vec{\nabla}.\left\{\lambda f_w f_n \vec{K}.\left[\frac{dp_c}{dS}\vec{\nabla}S_w - \vec{\nabla}((\rho_w - \rho_n)gz\right]\right\} = ۰ \qquad (۲۲)$$

بدین‌ترتیب با کمک عملیات ریاضی فوق دستگاه معادلاتی به دست آمده است که معادلات آن وابستگی ضعیف‌تری به هم دارند. در دستگاه قبلی مجهولات یک معادله در دیگری ظاهر می‌شد در حالی که معادلات فشارکلی (معادله‌ی ۲۰) و درجه اشباع (معادله‌ی ۲۲) فقط از طریق ضرایب به هم وابسته‌اند. معادله‌ی فشارکلی از دسته معادلات بیضی است و معادله‌ی درجه اشباع معادله‌یی از نوع جابه‌جایی ـ پخشی است و بسته به فشار مویینگی می‌تواند رفتاری کاملاً پخشی یا کاملاً جابه‌جایی داشته باشد. هنگامی که درجه اشباع کاهش می‌یابد فشار مویینگی قابل اغماض است که منجر به تبدیل معادله‌ی درجه اشباع به یک معادله‌ی جابه‌جایی می‌شود. با به‌کار بردن رابطه‌یی برای فشار مویینگی و همچنین رابطه‌یی برای ضریب نفوذپذیری نسبی می‌توان دستگاه معادلات فوق را برحسب مجهولات فشارکلی، سرعت کلی، و درجه اشباع فاز ترکننده حل کرد.

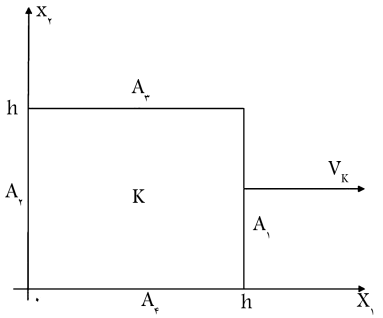
گسسته‌سازی معادلات

معادلات ریاضی حاکم بر رفتار جریان در محیط متخلخل بسیار پیچیده‌اند و جز در حالت‌های بسیار خاص به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند. به‌همین دلیل برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده شده است. از جمله روش‌های عددی که برای حل این معادلات استفاده می‌شود روش اجزاء محدود ترکیبی است.

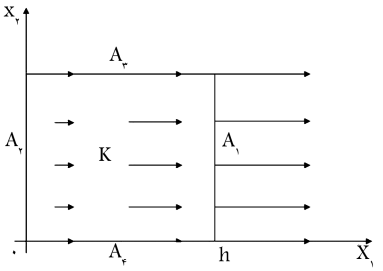
در این بخش گسسته‌سازی معادلات محیط متخلخل به‌روش اجزاء محدود ترکیبی و اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به‌تفصیل آورده شده است. در گسسته‌سازی معادلات از فضای توماس ـ راویارت استفاده می‌شود.[۱] لذا ابتدا به معرفی فضای توماس ـ راویارت پرداخته و در ادامه، معادله‌ی دارسی به‌وسیله‌ی اجزاء محدود ترکیبی گسسته‌شده و نحوه‌ی گسسته‌کردن معادله‌ی بقای جرم ذکر می‌شود.

فضای توماس ـ راویارت در یک المان

ابتدا برای سادگی یک المان مستطیلی در نظر گرفته شده است (شکل ۱). برای این المان، بردار عمود v_k و چهار ضلع A_i و همچنین چهار میدان برداری



شکل ۱. شکل یک المان و طریقه‌ی شماره‌گذاری اضلاع آن و بردار نرمال المان.



شکل ۲. نمونه‌ی میدان برداری.

$\vec{w}_i \ \ (i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ چنین تعریف می‌شود:[۱]

$$\vec{w}_۱(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_۱}{h^۲} \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \vec{w}_۲(x) = \begin{bmatrix} \frac{(x_۱ - h)}{h^۲} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_۳(x) = \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{x_۲}{h^۲} \end{bmatrix} \qquad \vec{w}_۴(x) = \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{(x_۲ - h)}{h^۲} \end{bmatrix}$$

برای نمونه میدان برداری $w_۱$ در شکل ۲ نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود این میدان در هر نقطه موازی محور $x_۱$ است، بر روی ضلع $A_۲$ مقدار صفر می‌گیرد، و بر روی ضلع $A_۱$ مقدار ثابت $(\frac{۱}{h}, ۰)$ به آن اختصاص می‌یابد. میدان‌های برداری دیگر نیز مانند میدان برداری $w_۱$ هستند که با چرخش و انتقال می‌توان آن‌ها را به دست آورد.

این چهار بردار مستقل خطی‌اند. می‌توان ثابت کرد که این میدان‌های برداری برای هر j (که $j = ۱, ۲, ۳, ۴$) دارای خواص زیر هستند:

۱. $\vec{\nabla}.\vec{w}_j$ بر روی المان K ثابت است و $\int_k \vec{\nabla}.\vec{w}_j(x) = ۱$؛

۲. برای هر i $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ می‌توان نوشت $\vec{w}_j(x).\vec{v}_k$ بر روی ضلع A_i ثابت است و $\int_{A_i} \vec{w}_j(x).\vec{v}_k = \delta_{ij}$.

