

طراحی معکوس شکل در جریان‌های داخلی و خارجی با روش دیواره‌ی نفوذپذیر

علی اشرفی‌زاده (استاد)

محمد مهدی تابنده خورشید (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار طراحی شکل در جریان‌های داخلی و خارجی به وسیله‌ی الگوریتمی مبتنی بر روش دیواره‌ی نفوذپذیر ارائه شده است. در این روش با دانستن توزیع فشار هدف بر روی دیواره‌ی یک مجرا یا دیواره‌ی جسم واقع در میدان جریان، شکل دیواره‌ی متناظر با این توزیع فشار به دست می‌آید. روش دیواره‌ی نفوذپذیر، یک روش طراحی معکوس تکراری است و محاسبات از یک حدس اولیه آغاز می‌شود. در این روش همه‌ی انواع معادلات جریان (از جریان پتانسیل تا ناور-استوکس اعم از دوبعدی یا سه‌بعدی و غیرقابل تراکم یا تراکم‌پذیر) قابل استفاده هستند. در این مقاله معادلات اوایلر تراکم‌پذیر دوبعدی به‌عنوان معادلات حاکم در نظر گرفته شده‌اند. به این منظور یک برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده که این معادلات را به کمک روش حجم‌های متناهی گسسته، و سپس حل می‌کند. برای به دست آوردن شارهای جابه‌جایی در مرز میان سلول‌ها از روش رو (RoE)، و برای گسسته‌سازی میدان محاسباتی از روش جبری و ساده‌ی TFI استفاده شده است.

واژگان کلیدی: طراحی معکوس شکل، روش دیواره‌ی نفوذپذیر، جریان داخلی، جریان خارجی، معادلات اوایلر.

مقدمه

مسائل جریان داخلی و خارجی به دو گروه مهم تقسیم می‌شوند. گروه اول مربوط به مسائل تحلیل میدان جریان هستند که در آن‌ها شکل مرزهای فیزیکی و شرایط مرزی حاکم بر مسئله معلوم است و مجهولات جریان در داخل میدان حل محاسبه می‌شوند. گروه دوم به مسائل طراحی اختصاص دارد که در آن‌ها بخشی از شرایط مرزی یا شکل مرزها نیز مجهول است و بنابراین دسترسی به اطلاعات اضافه در مقایسه با مسائل تحلیل ضرورت دارد. مسائل طراحی شکل در جریان سیالات، گروه خاصی از مسائل طراحی هستند که در آن‌ها بخشی از شکل مرز مجهول است و در مقابل، شرط‌های مرزی اضافه (معمولاً توزیع فشار مطلوب روی نقاط مرزی) به‌عنوان معیار طراحی باید ارضا شوند.

فرمول‌بندی و حل مسائل طراحی شکل نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته‌ی اول، روش‌های هم‌بسته و دسته‌ی دوم روش‌های غیرهم‌بسته نامیده می‌شوند. در روش‌های هم‌بسته مختصات نقاط مجهول مرزی به‌عنوان متغیرهای وابسته در معادلات ظاهر شده و با حل معادلات، شکل مرز به‌طور مستقیم به دست می‌آید.^[۱] اما در روش‌های غیرهم‌بسته، رشته‌ی از مسائل تحلیلی حل می‌شود تا از یک حدس اولیه به شکل نهایی برسیم. به این منظور، بعد از هر مرحله تحلیل تغییراتی بر روی شکل صورت می‌گیرد تا به ارضای معیار طراحی نزدیک‌تر شویم. با تکرار این محاسبات، در نهایت شکلی به دست می‌آید که معیار طراحی را ارضا می‌کند.

