

ضرایب انعطاف‌پذیری و تمرکز تنش در زانویی‌ها تحت بارگذاری مرکب

خسرو نادران طحان (دانشیار)

محمد شیشه‌ساز (استاد)

محسن مینایی‌فر (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

رفتار سازه‌ی زانویی‌ها به‌عنوان بخشی از یک لوله‌ی خمیده، تحت بارگذاری‌های خمشی درون‌صفحه‌یی و برون‌صفحه‌یی (بدون فشار داخلی یا همراه با آن) بررسی شده است. ضرایب انعطاف‌پذیری و تمرکز تنش به‌عنوان مشخصه‌های این عضو، تحت بارگذاری یادشده مورد بررسی قرار گرفت و تغییرات آن‌ها با پارامترهای هندسی و نیز شرایط بارگذاری با استفاده از روش اجزاء محدود ارزیابی، و نتایج حاصله به‌صورت نمودار ارائه شد. همچنین نتایج حاصل از بررسی حاضر با نتایجی که از روابط تقریبی و دستورالعمل‌های موجود در منابع دیگر به دست می‌آیند مقایسه و موارد انطباق یا اختلاف نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: زانویی، خمش درون‌صفحه‌یی، انعطاف‌پذیری، تمرکز تنش، بارگذاری مرکب.

۱. مقدمه

سیستم‌های لوله‌کشی بخش مهمی از تأسیسات صنعتی‌اند. در چنین سیستم‌هایی مسیرهای مستقیم دارای اولویت‌اند ولی ضرورت‌هایی ایجاد می‌کند تا مسیر لوله‌ها به‌کمک زانویی‌ها تغییر کند. زانویی‌های ساده اغلب قسمتی از یک لوله‌ی خمیده‌اند که علاوه بر این که تحت فشار داخلی قرار دارند، به‌خاطر انبساط و انقباض حرارتی لوله‌های مستقیم در معرض گشتاورهای درون‌صفحه‌یی، برون‌صفحه‌یی و پیچش نیز قرار می‌گیرند. ویژگی سازه‌یی این اجزا این است که در خمش، نسبت به لوله‌های مستقیم مجاور، انعطاف‌پذیری بیشتری دارند. انعطاف‌پذیری یک لوله‌ی مستقیم یا خمیده در یک مقطع عبارت است از تغییر مکان زاویه‌یی آن مقطع به‌ازای گشتاور خمشی واحد در آن مقطع. ضریب انعطاف‌پذیری زانویی به‌صورت نسبت انعطاف‌پذیری آن به انعطاف‌پذیری لوله‌ی مستقیمی که طول آن برابر طول زانویی، و با همان قطر و ضخامت که تحت گشتاور خمشی یکسان قرار گرفته‌اند، تعریف می‌شود. علت این ویژگی که در اوایل قرن بیستم مورد توجه قرار گرفت، ناشی از امکان بیضوی‌شدن یا دوپهن شدن مقطع تشخیص داده شد. بعدها جنبه‌های مختلف عملکرد این عضو در یک سیستم لوله‌کشی بیشتر مورد بررسی قرار گرفت.^[۱] تا قبل از این که روش اجزاء محدود برای تجزیه و تحلیل زانویی‌ها به‌کار گرفته شود، محققان با در نظر گرفتن آن به‌عنوان قسمتی از یک چنبره (تورویید)، سعی کرده‌اند با استفاده از فرضیات ساده‌کننده -- نظیر بزرگ بودن شعاع چنبره نسبت به شعاع مقطع، نازک بودن ضخامت جداره نسبت به شعاع مقطع، دایره ماندن مقطع تحت

استفاده از روش اجزاء محدود برای تجزیه و تحلیل تنش و انعطاف‌پذیری زانویی‌ها، تا حد زیادی محدودیت‌های یادشده را برطرف کرده است. محققین زیادی تلاش کرده‌اند با به‌کارگیری این روش، علاوه بر ارزیابی دقت روابطی که در منابع و دستورالعمل‌های قدیمی وجود دارد، اطلاعات دقیق‌تری از انعطاف‌پذیری و تمرکز تنش و به‌طور کلی رفتار سازه‌یی زانویی‌ها به‌دست آورند.^[۱-۹] در این بررسی‌ها زانویی‌ها تحت فشار داخلی، خمش درون‌صفحه‌یی، خمش برون‌صفحه‌یی برای زانویی‌های صاف و چمدتکه^[۱۱] با فرض جابه‌جایی‌های کوچک و بزرگ و رفتار کشسان مورد توجه قرار گرفته‌اند. شرایط مرزی دو انتهای زانویی نیز در بعضی از بررسی‌ها در نظر

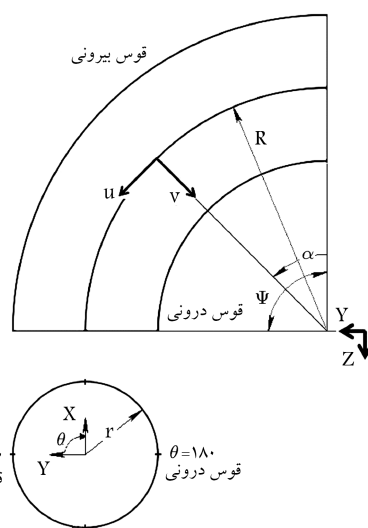
در چنین سیستم‌هایی تا مسیری که تا مسیری لوله‌ها به‌کمک زانویی‌ها تغییر کند. زانویی‌های ساده اغلب قسمتی از یک لوله‌ی خمیده‌اند که علاوه بر این که تحت فشار داخلی قرار دارند، به‌خاطر انبساط و انقباض حرارتی لوله‌های مستقیم در معرض گشتاورهای درون‌صفحه‌یی، برون‌صفحه‌یی و پیچش نیز قرار می‌گیرند. ویژگی سازه‌یی این اجزا این است که در خمش، نسبت به لوله‌های مستقیم مجاور، انعطاف‌پذیری بیشتری دارند. انعطاف‌پذیری یک لوله‌ی مستقیم یا خمیده در یک مقطع عبارت است از تغییر مکان زاویه‌یی آن مقطع به‌ازای گشتاور خمشی واحد در آن مقطع. ضریب انعطاف‌پذیری زانویی به‌صورت نسبت انعطاف‌پذیری آن به انعطاف‌پذیری لوله‌ی مستقیمی که طول آن برابر طول زانویی، و با همان قطر و ضخامت که تحت گشتاور خمشی یکسان قرار گرفته‌اند، تعریف می‌شود. علت این ویژگی که در اوایل قرن بیستم مورد توجه قرار گرفت، ناشی از امکان بیضوی‌شدن یا دوپهن شدن مقطع تشخیص داده شد. بعدها جنبه‌های مختلف عملکرد این عضو در یک سیستم لوله‌کشی بیشتر مورد بررسی قرار گرفت.^[۱] تا قبل از این که روش اجزاء محدود برای تجزیه و تحلیل زانویی‌ها به‌کار گرفته شود، محققان با در نظر گرفتن آن به‌عنوان قسمتی از یک چنبره (تورویید)، سعی کرده‌اند با استفاده از فرضیات ساده‌کننده -- نظیر بزرگ بودن شعاع چنبره نسبت به شعاع مقطع، نازک بودن ضخامت جداره نسبت به شعاع مقطع، دایره ماندن مقطع تحت