این خاصیت‌ها بدان معناست که میدان برداری $\vec{w}_j$ دارای شار عبوری به‌اندازه‌ی ۱ از A_j و صفر از دیگر اضلاع است. دیده می‌شود که فضای توماس ـ راویارت، فضای چهاربعدی $\vec{X}_K$ است که به‌وسیله‌ی $\vec{w}_i \ \ (i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ بر روی المان K تولید شده است. بدین‌ترتیب هر بردار $\vec{q} \in \vec{X}_K$ را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای این فضا نوشت:

$$\vec{q}(x) = \sum_{j=۱}^{۴} Q_{K,j}\vec{w}_j(x) \qquad (۲۳)$$

از خاصیت ۱ می‌توان انتظار داشت که:

$$\int_K \vec{\nabla}.\vec{q} = \sum_{j=۱}^{۴} Q_{K,j} \qquad (۲۴)$$

و از خاصیت ۲ می‌توان شار عبوری $\vec{q}$ از ضلع $A_i \ \ (i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ را مطابق رابطه‌ی ۲۵ به دست آورد:

$$\int_K \vec{q}.\vec{v}_K = Q_{K,j} \qquad (۲۵)$$

بدین‌ترتیب هر میدان برداری $\vec{q} \in \vec{X}_K$ به‌طورکامل و با تعیین $Q_{K,j}$ معین می‌شود؛ $Q_{K,j}$ شار عبوری $\vec{q}$ از ضلع $A_i \ \ (i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ است. از ضرب برداریِ میدان‌های برداریِ فوق رابطه‌ی ۲۶ حاصل می‌شود:

$$A_{ij} = \int_k \vec{w}_j(x)\vec{w}_i(x) \qquad (۲۶)$$

بدین‌ترتیب ماتریس A_K برای المان K عبارت خواهد بود از:

$$A_K = [A_{ij}] = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

و معکوس آن نیز چنین است:

$$A_K^{-۱} = ۲\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

تقریب یک تابع و گرادیان آن به‌وسیله‌ی اجزاء محدود

ابتدا دامنه‌ی حل Ω را به‌صورت دلخواه و یک تابع α به‌صورت زیر، همچنین نمادهای زیر در نظرگرفته می‌شود:

$$\alpha : \Omega \rightarrow R^+$$

$\Im_h$= مجموعه اجزاء K η_h = مجموعه اضلاع اجزاء A

ξ_h= مجموعه گوشه‌های اجزاء M

در این نوشتار توابع اسکالر (مانند فشار) در یک المان به‌صورت مقداری ثابت تقریب زده می‌شوند. حال تابع اسکالر $a(x)$ را در نظر بگیرید، تقریب این تابع در المان K برابر a_k است. برای هر المان K تابع فشار P و تابع سرعت $\vec{q}$ را چنین تقریب می‌زنیم:

P_K= تقریب متوسط فشار در هر المان K

$TP_{K.i}$= تقریب متوسط فشار در ضلع A_i

$\vec{q}_K$= تقریب سرعت در المان K

از سوی دیگر، معلوم شد که مقدار $\vec{q}_K$، هنگامی‌که شار عبوری آن از هر ضلع المان معلوم باشد، کاملاً معلوم است. بنابراین فشار و سرعت یک المان، هنگامی که

مجهولات زیر در المان مشخص شده باشند، به‌طورکامل معین است:

$$\begin{cases} P_k \in R \\ TR_{K,j} \in R \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \\ Q_{K,j} \in R \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴ \end{cases} \tag{۲۷}$$

اگر این ۹ مجهول در یک المان تعیین شوند، می‌توان گفت که حل جریان در المان کامل شده است. از طرفی این مجهولات از هم مستقل نیستند و توسط رابطه‌ی دارسی به هم ربط دارند:

$$\vec{q} = -a\nabla P \tag{۲۸}$$

چنان که دیده می‌شود در رابطه‌ی ۲۸ اثرات گرانش زمین در نظرگرفته نشده است و a معرف نفوذپذیری است. فرم تغییراتی[9] معادله‌ی ۲۸ چنین است:

$$A_K Q_k = a_K \left(P_K DIV_K^T - TP_K \right) \tag{۲۹}$$

که در آن ماتریس A_K به‌وسیله‌ی ماتریس‌های قبل تعریف شد، و ماتریس‌های دیگر معادله نیز چنین تعریف می‌شود:

$$DIV_K^T = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} Q_{K,۱} \\ Q_{K,۲} \\ Q_{K,۳} \\ Q_{K,۴} \end{bmatrix} \quad TP_K = \begin{bmatrix} TP_{K,۱} \\ TP_{K,۲} \\ TP_{K,۳} \\ TP_{K,۴} \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله‌ی ۲۹ و با داشتن مقدار a_K, P_K در المان مورد نظر و مقادیر TP_K بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{K,i}$ و به‌تبع آن $\vec{q}_K$ قابل محاسبه است. حال دو المان K و K' را مطابق آنچه که در شکل ۳ آورده شده در نظر بگیرید. این دو المان در یک ضلع با هم اشتراک دارند، و لذا برای توابع TP_h و $\vec{q}_h$ داریم:

$$TP_{K.A} = TP_{K',A}$$
$$Q_{K,A} + Q_{K',A} = ۰ \tag{۳۰}$$

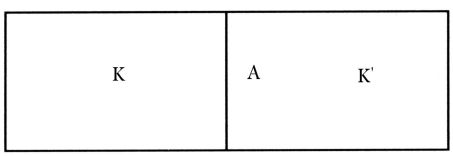
تقریب معادله‌ی پیوستگی به‌روش اجزاء محدود

برای تقریب معادله‌ی پیوستگی به‌روش اجزاء محدود ابتدا معادله‌ی ۳۱ را در نظر گرفته‌ایم:

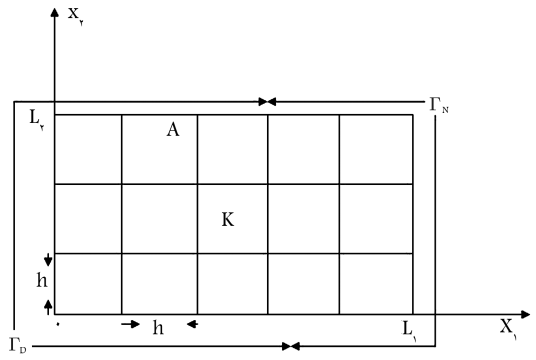
$$\nabla.\vec{q} = f(x) \quad on \quad K \tag{۳۱}$$

سپس آن را در یک تابع آزمون ($v \in \vec{X}$) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال می‌گیریم. بدین‌ترتیب به فرم تغییراتی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{A=\partial K} Q_{K,A} = F_K \tag{۳۲}$$



شکل ۳. دو المان در داخل میدان حل.



شکل ۴. نمونه میدان حل و شرایط مرزی اعمال شده.

که در آن F_K مقدار تقریبی $\int_k f(x)dx$، $|K|$ مساحت المان، و ∂K مرزهای المان است. معادله‌ی پیوستگی ۳۲ به فرم ماتریس عبارت است از:

$$DIV_K Q_k = F_k \tag{۳۳}$$

برای اعمال شرایط مرزی شکل ۴ به‌عنوان نمونه آورده شده است. بر روی مرز Γ_D و Γ_N شرایط مرزی از نوع فشاری و شار ثابت است:

$$TP_{K,A} = P_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma_D$$
$$Q_{K,A} = Q_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma \tag{۳۴}$$

بدین‌ترتیب به یک دستگاه‌کامل دست پیدا می‌کنیم که مجهولات آن $P_K, TP_{K,A}, Q_A$ است. حال اگر مجهولات مسئله را $TP_{K,A}$ در نظرگرفته و P_K, Q_A را برحسب $TP_{K,A}$ به دست آوریم به تقریب اجزاء محدود ترکیبی هیبرید می‌رسیم.

فرمولاسیون اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

چنان که گفته شد مجهولات اصلی مسئله، فشار TP_K بر روی هر ضلع در نظرگرفته شده است. بعد از عملیات ریاضی و تعیین P_K, Q_A برحسب $TP_{k,A}$ دستگاه معادلات ۳۵ حاصل می‌شود:[۱]

$$\left(M^{MH} - N^{MH} \right) TP = F^{MH} - G^{MH} \tag{۳۵}$$

که در آن

$$M_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K A_{K,A,A'}^{-۱} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \tag{۳۶}$$

$$N_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K v_{K,A,A'} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \tag{۳۷}$$

$$F_A^{MH} = \sum_{A \subset K} \frac{\alpha_{K,A}}{\alpha_K} F_K \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \tag{۳۸}$$

$$G_A^{MH} = \begin{cases} ۰ & if\ A\ is\ interior \\ Q_{e,A} & if\ A \subset \Gamma_N \end{cases} \tag{۳۹}$$

$$v_{K,A,A'} = \frac{\alpha_{K,A}\alpha_{K,A}}{\alpha_K} \quad (۴۰)$$

$$\alpha_{K,A} = \sum_{A\subset\partial K} A^{-1}_{K,A,A'}$$

$$\alpha_K = \sum_{A\subset\partial K} \alpha_{K,A} \quad (۴۱)$$

در معادلات بالا، بالانویس MH معرف اجزاء محدود ترکیبی هیبرید است. می‌توان ثابت کرد که دستگاه فوق دارای یک جواب است و ماتریس $\left(M^{MH} - N^{MH}\right)$ متقارن و مثبت معین است.[۹] در این ماتریس بلوک صفر روی قطر اصلی وجود ندارد، به‌همین دلیل ماتریس از نوع مسائل زینی نیست و می‌توان از روش‌های استاندارد آن را معکوس کرد. با حل این دستگاه TP_Kها روی هر ضلع به دست می‌آیند و از روی آن‌ها P_K, Q_A حاصل می‌شود.

گسسته‌سازی معادله‌ی درجه اشباع

q_s مطابق معادله‌ی ۴۲ تعریف می‌شود:

$$q_s = \nabla S \quad (۴۲)$$

فرم تغییراتی این معادله عبارت است از:

$$A_K Q_{SK} = \left(S_K DIV_K^T - TS_K\right) \quad (۴۳)$$

که در آن ماتریس‌ها همانند ماتریس‌های تعریف‌شده‌ی قبلی‌اند. با توجه به معادله‌ی ۴۳ و با داشتن مقدار S_K در المان مورد نظر و مقادیر TS_K بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{SK,i}$ و به‌تبع آن q_s قابل محاسبه است. باتوجه به شکل ۳ این دو المان در یک ضلع با هم مشترک‌اند. برای توابع TS_h و q_s داریم:

$$TS_{K.A} = TS_{K',A}$$

$$Q_{SK,A} + Q_{SK',A} = ۰ \quad (۴۴)$$

می‌توان معادله‌ی درجه اشباع را چنین نوشت:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{df_w}{dS}\vec{u}.\nabla S - \vec{\nabla}.\left\{\lambda f_w f_n \overleftrightarrow{K}.\left[\frac{dp_C}{dS}\vec{\nabla}S\right]\right\} = ۰ \quad (۴۵)$$

حال معادله‌ی ۴۵ را در یک تابع آزمون (χ_k) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\begin{cases}\chi_k = ۱ & in\ K\\ \chi_k = ۰ & else\ where\end{cases} \quad (۴۶)$$