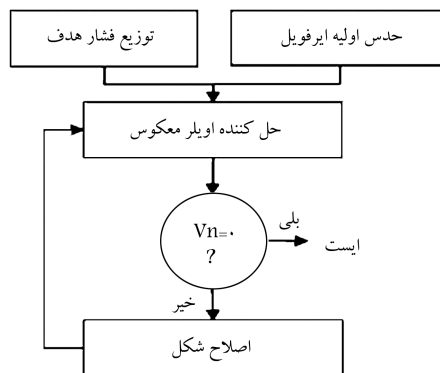
یکی از مهم‌ترین مشکلات موجود در طراحی شکل غیرهم‌بسته، ارائه‌ی روش مناسب برای اصلاح شکل بعد از هر مرحله تحلیل میدان جریان است. یکی از

این روش‌ها استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی است.^[۲] یک شکل بهینه زمانی به دست می‌آید که به معیار یا محدودیت طراحی و هندسی خاصی، نظیر کم‌ترین نیروی پسای ممکن، دست یابیم. دسته‌ی دیگری از روش‌ها مبتنی بر استفاده از الگوریتم ژنتیک هستند.^[۳] این روش‌ها از الگوریتم‌های صرفاً ریاضی برای اصلاح شکل استفاده می‌کنند و به دلیل پیچیدگی ریاضی معمولاً هزینه‌ی محاسباتی بالایی دارند. همچنین به دلیل استفاده از الگوریتم‌های غیر فیزیکی، ممکن است شکل‌هایی به دست آیند که از نظر فیزیکی غیرقابل قبول‌اند.

روش‌های غیر هم‌بسته‌ی دیگری نیز ارائه شده‌اند که از الگوریتم‌های فیزیکی برای اصلاح هندسه استفاده می‌کنند. یکی از این روش‌ها، تکنیک جرم فتر میراگر است.^[۴] دیگر روش مبتنی بر استفاده از الگوریتم‌های فیزیکی «روش دیواره‌ی نفوذپذیر» است^[۵] که در آن جابه‌جایی مرز تا رسیدن به شکل نهایی براساس ارضای بقای جرم صورت می‌گیرد. در این نوشتار گونه‌ی الگوریتم طراحی شکل (از خانواده‌ی روش‌های دیواره‌ی نفوذپذیر) ارائه شده که از آن می‌توان برای طراحی شکل در جریان‌های داخلی و خارجی بهره جست.

روش دیواره‌ی نفوذپذیر

در روش دیواره‌ی نفوذپذیر توزیع فشار هدف به‌عنوان یک شرط مرزی بر دیواره اعمال می‌شود. اگر این شرط را به‌همراه شرط مرزی سرعت عمودی صفر بر روی دیواره



شکل ۱. فلوجارت الگوریتم روش دیواره‌ی نفوذپذیر.

در معادله‌ی گسسته‌ی ۳ برای یافتن مقادیر بردار حل در زمان $n+1$ ، باید مقادیر بردار شار بر روی سطوح بین سلول‌ها در زمان n محاسبه شود. برای محاسبه‌ی این مقادیر از روش Roe استفاده شده است. در رابطه‌ی ۴ روش محاسبه‌ی بردار F در سطح بین سلول‌ها آورده شده است. رابطه‌ی مشابهی نیز برای به دست آوردن بردار G مورد استفاده قرار می‌گیرد.^[۹]

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x} [F_{i+1} + F_i] - \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_{j=1}^r \left| (\lambda_j)_{i+\frac{1}{2}} \right| (I_j)_{i+\frac{1}{2}} (U_{i+1} - U_{i-1}) (r_j)_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad (4)$$

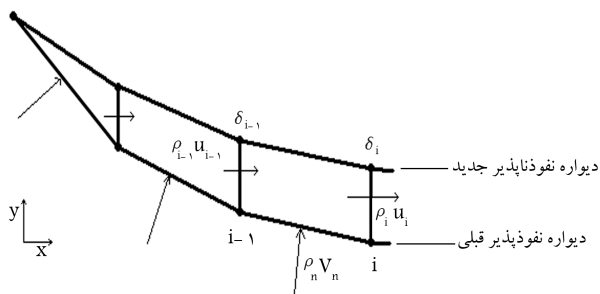
در این رابطه λ_j ، I_j و r_j به ترتیب مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و بردارهای ویژه راست معادله‌ی ۱ هستند. گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش حجم متناهی صورت گرفته است.