گرفته شد.^[۱۷] عده‌بی از محققین رفتارهای غیرخطی مواد و هندسه را نیز به کمک این روش بررسی کرده‌اند.^[۱۳-۱۶] اخیراً مباحث جدیدتری با هدف ارزیابی مقاومت زانویی‌ها تحت بارهای متغیر، هنگامی که نقاطی از آن دچار تغییر شکل خمیری شده‌اند، نیز مطرح شده است.^[۱۷]

در بررسی حاضر ضریب انعطاف پذیری برای زانویی‌هایی که تحت فشار داخلی، ممان‌های خمشی درون صفحه‌یی و برون صفحه‌یی قرار گرفته باشند، به کمک روش اجزاء محدود محاسبه و به صورت نمودار ارائه شده است. دقت بعضی روابط نظری و نیز دستورالعمل موجود برای محاسبه این ضریب، ارزیابی و تأثیر زاویه‌ی خم بر آن و تغییرات آن هنگامی که زانویی به طور هم‌زمان تحت فشار داخلی و ممان خمشی درون صفحه‌یی و برون صفحه‌یی قرار گرفته باشد، مطالعه شده است. همچنین ضرایب تمرکز تنش برای محدوده‌ی وسیعی از پارامترهای هندسی برآورد، و به صورت نمودار ارائه شده‌اند. رفتار ماده به صورت کشسان خطی در نظر گرفته شده و از تأثیر شرایط مرزی دو سر زانویی صرف نظر شده است. در محاسبه‌ی انعطاف پذیری لوله‌ی مستقیم، بیضوی شدن مقطع آن نادیده گرفته شده است. ضخامت جداره‌ی زانویی ثابت، بدون تنش اولیه و همگن فرض شده و مقطع آن نیز در حالت بدون بار به صورت دایره در نظر گرفته شده است.

۲. مبانی نظری

پارامترهای هندسی زانویی عبارت‌اند از: شعاع متوسط محور زانویی (R)، شعاع متوسط مقطع (r)، ضخامت (t) و زاویه‌ی مرکزی زانویی (ψ). در شکل ۱ قسمتی از یک زانویی یا لوله‌ی خمیده و پارامترهای هندسی آن، دستگاه مختصات محلی و کلی، و متغیرهای طولی (α) و نصف النهاری یا محیطی (θ) نشان داده شده است. معادلات حاکم بر یک المان از زانویی با فرض نازک بودن آن، هنگامی که زانویی تحت فشار داخلی یا ممان خمشی و یا هر دو قرار گرفته باشد به عنوان قسمتی از یک چتره در منابع مختلف استخراج شده است.^[۱۸، ۱۹] برای حل این معادلات و به دست آوردن تنش‌ها و تغییرمکان‌ها، باید ساده‌سازی‌های هندسی قابل ملاحظه‌یی انجام شود تا بتوان این کمیت‌ها را با تقریب به دست آورد. بعضی روابط انعطاف پذیری



شکل ۱. پارامترهای هندسی، دستگاه مختصات محلی و کلی.

که حاصل این‌گونه ساده‌سازی‌های هستند، برای مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش اجزاء محدود در بررسی حاضر و بدون اثبات ارائه می‌شوند.

۱.۲. انعطاف‌پذیری

الف) **خمشی درون صفحه‌یی:** ضریب انعطاف‌پذیری پیش‌تر در بخش ۱ تعریف شده است. این ضریب به شکل‌های دیگری نیز تعریف می‌شود که عموماً تابعی از گروه بدون بعد $h = tR/r^2$ به نام «ضریب زانویی» اند، که به بعضی از آنها اشاره می‌شود.

طبق تعریف، ضریب انعطاف‌پذیری زانویی (K) عبارت است از نسبت تغییر شعاع انحنا لوله‌ی خمیده به تغییر انحنا لوله‌ی مستقیم معادل (لوله‌یی که طول آن برابر طول زانویی و شعاع مقطع و ضخامت آن نیز برابر شعاع مقطع و ضخامت زانویی است) هنگامی که تحت گشتاور خمشی یکسانی قرار گرفته باشند.^[۱]

$$K = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \nu^2}{h^2} \cdot K' + K'' \quad (1)$$

K' و K'' ضرایبی هستند که به h بستگی دارند و مقادیرشان از نمودارهای موجود^[۱] قابل محاسبه است. تعریف دیگر این ضریب برحسب گشتاورهایی است که به زانویی و لوله‌ی مستقیم معادل وارد می‌شود و در دو انتهای این اجزا چرخش‌هایی یکسان به وجود می‌آورد. اگر M_s ممان وارد بر لوله‌ی مستقیم معادل و M_c ممان وارد بر زانویی باشد، از تعریف بیان‌شده در بخش ۱ نتیجه می‌شود:^[۲]

$$K = \frac{M_s}{M_c} \quad (2)$$

شکل دیگر این ضریب که از تعریف یادشده در بخش ۱ نتیجه می‌شود برحسب تغییرمکان زاویه‌یی دو انتهای زانویی و لوله‌ی مستقیم معادل به‌ازاء گشتاورهای خمشی یکسان به صورت زیر بیان می‌شود:^[۳]