در نتیجه:

$$|K|\varphi\frac{S_k^n - S_k^{n-1}}{\Delta t} + \sigma_E\sum Q_s +$$
$$\frac{df}{dc}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{6}Q_2\right)Q_{s1} + \left(-\frac{1}{6}Q_1 + \frac{1}{3}Q_2\right)Q_{s2} +\\ \left(\frac{1}{3}Q_3 - \frac{1}{6}Q_4\right)Q_{s3} + \left(-\frac{1}{6}Q_3 + \frac{1}{3}Q_4\right)Q_{s4}\end{bmatrix} = ۰ \quad (۴۷)$$

در این معادله اندیس‌های ۱ تا ۴ مطابق تعاریف شکل ۱ است؛ در معادله‌ی ۴۷ نیز σ_E چنین به‌دست می‌آید:

$$\sigma(S_w) = -\lambda f_w f_n \vec{K}\frac{dp_c}{dS} \quad (۴۸)$$

$$\sigma_E\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\sigma(TS_{A_j}) \quad (۴۹)$$

حال با تعیین مقادیر $Q_{SK,A}$ از معادله‌ی ۴۳ و قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی ۴۴ به معادله‌یی برحسب TS و S خواهیم رسید. همچنین S را از معادله‌ی ۴۵ برحسب TS به دست می‌آوریم و در معادله‌ی قبلی جایگذاری می‌کنیم. بدین‌ترتیب به دستگاه معادلاتی برحسب TS خواهیم رسید. با حل این دستگاه مقدار درجه اشباع در روی سطوح المان‌ها و به‌تبع آن مقدار درجه اشباع در مرکز المان‌ها به دست می‌آید. دیده می‌شود که ابتدا معادلات سرعت و فشار حل شده و با جایگزینی مقادیر سرعت در معادله‌ی درجه اشباع مقدار درجه اشباع در زمان بعدی به دست می‌آید. باید توجه داشت که جواب‌های به دست آمده به دقیق‌بودن سرعت وابسته است. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را هم‌زمان حل می‌کند و دارای دقت بالایی است؛ از این رو درجه اشباع‌های به دست آمده دارای دقت قابل قبولی خواهند بود. در ادامه خواهیم دید که این ویژگی باعث می‌شود جواب‌های این روش از روش‌های اجزاء محدود استاندارد به‌مراتب دقیق‌تر باشد.

در این معادلات برای به دست‌آوردن مقادیر نفوذپذیری نسبی از مدل تد[۱۰] استفاده شده است:[۱]

$$k_{rw}(S_w) = S_w^2 \ , \quad k_{rn}(S_w) = (1 - S_w)^2 \quad (۵۰)$$

اعتباربخشی به روش حاضر به‌وسیله‌ی حل معادله‌ی باکلی ـ لورت[۱۱]

ابتدا با حل جریان در یک محیط متخلخل با نفوذپذیری همگن، کارآیی روش هیبرید نشان داده شده است. معادله‌ی باکلی ـ لورت معادله‌ی درجه اشباع یک‌بعدی بدون در نظرگرفتن اثر فشار مویینگی است. می‌توان این معادله را به‌دقت حل کرد و از آن به‌عنوان معیاری برای مقایسه‌ی کارآیی روش‌ها با هم استفاده کرد. قبل از ارائه‌ی نتایج، کمیت‌های بی‌بعد مکان، زمان و درجه اشباع مطابق معادله‌های ۵۱ تا ۵۳ تعریف می‌شوند:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (۵۱)$$

$$t_D = \frac{u_t}{(1 - S_{or} - S_{wr})\varphi L}t \quad (۵۲)$$

$$S = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{or} - S_{wr}} \quad (۵۳)$$

در این معادلات S_{wr} و S_{or} به‌ترتیب درجه اشباع مانده‌ی آب و نفت هستند. معادله‌ی باکلی ـ لورت عبارت است از:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\varphi}\frac{\partial f_w(S_w)}{\partial x} = ۰ \quad (۵۴)$$

در این بخش لزجت نفت (μ_o) ۴ برابر لزجت آب (μ_w) فرض شده است. برای بررسی کارآیی روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، علاوه بر مقایسه‌ی نتایج با روش تحلیلی، آن را با روش‌های اختلاف محدود بالادست، لکس فردریچ[۱۲] و لکس واندروف[۱۳] مقایسه کرده‌ایم. اگر معادله‌ی ۵۴ را به‌روش بالادست گسسته کنیم خواهیم داشت:

$$S_i^n = S_i^{n-1} + \frac{u\Delta t}{\varphi\Delta x}\left(f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \quad (۵۵)$$

و اگر به روش مرتبه اول لکس فردریچ گسسته شود، داریم:[۱۰]

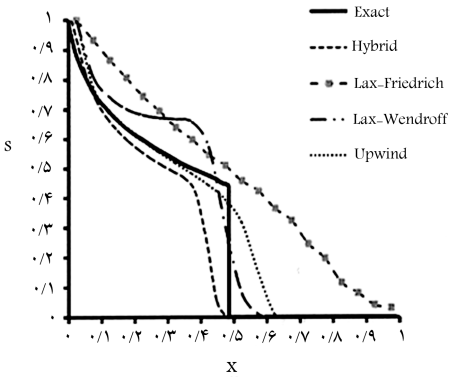
$$S_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(S_{i+1}^2 + S_{i-1}^2\right) - \frac{u\Delta t}{2\varphi\Delta x}\left(f_{i+1}^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \qquad (۵۶)$$

و نیز اگر به روش مرتبه دوم لکس واندروف گسسته شود خواهیم داشت:[۱۱]