مدل اصلاح شکل با روش دیواره‌ی نفوذپذیر

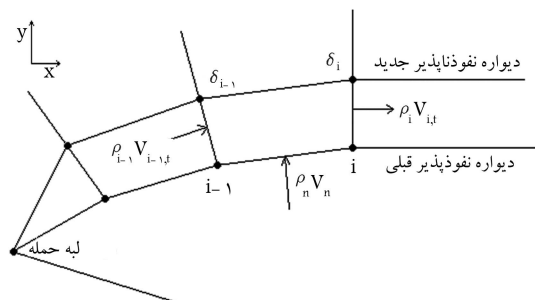
در شکل‌های ۲ و ۳ نحوه‌ی اصلاح شکل با این روش به ترتیب در جریان‌های داخلی و خارجی نمایش داده شده‌اند. لازم به ذکر است که برای هرکدام از دیواره‌هایی که در معرض تغییر شکل است باید یک نقطه‌ی ثابت به عنوان نقطه‌ی شروع محاسبات در نظر گرفت.

مدل دیواره‌ی نفوذپذیر در جریان داخلی

برای اصلاح شکل دیواره در جریان‌های داخلی، نقطه‌ی ثابت، محل اولیه‌ی دیواره در ورودی مجراست. با نوشتن قانون بقای جرم برای اولین سلول، مقدار جابه‌جایی نقطه‌ی دوم به دست می‌آید. به همین ترتیب، و با حرکت در امتداد دیواره به مقادیر جابه‌جایی نقاط دیگر دست می‌یابیم. همین روند ادامه می‌یابد تا به انتهای دیواره همان صورت ادامه می‌یابد.



شکل ۲. مدل دیواره نفوذپذیر برای جریان داخلی.



شکل ۳. مدل دیواره نفوذپذیر در جریان خارجی.

اعمال کنیم، از نظر محاسبات عددی مسئله بدوضع (ill-Posed) می‌شود. به همین دلیل، توزیع فشار هدف به جای سرعت عمودی صفر روی دیواره اعمال می‌شود. چنین روشی یک «روش معکوس» نامیده می‌شود و تنها تفاوت آن با حل‌کننده‌ی مستقیم در اعمال شرط مرزی است. چون حدس اولیه با شکل نهایی متفاوت است، پس از حل میدان توسط حل‌کننده‌ی معکوس، سرعت عمودی بر روی دیواره صفر نخواهد بود. این مؤلفه‌ی سرعت عمودی برای اصلاح شکل تا رسیدن به شکل مطلوب معیاری ارائه می‌دهد. با اعمال قانون بقای جرم می‌توان دیواره را اصلاح کرد و به دیواره‌ی نزدیک‌تر به یک دیواره‌ی نفوذناپذیر دست یافت.

در شکل ۱ فلوجارت الگوریتم روش دیواره‌ی نفوذپذیر ارائه شده است. در مرحله‌ی اول، طراح باید توزیع فشار هدف را مشخص کند. برای شروع محاسبات نیز یک حدس اولیه لازم است. سپس حل‌کننده‌ی معکوس به‌کار گرفته می‌شود. اگر مؤلفه‌ی سرعت عمودی روی دیواره برابر صفر باشد شکل موجود توزیع فشار هدف را ارضا می‌کند. اما اگر سرعت عمودی صفر نباشد باید شکل موجود اصلاح شود. بعد از این مرحله برای هندسه‌ی اصلاح شده مجدداً شبکه‌ی تولید می‌شود. سپس محاسبات حل‌کننده‌ی معکوس بر روی هندسه‌ی جدید صورت می‌گیرد و مراحل به همان صورت ادامه می‌یابد.

معادلات حاکم و روش عددی حل معادلات

معادلات حاکم بر میدان جریان، شکل بقای معادلات اوپلر دوبعدی در مختصات دکارتی‌اند. شکل عمومی این معادلات به صورت رابطه‌ی ۱ است.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

بردار حل (U) و بردارهای شار (F و G) در این معادله طبق روابط ارائه شده در معادلات ۲ بیان می‌شوند.

$$U = \begin{bmatrix} e \\ \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} (e+p)u \\ \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} (e+p)v \\ \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{bmatrix} \quad (2)$$

با انتگرال‌گیری معادلات بر روی یک حجم کنترل و استفاده از قضیه‌ی گرین، معادلات به شکل گسسته تبدیل می‌شوند (رابطه‌ی ۳).