$$K = \frac{\Delta\psi}{\Delta\psi_{nom}} \quad (3)$$

که در آن $\Delta\psi$ و $\Delta\psi_{nom}$ زاویه‌های چرخش به ترتیب در زانویی و لوله‌ی مستقیم معادل است. اگر $L_{eq} = R\psi$ طول لوله‌ی مستقیم معادل، M گشتاور خمشی وارد به انتهای لوله و زانویی، I ممان اینرسی دوم مقطع لوله و E مدول یانگ آن باشد، آنگاه:

$$\Delta\psi_{nom} = \frac{ML_{eq}}{EI} \quad (4)$$

اگر ضریب زانویی و شعاع خم بزرگ باشند مقدار تقریبی ضریب انعطاف‌پذیری از رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود:^[۳]

$$K = \frac{12h^2 + 10}{12h^2 + 1} \quad (5)$$

اگر نسبت $R/r > 1.7$ و $R\psi \geq 4r$ و تا فاصله‌ی r از دو انتهای زانویی هیچ‌گونه عضو کاهنده‌ی انعطاف‌پذیری زانویی (نظیر فلنج) وجود نداشته باشد، ضریب انعطاف‌پذیری را می‌توان از رابطه‌ی ۶ محاسبه کرد:^[۴]

$$K = 1.65/h \quad (6)$$

اگر زانویی از دو طرف به طول $L \geq 7r$ امتداد داشته باشد و گشتاور درون صفحه‌یی

است.^[۱۱] برای محاسبه‌ی تنش روی سطوح بیرونی و داخلی زانویی روابط ۱۲ و ۱۳ ارائه شده‌اند:^[۱]

$$\sigma_{\alpha} = \sum_{n=2,5,\dots} \frac{M}{\pi t r^2} n c_n \sin(n\theta) \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta} = \pm \sum_{n=2,5,\dots} \frac{3M}{\pi R t^2} c_n \left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right) \quad (13)$$

علامت + نشان‌گر سطح بیرونی و علامت - نشان‌گر سطح داخلی است؛ به‌کمک منحنی‌هایی که برای این منظور رسم شده‌اند محاسبه می‌شوند. همچنین در روابط پیشنهادی ۱۴ و ۱۵:^[۲]

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_0} = \left[\left(\frac{12h^2 + 10}{12h^2 + 1} \right) \cos\theta - \left(\frac{12}{12h^2 + 1} \right) \cos^2\theta \right] \pm \frac{3}{2} \nu \left(\frac{12h}{12h^2 + 1} \right) \cos 2\theta \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} = \nu \left[\left(\frac{12h^2 + 10}{12h^2 + 1} \right) \cos\theta - \left(\frac{12}{12h^2 + 1} \right) \cos^2\theta \right] \pm \frac{3}{2} \left(\frac{12h}{12h^2 + 1} \right) \cos 2\theta \quad (15)$$

h ضریب زانویی و $\sigma_0 = M/(\pi t r^2)$ تنش طولی لوله‌ی مستقیم معادل است و علامت + برای تنش‌ها روی سطح بیرونی و علامت - برای سطح داخلی است. برای ضریب زانویی‌های کوچک نیز رابطه‌ی ۱۶ توصیه شده است:^[۲]

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} = \pm \frac{1,892}{h^{2/3}} - \frac{0,48}{h^{1/3}} \quad (16)$$

در دستورالعمل ASME^[۶] برای محاسبه‌ی تنش‌های اولیه و مجموع تنش‌های اولیه و ثانویه به‌ترتیب از ضرایب B_2 و C_2 رابطه‌های ۱۷-۱۹ استفاده شده است. در این رابطه‌ها D قطر خارجی، I ممان اینرسی خمشی لوله، h ضریب زانویی، M گشتاور خمشی است و σ عبارت است از تنش اصلی بیشینه، یا دو برابر تنش برشی بیشینه که «شدت تنش» نامیده می‌شود، و یا تنش معادل ون‌مایرز (هرکدام که بزرگ‌تر باشد):

$$B_2, C_2 = \frac{2\sigma I}{MD_0} \quad (17)$$

$$B_2 = \frac{1,3}{h^{2/3}} \quad (18)$$

$$C_2 = \frac{1,95}{h^{2/3}} \quad (19)$$

(ب) **خمش بیرون صفحه‌یی:** برای این حالت بارگذاری، در صورتی که بردار خمش در صفحه‌ی خم زانویی قرارگیرد، رابطه‌های ۲۰ و ۲۱ ارائه شده‌اند:^[۲]

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_0} = \frac{K}{1-\nu^2} \left[\left(1 + \frac{3a}{2} \right) \sin\theta + \frac{a}{2} \sin 3\theta \pm 3\nu ha \sin 2\theta \right] \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} = \frac{K}{1-\nu^2} \left\{ \nu \left[\left(1 + \frac{3a}{2} \right) \sin\theta + \frac{a}{2} \sin 3\theta \right] \pm 3ha \sin 2\theta \right\} \quad (21)$$

که در آن‌ها $a = -\frac{3}{5+6\nu^2}$ و K از رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود. علامت + برای محاسبه‌ی تنش‌ها روی سطح بیرونی و علامت - برای سطح درونی است.

(ج) **تأثیر فشار داخلی:** اگر همراه با خمش درون صفحه‌یی یا بیرون صفحه‌یی فشار

(M_{ip}) به فلنج نسبتاً صلب متصل به انتهای آن اعمال شود، ضریب انعطاف‌پذیری مطابق رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود:^[۱۱]

$$K = \frac{\varphi EI - 2M_{ip}L}{M_{ip}R\psi} \quad (7)$$

که در آن α زاویه‌ی چرخش فلنج انتهای لوله است.

(ب) **خمش بیرون صفحه‌یی:** اگر بردار گشتاور خمشی بر صفحه‌یی که تار مرکزی زانویی در آن قرار دارد عمود نباشد، خمش را بیرون صفحه‌یی می‌نامند. این نوع بارگذاری در سیستم‌های سه‌بعدی لوله‌کشی صورت می‌گیرد. برای این نوع بارگذاری روابط ۵ و ۶ عیناً و بدون هیچ تغییری پیشنهاد شده^[۶] ولی رابطه‌ی ۸ برای زانویی ۹۰ درجه و روابط مشابهی برای زوایای ۴۵، ۱۳۵ و ۱۸۰ درجه استخراج شده است:^[۲]

$$K = \frac{\varphi EI - M_{out}L(2+\nu)}{M_{out}R\psi} \quad (8)$$

که در آن ν ضریب پواسون است.