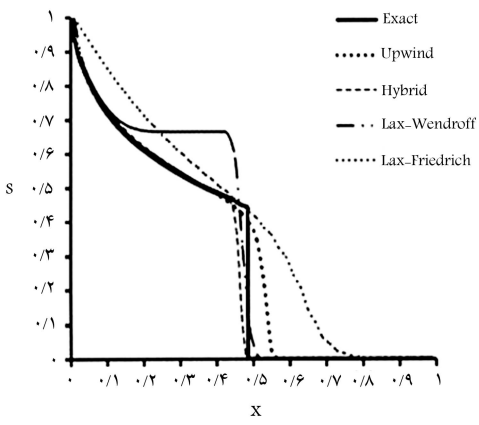
$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{u\Delta t}{2\varphi\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \frac{u\Delta t^2}{2\varphi\Delta x^2}$$
$$\left[a_{i+\frac{1}{2}}\left(f_{i+1}^n - f_i^n\right) - a_{i-\frac{1}{2}}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right)\right] \qquad (۵۷)$$

که در آن $a = \frac{\partial f}{\partial S}$. در ادامه، نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش‌ها برای حل معادله‌ی باکلی ـ لورت با هم مقایسه شده‌اند. این نتایج برای زمان بی‌بعد شده ۰٫۳ و سه نوع اندازه شبکه‌ی ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ در دامنه یک‌بعدی هستند.

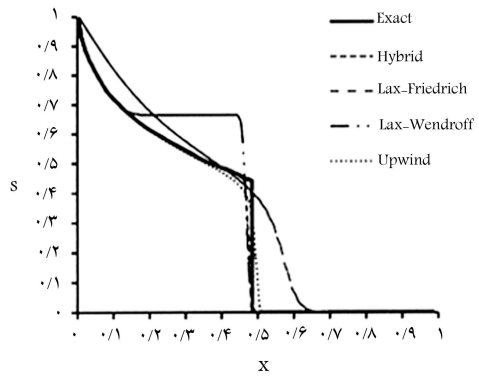
با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش مرتبه اول لکس فردریچ از دقت کمی برخوردار است و در نقاط هموار به‌دلیل اتلاف عددی، جواب‌ها خطای زیادی دارند. همچنین این روش در مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی ضعیف عمل می‌کند (شکل‌های ۵ تا ۷). شیوه‌ی عمل این روش آن است که برای رسیدن به جواب قابل قبول باید دامنه را به ۲۰۰۰ قسمت تقسیم کرد که زمان محاسباتی بالایی را شامل می‌شود. روش مرتبه دوم لکس واندروف دقت خوبی در مکان‌یابی محل شوک دارد و همچنین در نقاط هموار جواب‌ها از دقت بالایی برخوردارند ولی در نزدیکی محل شوک به‌دلیل پخش عددی[۱۴] بالا دارای خطای زیادی است. دیده می‌شود که حتی با اضافه‌کردن تعداد شبکه این پخش عددی از بین نمی‌رود. در روش بالادست نیز هدردهی عددی زیاد است ولی با اضافه‌کردن تعداد شبکه این هدردهی



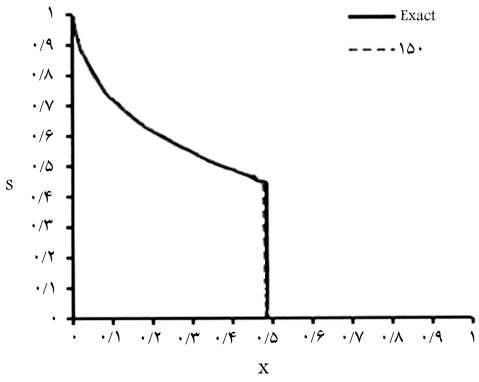
شکل ۵. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۲۰.



شکل ۶. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۵۰.



شکل ۷. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۱۰۰.



شکل ۸. نتایج حاصله از روش هیبرید برای تعداد شبکه ۱۵۰.

مطابق انتظار بهبود می‌یابد، به‌طوری که مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی دقیق‌تر شده ولی در نقاط نزدیک به نقطه‌ی ناپیوستگی جواب‌های حاصله از خطاهای زیادی برخوردارند. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش هیبرید نشان می‌دهد که این روش در تشخیص نقطه‌ی ناپیوستگی بسیار قوی است و با اضافه‌کردن تعداد شبکه خطاها به سرعت به سمت صفر میل می‌کنند. همان‌طورکه در شکل ۸ نشان داده شده است با تعداد شبکه‌ی ۱۵۰، به حل تقریباً دقیق خواهیم رسید.

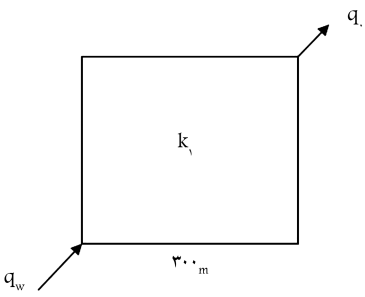
مثال عددی دوبعدی و محیط همگن

مثال عددی دوم میدان جریانی دوبعدی است که به «پنج‌نقطه[۱۵]» مشهور بوده و در شکل ۹ نشان داده شده است. ابعاد این میدان $۳۰۰m * ۳۰۰m$ است و ضریب نفوذپذیری و تخلخل این محیط برابر $K = ۱۰^{-۷}m^۲$ و $\varphi = ۰٫۲$ است. یادآور می‌شود که خصوصیات این محیط به‌صورت همگن در نظرگرفته شده است. چگالی آب و نفت برابر $۱۰۰۰\ kg/m^۳$ و لزجت آب برابر $۰/۰۰۱\ kg/(ms)$ و لزجت نفت ۴ برابر آن در نظرگرفته شده است. شرایط مرزی در مرز تزریق (نقطه‌ی ۰،۰) عبارت است از:

$$P_n = ۲٫۱۰^۵[Pa]\ ,\quad q_w = ۰٫۱۲[kg/s] \qquad (۵۸)$$

شرایط مرزی در مرز تولید (نقطه‌ی ۳۰۰،۳۰۰) نیز عبارت است از:

$$S_w = ۰٫۰\ ,\quad q_n = -۰٫۱۲[kg/s] \qquad (۵۹)$$



شکل ۹. مثال عددی دوبعدی با یک ورودی و یک خروجی.