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[\sum_{faces} (F.n_x + G.n_y) A \right] \quad (3)$$

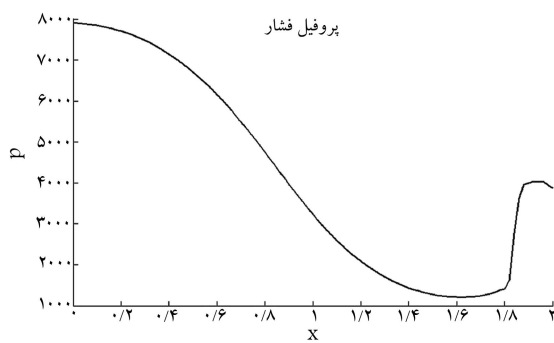
است که با استفاده از یک بلوک و اعمال روش تولید شبکه‌ی جبری (TFI) به دست آمده است. شرایط مرزی که برای تحلیل میدان جریان مورد استفاده قرار گرفته‌اند شامل شرط صفر بودن سرعت عمودی روی دیواره‌های بالا و پایین، و مقادیر فشار و دمای سکون و عدد ماخ در ورودی است (رابطه‌ی ۹). همچنین برای شرط مرزی خروجی در سمت راست شکل، فشار پشت برابر با 150 pa اعمال می‌شود.

$$P_0 = 1000 \text{ pa} \quad (9)$$

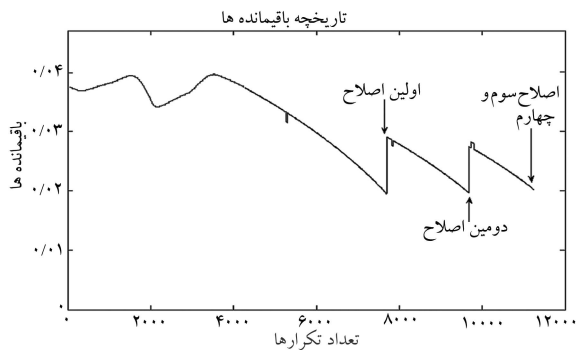
$$T_0 = 270 \text{ K}$$

$$M = 0.1$$

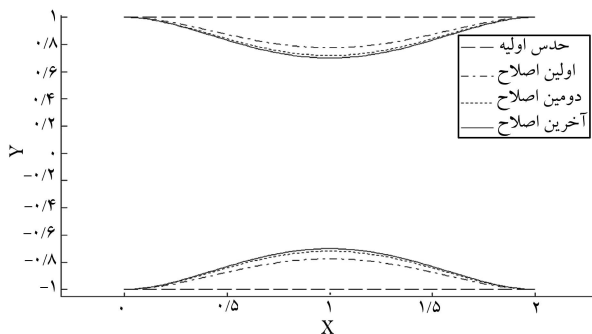
در شکل ۵ توزیع فشار هدف که از حل جریان در نازل همگرا - واگرای شکل ۴ به دست آمده نشان داده شده است. یک مجرای ساده با دیواره‌های مستقیم نیز به عنوان حدس اولیه برای شروع محاسبات مورد استفاده قرار گرفته است. نحوه‌ی همگرایی الگوریتم محاسباتی در شکل ۶ نشان داده شده است. در شکل ۷ نحوه‌ی



شکل ۵. توزیع فشار هدف.



شکل ۶. نحوه همگرایی محاسبات.



شکل ۷. نحوه تغییر دیواره از شکل اولیه تا شکل نهایی.