(ج) **تأثیر فشار داخلی:** فشار داخلی زانویی باعث کاهش انعطاف‌پذیری آن می‌شود. بعضی منابع انعطاف‌پذیری را تحت گشتاور خمشی درون صفحه‌یی و بیرون صفحه‌یی همراه با فشار داخلی یکسان در نظر گرفته‌اند ولی بعضی دیگر روابط جداگانه‌یی ارائه کرده‌اند. به‌عنوان مثال برای خمش درون صفحه‌یی و فشار داخلی رابطه‌ی ۹ ارائه شده است:^[۱]

$$K = \frac{\sqrt{3}\Gamma}{1 + \frac{\nu^2}{1-\nu^2} (r/t)^2 (P/E)(1-\nu^2)} \quad (9)$$

که در آن P فشار داخلی و $\Gamma = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{h}$ است. برای خمش درون صفحه‌یی یا بیرون صفحه‌یی و فشار داخلی نیز رابطه‌ی ۱۰ ارائه شده است:^[۲]

$$K = \frac{5 + 6h^2 + 24\lambda}{0,75 + 6h^2 + 24\lambda} \quad (10)$$

که در آن $\lambda = PR^2/(Ert)$ است. برای این حالت بارگذاری، رابطه‌ی ۱۱ نیز ارائه شده است:^[۶]

$$K = \frac{1,65/h}{1 + 6(P/E)(r/t)^{2/3}(R/r)^{1/3}} \quad (11)$$

۲.۲. تحلیل تنش

(الف) **خمش درون صفحه‌یی:** با اعمال تقریب‌هایی که پیش‌تر ذکر شد، در بعضی منابع روابطی برای محاسبه‌ی تنش‌ها ارائه شده است. فرض عمومی آنها، برای آن که بتوان از نظریه‌ی پوسته‌های نازک استفاده کرد، نازک بودن ضخامت زانویی است. در این نظریه معمولاً از تنش در امتداد عمود بر سطح پوسته صرف نظر می‌شود و فقط مؤلفه‌های طولی (σ_{α}) و نصف‌النهاری یا محیطی (σ_{θ}) یعنی حالت تنش صفحه‌یی در نظر گرفته می‌شود. مختصات α و θ در شکل ۱ نشان داده شده است. تحت هر نوع بارگذاری، برای ارزیابی مقاومت زانویی، باید توزیع تنش‌ها و مقادیر بیشینه‌ی آنها، و در مواردی نیز محل این بیشینه‌ها معلوم باشد. از روابط تقریبی ۱۲ و ۱۳ که بدون اثبات ارائه می‌شوند فقط برای برآوردهای اولیه استفاده می‌شود. برای ارزیابی دقیق می‌توان از روش اجزاء محدود استفاده کرد. تحلیل تنش و کرنش با استفاده از روش اجزاء محدود برای گستره‌ی وسیعی از پارامترهای هندسی زانویی و بارگذاری‌های خمشی درون صفحه‌یی، بیرون صفحه‌یی، بدون فشار داخلی یا با فشار داخلی، و نیز برای بررسی تأثیر زاویه‌ی مرکزی زانویی روی این کمیت‌ها انجام شده

داخلی P در زانویی باشد، تنش‌ها طبق رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ محاسبه می‌شوند.^[۲] استفاده از علامت + و - مانند موارد قبل است:

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_0} = \frac{K}{1-\nu^2} \left\{ \pm 3\nu bh \cos 2\theta + \left[\left(1 + \frac{3b}{r} \right) \cos 2\theta + b \cos 3\theta \right] \right\} \quad (22)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} = \frac{K}{1-\nu^2} \left\{ \pm 3bh \cos 2\theta + \nu \left[\left(1 + \frac{3b}{r} \right) \cos \theta + b \cos 3\theta \right] \right\} \quad (23)$$

در این روابط K از رابطه‌ی ۱۰ و b از رابطه‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود و λ همان پارامتر مورد استفاده در رابطه‌ی ۱۰ است:

$$b = -\frac{3}{5 + 6h^2 + 24\lambda} \quad (24)$$

هنگامی که زانویی فقط تحت فشار درونی است، تنش‌های اولیه و مجموع تنش‌های اولیه و ثانویه به کمک ضرایب B_1 و C_1 (پیشنهادشده به صورت رابطه‌های ۲۵، ۲۶ و ۲۷) محاسبه می‌شوند.^[۶] در این رابطه‌ها، t ضخامت جداره‌ی لوله، r شعاع متوسط مقطع، R شعاع خم، P فشار داخلی است و σ نیز در رابطه‌ی ۱۷ تعریف شده است:

$$B_1, C_1 = \frac{2\sigma t}{PD_0} \quad (25)$$

$$B_1 = -0.71 + 0.74h \quad (26)$$

$$C_1 = \frac{2R - r}{2(R - r)} \quad (27)$$

در حالی که برای همین حالت بارگذاری رابطه‌های ۲۸ و ۲۹ پیشنهاد شده‌اند:^[۲]

$$\sigma_{\alpha} = \frac{Pr}{2t} \quad (28)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{2t} \left(1 + \frac{R}{R + r \cos \theta} \right) \quad (29)$$

۳. روش بررسی

زانویی با زاویه‌ی مرکزی 90° ، شعاع خم $R = 609.6 \text{ mm}$ ، قطر خارجی 406.4 mm (۱۶ اینچ)، شعاع متوسط لوله $r = 200 \text{ mm}$ و ضخامت $t = 6.35 \text{ mm}$ متصل به دو لوله‌ی مستقیم با طول تقریبی هفت برابر شعاع متوسط لوله (برای اجتناب از تداخل شرایط انتها در نتایج و رعایت محدوده‌ی اعتبار رابطه‌ی ۷ که در آن فرض شده است $L \geq 7r$)، به عنوان مدل مینا در تجزیه و تحلیل زانویی‌ها برای محاسبه‌ی ضرایب انعطاف پذیری، و تمرکز و توزیع تنش‌ها در نقاط مختلف سطوح درونی و بیرونی آن تحت گشتاورهای خمشی درون صفحه‌ی بی و برون صفحه‌ی بی/بدون فشار داخلی انتخاب شد. زانویی با ۳۶ المان در امتداد محیط دایره‌ی مقطع و ۱۸ المان در امتداد طول خمیده‌ی زانویی و ۱۳ المان در امتداد طول هر یک از لوله‌های مستقیم شبکه بندی شد. مدل اجزاء محدود این شبکه با المان ۶۳ Shell از نرم افزار ۹.۷ ANSYS که دارای چهارگره، و هر یک با شش درجه آزادی است تهیه شد.^[۲۱] در انتهای لوله‌ی مستقیم فلنج صلبی با المان تیر صلب MPC۱۸۴ تعبیه شد تا وارد آوردن گشتاور خمشی امکان پذیر شود. بدین منظور دو صفحه‌ی تقارن در نظر گرفته شد، یکی صفحه‌ی بی که محور مرکزی