اندیس n معرف فاز نفت (فاز غیر ترکننده) و اندیس w معرف فاز آب (فاز ترکننده) است. شرایط اولیه به‌صورت $S_w = ۰/۰۱$ و گام زمانی یک روز در نظرگرفته شده است؛ این محاسبات برای مدت زمان ۴۰۰ روز انجام شده است. در ادامه، نتایج به دست آمده از مدل‌سازی این دامنه برای همان مدت‌زمان ۴۰۰ روز آمده است. حل دقیق معادله‌ی درجه اشباع بر روی قطر اصلی را می‌توان از طریق حل معادله‌ی باکلی ـ لورت، و به این ترتیب به دست آورد:[۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi}\frac{\partial (r f_w)}{\partial r} = ۰ \qquad (۶۰)$$

که در آن r فاصله‌ی شعاعی از نقطه‌ی تزریق است. چون در این نوشتار فرض بر این است که فازها غیر قابل تراکم‌اند می‌توان f را به فرم $f(S_w, r) = f_w(S_w)/r$ در نظرگرفت، و در نتیجه:[۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi}\frac{\partial f_w(S_w)}{\partial r} = ۰ \qquad (۶۱)$$

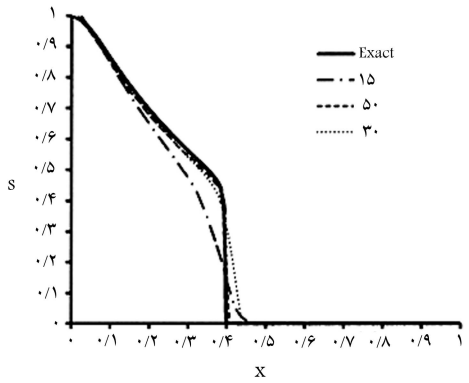
در نهایت داریم:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = -\frac{u}{r\varphi}\frac{\partial f_w}{\partial S_w}\frac{\partial S_w}{\partial r} \qquad (۶۲)$$

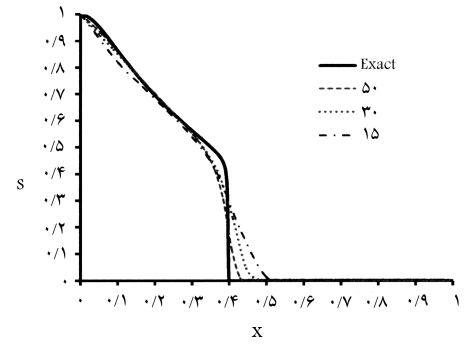
این معادله به‌روش اختلاف محدود با تعداد نقاط زیاد حل شده و به‌عنوان روش حل دقیق معرفی شده است. ابتدا برای درک بهتر از این که روش عددی هیبرید چگونه به حل دقیق همگرا می‌شود، مقدار درجه اشباع روی قطر اصلی برای تعداد تقسیمات متفاوت با حل دقیق این معادله مقایسه شده و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. چنان که دیده می‌شود روش هیبرید با تعداد شبکه‌ی ۵۰ کاملاً به حل دقیق نزدیک می‌شود.

مجدداً برای حل جریان در میدان شکل ۹، دو روش هیبرید و بالادست با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۱۰ و ۱۱ دیده می‌شود که روش هیبرید با تعداد نقاط کم‌تر به جواب بهتری می‌رسد. از طرف دیگر، روش هیبرید با افزایش تعداد تقسیمات با سرعت بیشتری به جواب دقیق نزدیک می‌شود ولی روش بالادست در نقاط ناپیوستگی نسبت به افزایش تعداد تقسیمات عکس‌العمل خوبی ندارد. هرچند با افزایش تعداد تقسیمات، مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی توسط این روش بهبود می‌یابد ولی با تعداد شبکه‌ی ۵۰*۵۰ همچنان در نقطه‌ی ناپیوستگی دارای خطای زیادی است.

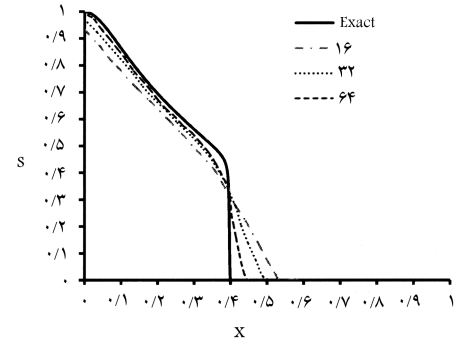
معادلات سرعت و فشار و درجه اشباع به‌روش اجزاء محدود گلرکین بالادست برای این میدان جریان توسط هوبر حل شده[۱۱] که نتایج آن در شکل ۱۲ آمده است. چنان که در این شکل مشاهده می‌شود، نتایج روش اجزاء محدود استاندارد بر اثر تغییر زیاد شبکه، چندان تغییر نمی‌کند ولی در روش هیبرید (شکل ۱۰) با تغییر شبکه، نتایج به سرعت به حل دقیق نزدیک می‌شود.



شکل ۱۰. نتایج حاصله از روش هیبرید در حل میدان شکل ۹.