برسیم. در جریان داخلی تنها مؤلفه‌های y نقاط مرزی تعیین شده و مؤلفه‌های x آن‌ها تغییر نمی‌کنند. شکل دیفرانسیلی معادله‌ی بقای جرم به صورت رابطه‌ی ۵ خواهد بود:

$$d(\rho u \delta) = \rho V_n ds \quad (5)$$

با استفاده از حجم‌های محدود نشان داده شده در شکل ۲ معادله‌ی بقای جرم به صورت رابطه‌ی ۶ نوشته می‌شود:

$$\delta_i = \frac{1}{\rho_i u_i} (\delta_{i-1} \rho_{i-1} u_{i-1} + \rho_n V_n \Delta s) \quad (6)$$

که در آن δ_i جابه‌جایی نقطه‌ی I ، Δs طول دیواره از نقطه‌ی $i-1$ تا نقطه‌ی i است. دیواره‌ی جدید در هر تکرار نفوذناپذیر فرض می‌شود.

مدل دیواره‌ی نفوذپذیر در جریان خارجی

در یک ایرفویل، تغییرات از لبه‌ی حمله شروع می‌شود و به‌طور مجزا در طرف مکش و فشار ادامه می‌یابد تا به لبه‌ی فرار برسد. نحوه‌ی به دست آوردن نقاط جدید مشابه جریان داخلی است، با این تفاوت که در جریان خارجی تغییر در موقعیت نقاط، در جهت عمود بر محل قبلی دیواره در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از حجم‌های محدود نشان داده شده در شکل ۳ بقای جرم برای هر سلول به صورت رابطه‌ی ۷ نوشته می‌شود:

$$d(\rho V_t \delta) = \rho V_n ds \quad (7)$$

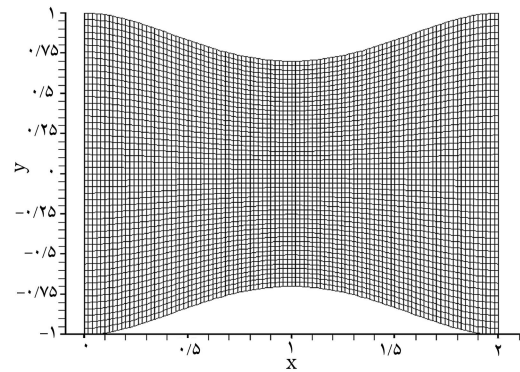
که شکل گسسته‌ی آن مطابق رابطه‌ی ۸ است:

$$\delta_i = \frac{1}{\rho_i V_{t,i}} (\delta_{i-1} \rho_{i-1} V_{t,i-1} + \rho_n V_n \Delta s) \quad (8)$$

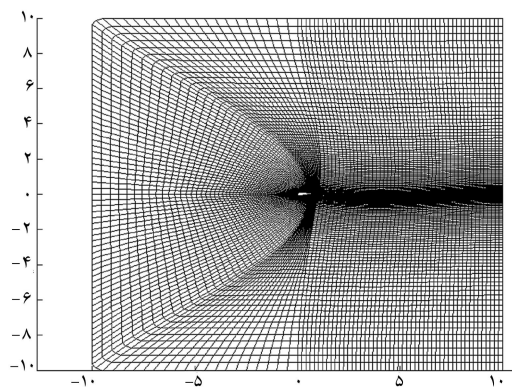
لازم به ذکر است که در معادلات ۵ و ۶، Π سرعت در جهت x ، و در معادلات ۷ و ۸ نیز V_t سرعت مماسی است.

مثال‌های طراحی

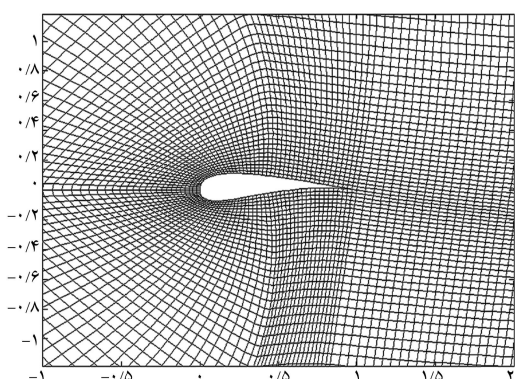
طراحی یک مجرای همگرا-واگرا. برای طراحی یک مجرا به یک توزیع فشار هدف نیاز داریم. با حل میدان جریان در نازل همگرا - واگرای شکل ۴ و محاسبه‌ی توزیع فشار روی دیواره، توزیع فشار هدف به دست می‌آید. شبکه‌ی ایجاد شده برای این نازل در شکل ۴ نشان داده شده است. این شبکه دارای $10721 = 71 \times 151$ گره