زانویی در آن قرار دارد و دیگری صفحه‌ی بی که زانویی را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و بر صفحه‌ی اول عمود باشد. در مواردی که شرایط مرزی روی صفحات تقارن در نتایج حاصل تداخل نداشت (همانند محاسبه‌ی ضرایب انعطاف پذیری)، فقط یک چهارم مدل تجزیه و تحلیل شد و در مواردی که این شرایط در نتایج تداخل داشت (مانند مقادیر حاصل برای تنش و کرنش روی سطوح داخلی و بیرونی لوله) از نیمه یا تمام مدل برای تجزیه و تحلیل استفاده شد.

شرایط مرزی مناسب برای نقاط واقع بر صفحات تقارن در نظر گرفته شد. اعتبار این شرایط و دقت المان انتخابی، تعداد آنها و کمیت‌های حاصل ارزیابی شد. تجزیه و تحلیل تعداد زیادی از مدل‌ها با مشخصات هندسی R و t و ψ متفاوت انجام شد و بعضی نتایج به صورت نمودار ارائه شد.

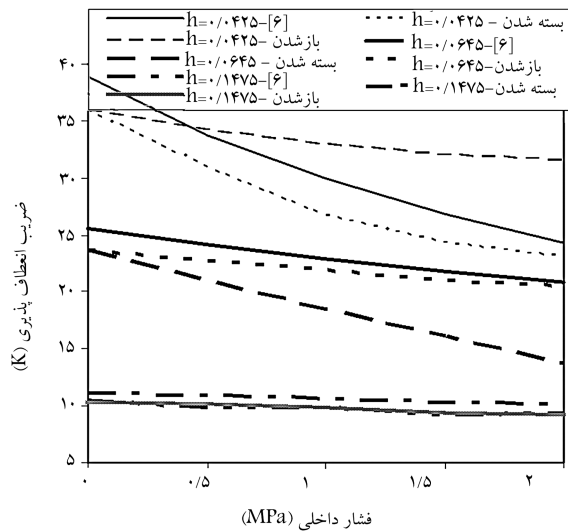
گشتاور خمشی درون صفحه‌ی بی در جهت افزایش انحنا (بستن) یا کاهش آن (بازشدن) به درپوش صلب انتهای زانویی وارد شد و با محاسبه‌ی تغییر مکان زاویه‌ی فلنج به ازای گشتاورهای وارد بر آنها (درون صفحه‌ی بی و برون صفحه‌ی بی)، ضریب انعطاف پذیری به کمک رابطه‌های ۷ و ۸ محاسبه و با نتایج حاصل از روابط نظری در بخش ۱.۲. (انعطاف پذیری) مقایسه شدند. همچنین تنش‌های طولی و نصف النهاری و تنش مؤثر در مقاطع مختلف و روی سطوح داخلی و بیرونی زانویی محاسبه و برحسب زوایای مختلف نصف النهاری ترسیم شده‌اند. در این بررسی نشان داده شد که دقت بعضی از روابط نظری در بخش ۲.۲. برای محاسبه‌ی تنش‌ها تا چه اندازه است و اختلاف آنها با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود حاضر تا چه میزان است. این بررسی‌ها برای گستره‌ی وسیعی از پارامتر زانویی h انجام، و نتایج به صورت نمودار ارائه شد. در تمام تحلیل‌ها رفتار ماده کشسان خطی در نظر گرفته شد، اگرچه در مواردی که زانویی علاوه بر خمش تحت فشار داخلی نیز قرار داشت، تحلیل‌های غیرخطی هندسی (تغییر مکان‌های بزرگ) نیز انجام شده است. لازم به توضیح است که در این نوع بارگذاری، استفاده از فرض جابه‌جایی‌های کوچک امکان ارزیابی تأثیر فشار داخلی بر انعطاف پذیری را فراهم نمی‌کند.^[۱۶، ۱۷، ۱۸]

۴. نتایج

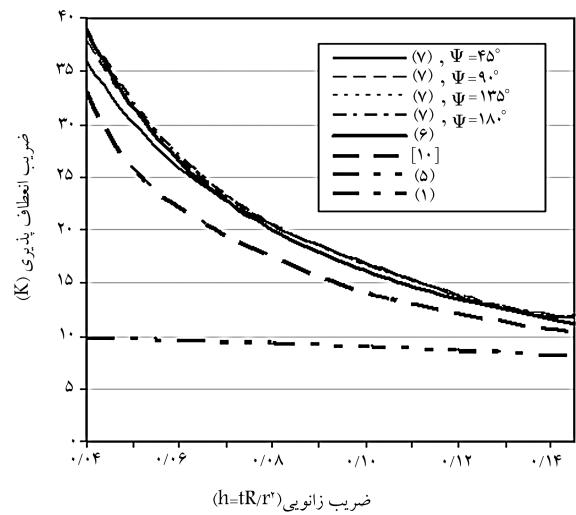
۱.۴. انعطاف پذیری

انعطاف پذیری حاصل از بررسی حاضر که به کمک رابطه‌ی ۷ برای زوایای مختلف زانویی تحت گشتاور خمشی درون صفحه‌ی بی محاسبه شده‌اند، همراه با مقادیر حاصل از رابطه‌های ۱، ۵ و ۶ و نتایج موجود،^[۱۰] در شکل ۲ رسم شده است. مشاهده می‌شود که تغییر زاویه‌ی خم زانویی از ۴۵ تا ۱۸۰ درجه، هنگامی که زانویی فقط تحت خمش درون صفحه‌ی بی قرار گرفته باشد، تأثیر چندانی بر انعطاف پذیری ندارد ولی با افزایش ضریب زانویی این نوع انعطاف پذیری کم می‌شود. ضرایب حاصل از بررسی حاضر با نتایجی که از رابطه‌ی ۱ برای ضرایب زانویی بزرگ‌تر از 0.7 به دست می‌آیند بسیار نزدیک‌اند و برای ضرایب زانویی کم‌تر از 0.7 هم اختلاف ناچیز است و با نتایج حاصل از رابطه‌ی ۶ نیز انطباق قابل قبولی دارند در حالی که با نتایج حاصل از رابطه‌ی ۵ که در آن شعاع خم خیلی بزرگ در نظر گرفته شده است اختلاف قابل ملاحظه‌ی دارند.