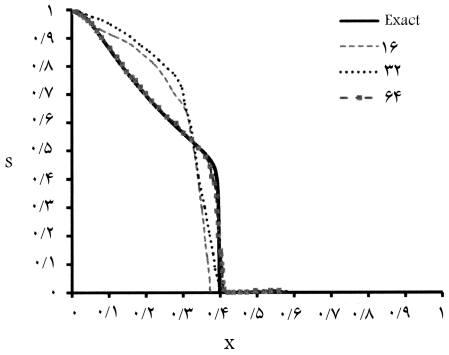
شکل ۱۱. نتایج حاصله از روش بالادست.



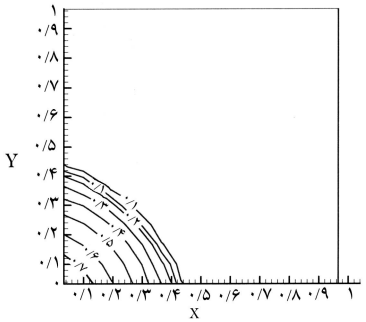
شکل ۱۲. نتایج حاصل از روش گلرکین بالادست توسط هوبر.[۱۱]

هوبر در روش بعدی معادلات سرعت و فشار را به‌وسیله‌ی روش هیبرید، و معادله‌ی درجه اشباع را به‌وسیله‌ی فلاکس‌های محدودکننده حل کرده که نتایج آن در شکل ۱۳ ارائه شده است. چنان که در این شکل مشاهده می‌شود،برای رسیدن به حل دقیق، هنگامی که از روش فلاکس محدودکننده استفاده می‌شود باید از شبکه‌ی ۶۴*۶۴ استفاده کرد، در صورتی که در روش هیبرید با تعداد شبکه‌ی ۵۰*۵۰ به حل دقیق خواهیم رسید. همچنین با مقایسه‌ی شکل‌های ۱۰ و ۱۳، با تعداد شبکه‌ی ۳۰*۳۰ جواب‌های حاصل از روش هیبرید نسبت به روش فلاکس محدودکننده به جواب دقیق بسیار نزدیک است.

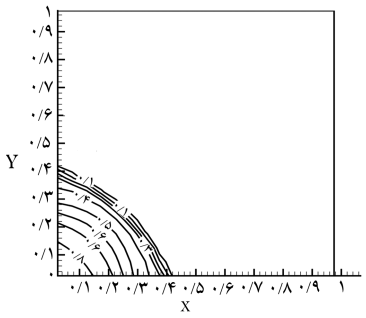
در ادامه در شکل‌های ۱۴ الی ۱۹ خطوط تراز درجه اشباع آورده شده است. با توجه به این خطوط درمی‌یابیم که روش هیبرید نسبت به تغییر شبکه واکنش بهتری دارد، به‌طوری که با زیادشدن تعداد شبکه جواب‌ها به‌سرعت به جواب دقیق نزدیک می‌شود. در روش بالادست خطوط تراز به دست آمده با تعداد تقسیمات



شکل ۱۳. نتایج حاصل از روش فلاکس محدودکننده توسط هوبر.[۱۱]



شکل ۱۴. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه ۱۵*۱۵ روش بالادست.



شکل ۱۵. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه‌ی ۱۵*۱۵ روش هیبرید.

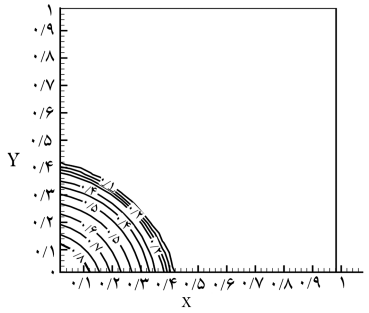
متفاوت تقریباً یکسان است و چنان که انتظار می‌رود این روش به تغییر شبکه چندان حساس نیست؛ همچنین جواب‌های شبکه کم‌تر با جواب‌های شبکه زیاد با هم فرق چندانی ندارند. تنها تفاوت موجود بین آنها این است که در شبکه بیشتر مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی کمی دقیق‌تر شده است.

مثال عددی دوبعدی و محیط ناهمگن

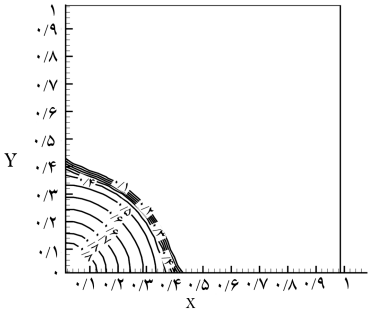
میدان جریانی به‌صورت شکل ۲۰ در نظر گرفته شده است. این میدان همانند میدان حل‌شده‌ی قبلی است با این تفاوت که یک قسمت با نفوذپذیری کم‌تر، همانند شکل ۲۰، در داخل آن وجود دارد. ضرایب نفوذپذیری این میدان این‌گونه انتخاب شده‌اند:

$$K_1 = 10^{-10} m^2$$

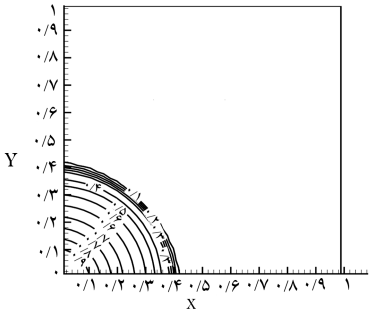
$$K_2 = 10^{-7} m^2$$



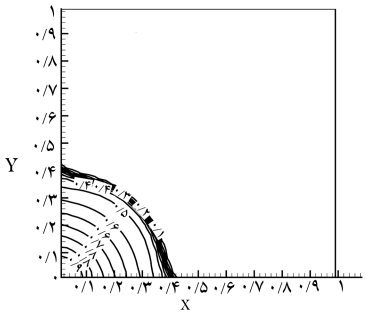
شکل ۱۶. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه ۳۰*۳۰ روش بالادست.