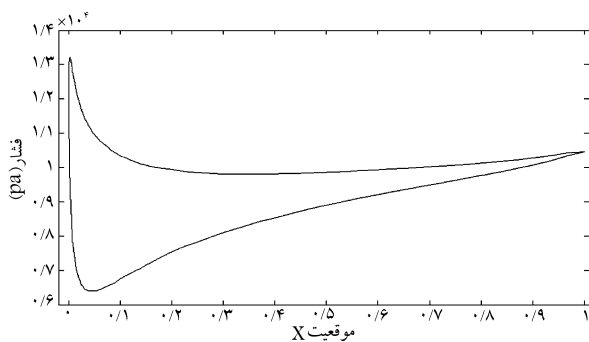
شکل ۴. شبکه‌ی ایجاد شده برای حل نازل همگرا - واگرا.



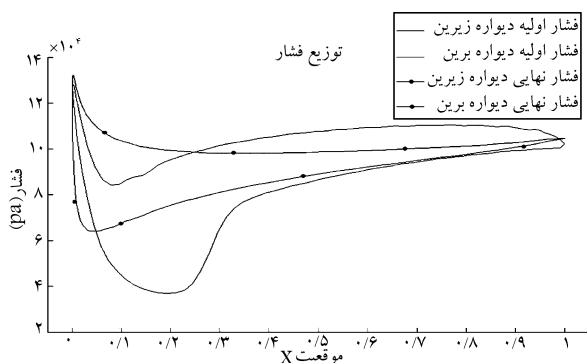
شکل ۱۰. شبکه پیرامون ایرفویل.



شکل ۱۱. شبکه پیرامون ایرفویل در نزدیکی ایرفویل.

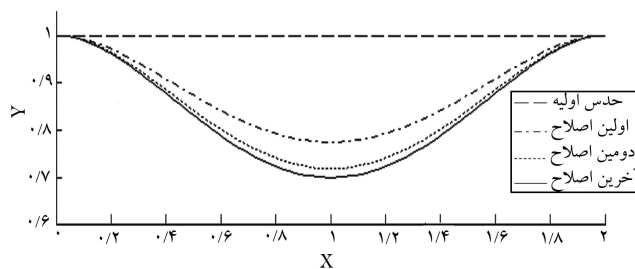


الف) توزیع فشار هدف در طراحی ایرفویل؛

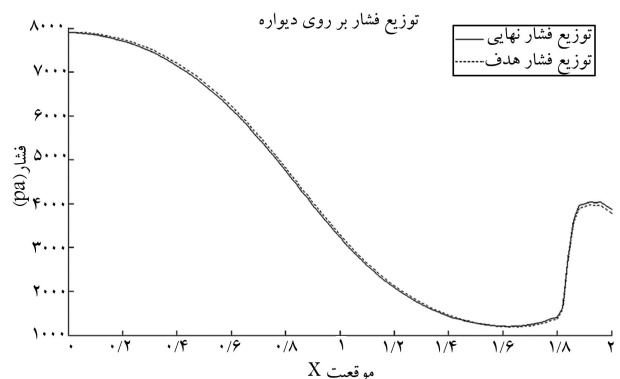


ب) مقایسه ی توزیع فشار اولیه و هدف در طراحی ایرفویل.

شکل ۱۲. توزیع فشار هدف و مقایسه آن با توزیع فشار اولیه.



شکل ۸. نحوه تغییر دیواره بالا از شکل اولیه تا شکل نهایی.



شکل ۹. توزیع فشار هدف و توزیع فشار نهایی.

تغییر دیواره از شکل اولیه تا رسیدن به شکل نهایی، و در شکل ۸ نیز تصویر بزرگتری از نحوه ی تغییرات شکل دیواره ی بالای نازل نمایش داده شده است. همانگونه که در شکل های ۷ و ۸ ملاحظه می شود، شکل نهایی پس از سه بار تکرار محاسبات به دست آمده است. در شکل ۹ توزیع فشار هدف و توزیع های فشار اولیه و نهایی در محاسبات تکراری نشان داده شده اند.