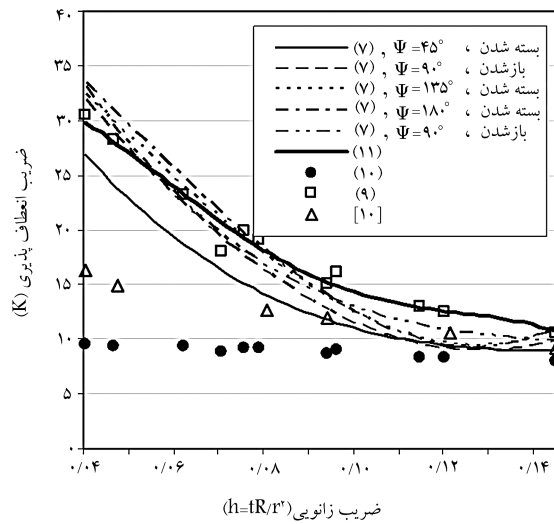
شکل ۳ تغییرات ضریب انعطاف پذیری را برحسب ضریب زانویی تحت گشتاور برون صفحه‌ی بی نشان می‌دهد. چنان که مشاهده می‌شود برخلاف حالت قبل، بر اثر تغییر زاویه‌ی خم زانویی، هنگامی که فقط تحت گشتاور برون صفحه‌ی بی قرار گرفته باشد -- به ویژه برای ضرایب زانویی کوچک تر -- انعطاف پذیری کاهش می‌یابد. در



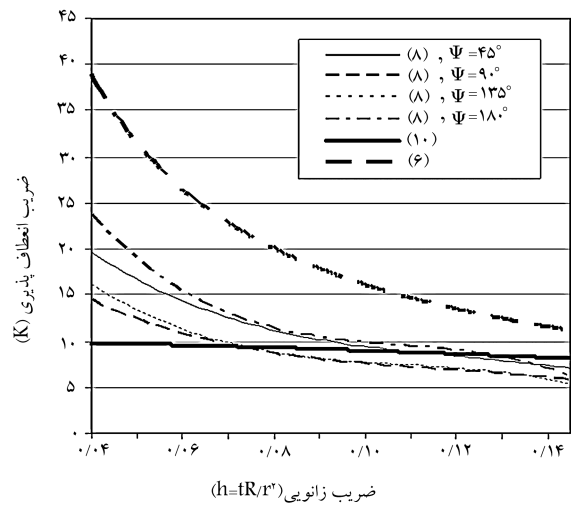
شکل ۴. ترکیب خمش درون‌صفحه‌یی با فشار داخلی.



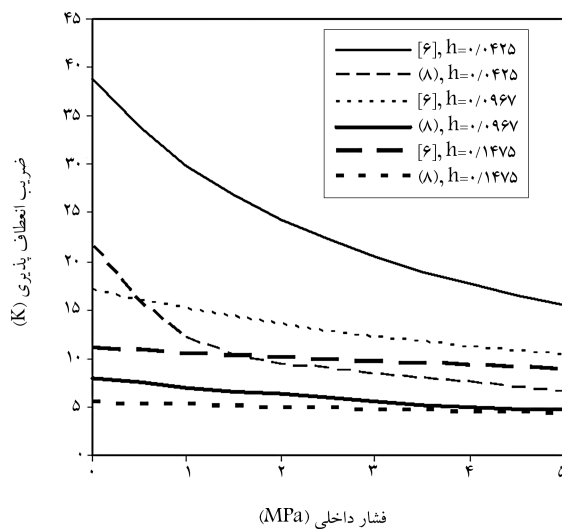
شکل ۲. مقایسه‌ی ضرایب انعطاف‌پذیری: خمش درون‌صفحه‌یی.



شکل ۵. تأثیر جهت بردار خمش درون‌صفحه‌یی همراه با فشار داخلی بر انعطاف‌پذیری.



شکل ۳. مقایسه‌ی ضرایب انعطاف‌پذیری در خمش بیرون‌صفحه‌یی.



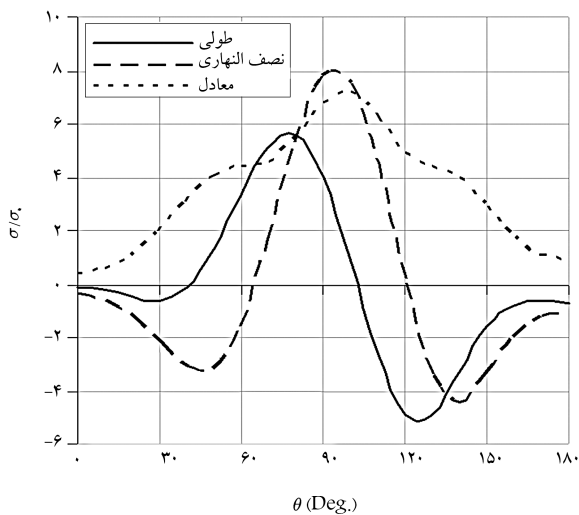
شکل ۶. ترکیب خمش بیرون‌صفحه‌یی با فشار داخلی.

بررسی حاضر ضریب انعطاف‌پذیری برای این حالت بسیار کم‌تر از نتایج حاصل از رابطه‌ی ۶ ولی بیشتر از نتایج حاصل از رابطه‌ی ۱۰ (برای ضرایب زانویی کوچک) به دست آمده است.