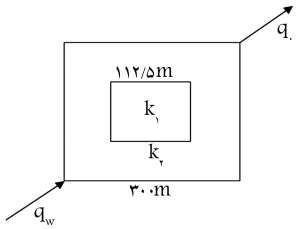
شکل ۱۷. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه ۳۰*۳۰ روش هیبرید.



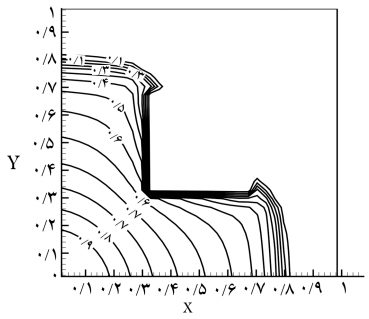
شکل ۱۸. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه ۵۰*۵۰ روش بالادست.



شکل ۱۹. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه ۵۰*۵۰ روش هیبرید.



شکل ۲۰. میدان حل پنج‌نقطه با دو میدان نفوذپذیری متفاوت.



شکل ۲۱. خطوط تراز درجه اشباع آب در میدان شکل ۲۰.

شکل ۲۱ خطوط تراز درجه اشباع به دست آمده از روش عددی هیبرید را نشان می‌دهد. چنان‌که پیداست این روش دامنه‌ی ناهمگن را هم به‌خوبی مدل می‌کند.

نتیجه‌گیری

جریان در محیط متخلخل به‌گونه‌یی است که تأثیر جمله‌ی جابه‌جایی معادلات ازجمله نفوذ بیشتر است. این طبیعت باعث می‌شود که در هنگام حل معادلات حاکم بر محیط متخلخل، جواب‌ها به دقیق‌بودن سرعت حساس باشد. از این رو در هنگام حل معادلات سرعت و فشار باید از روش‌های با دقت بالا استفاده کرد. اما در روش‌های کلاسیک به‌دلیل این‌که از میدان فشار مشتق گرفته شده و مشتق‌گیری عددی دارای خطای زیادی است، دقت قابل قبولی ندارند. به‌همین دلیل برای به دست آوردن جواب‌های قابل قبول، در این نوشتار معادلات سرعت و فشار توسط اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به‌صورت هم‌زمان حل شده و لذا عملیات مشتق‌گیری از میدان فشار حذف شده است. این امر باعث می‌شود که میدان سرعت به دست آمده از این روش از دقت بالایی برخوردار باشد. نتایج نشان داده است که جواب‌های به دست آمده از این روش نسبت به روش‌های دیگر، ازجمله روش‌های اختلاف محدود، به حل دقیق نزدیک‌تر باشند. هنگامی که جواب‌های حاصله از روش گلرکین با جواب‌های روش هیبرید مقایسه می‌شوند، قدرت روش هیبرید نمایان می‌شود. همچنین نشان داده شده که این روش در شبکه‌ی درشت‌تر دقت مناسب‌تری در مقایسه با روش‌های اختلاف محدود دارد.

علاوه بر این روش هیبرید از مهم‌ترین خاصیت المان محدود برخوردار است که می‌توان از شبکه‌های غیر مستطیلی استفاده کرد. لذا برای محیط‌های متخلخل به‌شدت ناهمگن نیز قابل کاربرد است.

پانوشت

1. numerical dissipation
2. upwind
3. mixed-finite element
4. saddle point problem
5. mixed-hybrid finite element
6. global pressure
7. global velocity
8. mobility
9. variational
10. todd
11. Buckley-Leverett
12. Lax-Friedrich
13. Lax-Wendroff
14. numerical dispersion
15. five-spot

منابع

1. Chavent, G., and Roberts, J.E. "A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in water flow problems", *Adv. Water, Resources.*, **14**, pp. 329-348 (1991).
2. Durlofsky, L.J. "Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities", *Water Resources Research,* **30**, pp. 965-973 (1994).
3. Masud, A., and Hughes, T.J.R. "A stabilized mixed-finite element method for Darcy flow", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg,* **191**,pp. 4341-4370 (2002).
4. Mosé, R.; Siegel, P.; Ackerer, P., and Chavent, G. "Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?", *Adv. Water Resources,* **30**(11), pp. 3001-3012 (1994).
5. Chavent, G.; and Jaffre, J. "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation", North-Holland, Amesterdam, (1986).
6. Aziz, K., and Settari, A. "Petroleum reservoir simulation", *Elsevier:* New York, (1986).
7. Bastian, P. "Numerical computation of multiphase flows in porous media", Christian–Albrechts–Universit"at Kiel, (1999).
8. Ferdousi, P.A., and Manzari, M.T. "A space-time finite element formulation for simulation of immiscible two phase flow in porous media", *Thirteenth Conference on Finite Elements For Flow Problem,* 4-6 April, Swansea, Wales, United Kingdom (2005).
9. Helmig, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface,* Springer, Berlin, (1997).
10. Shokri, N. "Numerical simulation of two-phase flow in porous media using flux limiters", MSc Thesis, School of Mechanical Engineering, Sharif Univ. Tech. (2006).
11. Huber, R., and Helmig, R. "Multiphase flow in heterogeneous porous media : a classical finite element method versus an implicit pressure-explicit saturation-based mixed finite element-finite volume approach", *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* **29**, pp. 899-920 (1999).