طراحی یک ایرفویل خمیده. برای طراحی ایرفویل نیز همانند طراحی مجرا ابتدا جریان حول یک ایرفویل خمیده به وسیله ی حل کننده ی مستقیم حل می شود. توزیع فشار محاسبه شده روی این ایرفویل به عنوان توزیع فشار هدف در نظر گرفته شده و برای حدس اولیه نیز از یک ایرفویل متقارن استفاده شده است. شبکه ی ایجاد شده پیرامون ایرفویل در شکل های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است. این شبکه دارای $18000 = 75 \times 240$ گره است. به منظور نمایش بهتر کیفیت شبکه ی پیرامون ایرفویل، شبکه ی ایجاد شده در یک تصویر بزرگ تر در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

این شبکه با استفاده از شش بلوک و اعمال روش تولید شبکه ی جبری (TFI) در این بلوک ها به دست آمده است. [۹] شرایط مرزی جریان آزاد که در تحلیل میدان جریان مورد استفاده قرار گرفته اند در رابطه ی ۱۰، و توزیع فشار هدف در شکل ۱۲ الف نشان داده شده است. در شکل ۱۲ ب نیز توزیع فشار بر روی ایرفویل اولیه و توزیع فشار هدف با یکدیگر مقایسه شده اند. زاویه ی حمله ی ایرفویل ۴ درجه است.

$$P = 101325 \text{ pa} \quad u = 207 \text{ m/s} \quad (10)$$

$$M = 0.6 \quad v = 14 \text{ m/s}$$

در شکل ۱۳ نیز توزیع فشار هدف و توزیع فشار نهایی با یکدیگر مقایسه شده اند.

نتیجه‌گیری

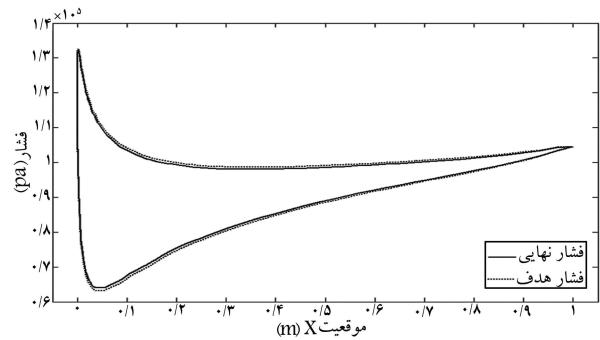
یک الگوریتم محاسباتی برای تحلیل جریان با تغییر شرایط مرزی بر روی دیواره، و با استفاده از یک روش اصلاح شکل، به الگوریتم طراحی شکل تبدیل شده است. این الگوریتم برای طراحی مجاری جریان‌های داخلی (نازل) و اجسام در جریان‌های خارجی (ایرفویل) به کار رفته است. در این الگوریتم توزیع فشار هدف به‌طور مستقیم بر روی دیواره‌ی نفوذپذیر اعمال می‌شود. این الگوریتم در حالت کلی برای جریان‌های زیرصوتی، گذرصوتی و فراصوتی سه‌بعدی و لزج نیز قابل ارتقاء است، ولی همگرایی آن در جریان‌های خارجی—شامل موج ضربه‌یی—با مشکل مواجه می‌شود.

مزیت مهم روش ارائه‌شده استفاده از یک الگوریتم فیزیکی، و نه ریاضی، برای اصلاح هندسه است. در نتیجه، این الگوریتم از نظر محاسباتی و همواره به شکلی قابل قبول از نظر فیزیکی همگرا می‌شود. یکی دیگر از مزیت‌های روش پیشنهادی، استفاده از یک برنامه‌ی رایانه‌یی برای تحلیل جریان و طراحی شکل است. استفاده از توزیع فشار هدف برای طراحی نیز دیگر مزیت روش دیواره‌ی نفوذپذیر است. در بعضی از روش‌ها از توزیع سرعت هدف یا توزیع عدد ماخ هدف استفاده می‌شود. هدف مهم در طراحی ایرفویل، افزایش نیروی برآ و کاهش نیروی پسا است و این نیروها مستقیماً از توزیع فشار بر روی سطح به دست می‌آیند. بنابراین استفاده از توزیع فشار هدف نیز یک مزیت محسوب می‌شود.