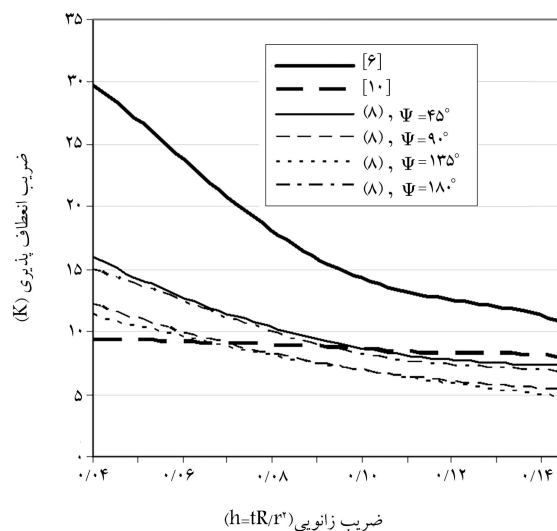
در شکل ۴ تأثیر فشار داخلی و جهت گشتاور درون‌صفحه‌یی بر این ضریب نشان داده شده است. با افزایش فشار، انعطاف‌پذیری تحت گشتاور خمشی درون‌صفحه‌یی کاهش می‌یابد درحالی‌که جهت این گشتاور تأثیر قابل ملاحظه‌یی بر آن دارد. با افزایش ضریب زانویی این تأثیر کم‌تر می‌شود.

در شکل ۵ تأثیر ضریب زانویی بر انعطاف‌پذیری زانویی که علاوه بر گشتاور خمشی درون‌صفحه‌یی تحت فشار داخلی نیز قرار دارد، نشان داده شده است. صرف نظر از جهت گشتاور و تحت فشار معین، این شکل نشان می‌دهد که برای ضرایب زانویی بیشتر از ۰/۱۱۲۵، نتایج حاصل از بررسی حاضر به نتایج حاصل از رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک است ولی از نتایج حاصل از رابطه‌ی ۱۰ بیشتر است. برای ضرایب زانویی کم‌تر از ۰/۱۱۲۵ اختلاف‌ها قابل ملاحظه‌اند.

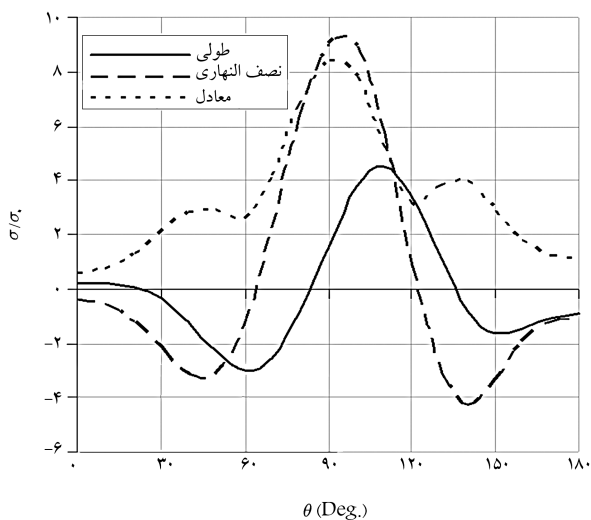
در شکل‌های ۶ و ۷، نمودارهای مشابهی برای گشتاور بیرون‌صفحه‌یی همراه با



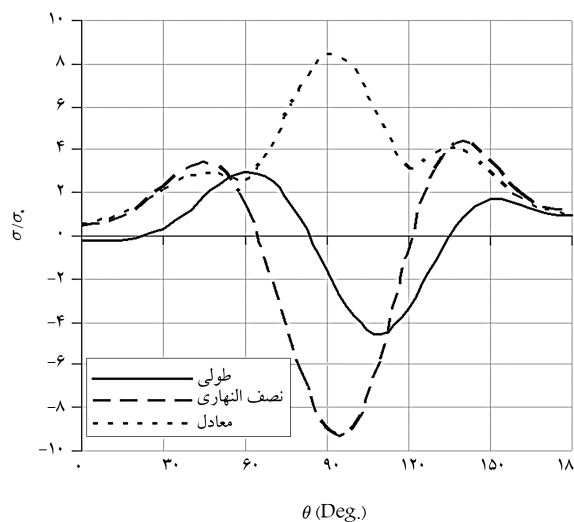
شکل ۹. توزیع تنش در سطح داخلی تحت گشتاور درون صفحه‌یی (بستن).



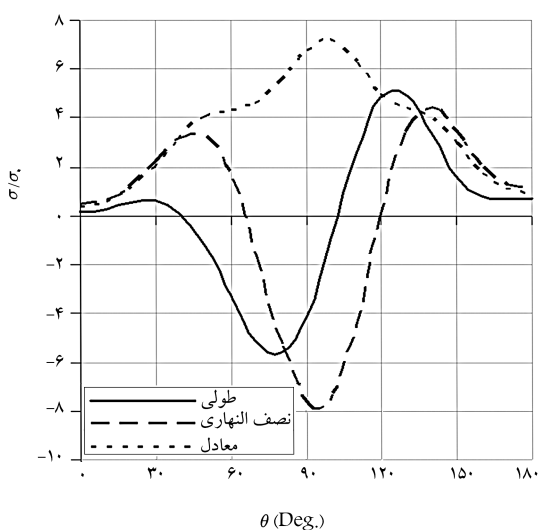
شکل ۷. ترکیب خمش بر روی صفحه‌یی با فشار داخلی.



شکل ۱۰. توزیع تنش در سطح بیرونی تحت گشتاور درون صفحه‌یی (بازکردن).



شکل ۸. توزیع تنش در سطح بیرونی تحت گشتاور درون صفحه‌یی (بستن).



شکل ۱۱. توزیع تنش در سطح داخلی تحت گشتاور درون صفحه‌یی (بازکردن).

فشار داخلی ارائه شده است. در این نوع بارگذاری نتایج حاصل از بررسی حاضر که از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آیند کم‌تر از مقادیر حاصل از رابطه‌ی ۱۱ است.

۲.۴. تحلیل تنش‌ها

برای زانویی ۹۰ درجه با ضریب زانویی $h=0,967$ (ضخامت $t=6,35$ mm)، $R=60,976$ mm و $r=200$ mm که به‌عنوان مدل مینا انتخاب شده است، تنش طولی (σ_α) و تنش نصف‌النهاری (σ_θ) و تنش مؤثر (σ_e) در مقطع میانی زانویی و بر روی سطوح داخلی و بیرونی تحت گشتاور خمشی درون صفحه‌یی محاسبه و به کمک تنش $\sigma_0 = M/(\pi tr^2)$ که در لوله‌ی مستقیم معادل زانویی به وجود می‌آید، بدون بعد شده‌اند. نتیجه‌ی محاسبات برای گشتاورهایی که زانویی را می‌بندند یا باز می‌کنند در شکل‌های ۸ تا ۱۱ رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که جهت گشتاور خمشی درون صفحه‌یی، اگرچه توزیع تنش‌های طولی و محیطی را تغییر می‌دهد، تأثیر قابل ملاحظه‌یی بر مقادیر تنش مؤثر ندارد.