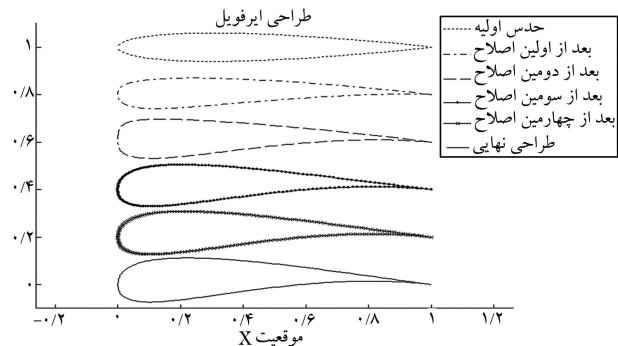
در روش پیشنهادی به دلیل استفاده از روش جبری TFI برای تولید شبکه و کم‌هزینه بودن این روش از نظر زمان محاسباتی، بعد از هر مرحله اصلاح هندسه، مجدداً شبکه تولید می‌شود. این موضوع توانایی تغییرات بزرگ را نیز در طراحی به طراح می‌دهد، بدون این که شبکه‌ی عددی به هم بریزد. نکته‌ی آخر این که در الگوریتم پیشنهادی، توزیع فشار هدف به عنوان ورودی برنامه داده می‌شود که ممکن است یک توزیع فشار بهینه نباشد. بنابراین بهینه‌بودن شکل حاصل به توانایی طراح در ارائه‌ی توزیع فشار بهینه بستگی دارد.

منابع

1. Ashrafizadeh, A. and Raithby, G.D.; Stubble, G.D. "Direct design of ducts", *Journal of Fluids Engineering*, **125**, pp. 158-165 (2003).
2. Ashrafizadeh, A.; Raithby, G.D. and Stubble, G.D. "Direct design of airfoil shape with a prescribed surface pressure", *Numerical Heat Transfer*, part B, **41**, pp. 505-527 (2004).
3. Jameson, A. and Vassberg, J.C. "Computational fluid dynamics for aerodynamic Design: its current and future impact", AIAA Paper 2001-0538 (January 2001).
4. Obayashi, S. "Aerodynamic optimization with evolutionary algorithms, inverse design and optimization methods", von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1997-05, pp. 1-19 (1997).
5. Dulikravich, G.S.; Martin, T.J. and Dennis, B.H. "Multidisciplinary inverse problems", *Inverse Problems in En-*



شکل ۱۳. توزیع فشار نهایی و هدف.



شکل ۱۴. نحوه‌ی اصلاح ایرفویل.

در شکل ۱۴ نحوه‌ی اصلاح ایرفویل از حدس اولیه تا شکل نهایی نمایش داده شده است. برای وضوح بیشتر، لبه‌ی حمله‌ی ایرفویل‌ها در مؤلفه‌های افقی مختلف نشان داده شده‌اند. چنان که در این شکل مشخص است پنج مرحله اصلاح بر روی ایرفویل صورت گرفته است.

gineering: Theory and Practice, pp. 1-8 (1999).

6. Leonard, O. and Van den Braembussche, R.A. "Design method for subsonic and transonic cascade with prescribed mach number distribution", *ASME J. Turbomachinery*, **114**, pp. 553-560 (1992).
7. Demeulenaere, A.; Leonard, O. and Van den Braembussche, R.A. "A two-dimensional navier-stokes inverse solver for compressor and turbine blade design", *Proc. Second European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, Antwerp, Belgium, pp. 339-346 (1997).
8. de Vito, L.; Van den Braembussche, R.A. and Deconinck, H. "A novel two-dimensional viscous inverse design method for turbomachinery blading", *ASME J. of Turbomachinery*, **125**, pp. 310-316 (2003).
9. Tabandeh Khorshid, M. M. "Airfoil design using transpiration technique", *MSC Project*, KNT University of Technology, (Summer 2006).