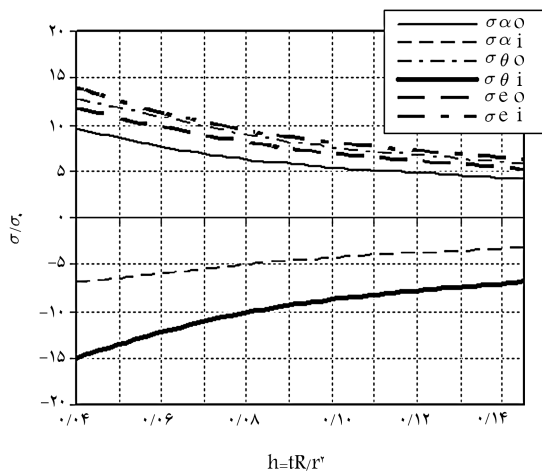
تنش‌های بدون بعد حاصل از بررسی حاضر (FE) برای گشتاوری که زانویی

این دسته از زانویی‌ها کاهش می‌یابد؛ لذا طراح سیستم‌های لوله‌کشی باید یک نوع سازش بین این دو کمیت ایجاد کند تا زانویی ضمن برخورداری از اعطاف‌پذیری مطلوب مقاومت لازم را نیز داشته باشد.

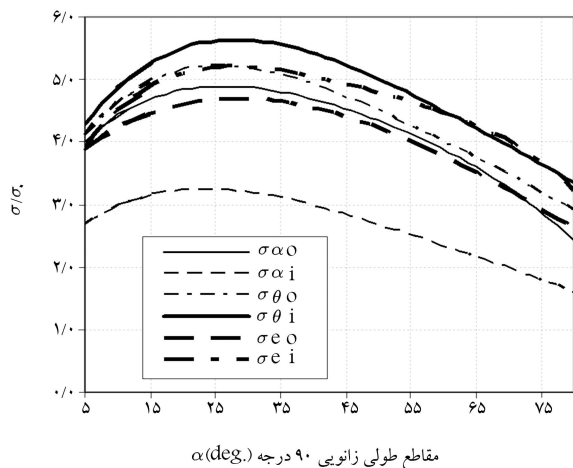
اگر بردار گشتاور خمشی برون‌صفحه‌یی به زانویی وارد شود، تنش‌های بیشینه در مقطع میانی (مقطعی که زانویی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند) واقع نمی‌شوند. در شکل ۱۵ توزیع تنش‌های بیشینه در مقاطع مختلف برای مدل مینا و برای این وضعیت بردار خمش نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود بیشترین مقادیر تنش‌ها در مقطع $35 \sim 20 = \alpha$ درجه به وجود می‌آید.

در شکل ۱۶ تنش‌های طولی و محیطی یا نصف‌النهاری برای مقطع $22/5 = \alpha$ که در بررسی حاضر به دست آمده‌اند با نتایج حاصل از روابط ۲۰ و ۲۱ نشان می‌دهد. مقادیر بیشینه تنش محیطی حاصل از بررسی حاضر به بیش از دو برابر نتایج حاصل از معادلات ذکر شده می‌رسد.

بیشترین تنش‌های طولی، محیطی و مؤثر روی سطوح بیرونی و داخلی برای



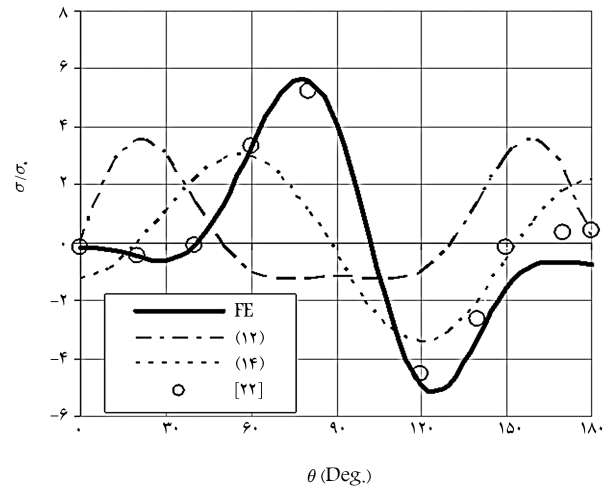
شکل ۱۴. مقایسه‌ی بیشینه‌ی تنش‌های طولی، محیطی و مؤثر برای زانویی‌هایی با ضریب متفاوت تحت خمش درون‌صفحه‌یی بسته‌شدن. حروف i و o به ترتیب برای سطوح داخلی و بیرونی است.



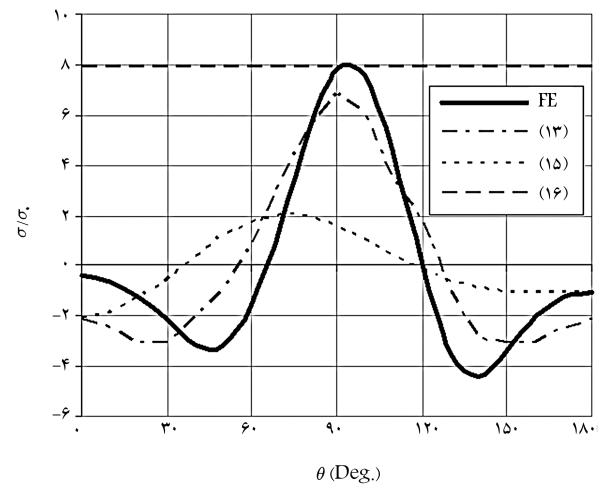
شکل ۱۵. تغییرات تنش‌های بیشینه در مقاطع طولی زانویی تحت خمش برون‌صفحه‌یی، حروف i و o به ترتیب برای سطوح داخلی و بیرونی است.

را می‌بندد، با نتایج حاصل از روابط ۱۲ و ۱۴ در شکل ۱۲، و با نتایج حاصل از روابط ۱۳، ۱۵ و ۱۶ در شکل ۱۳ مقایسه شده‌اند. چنان که ملاحظه می‌شود در مواردی توزیع تنش‌ها و مقادیر بیشینه‌ی آن‌ها با یکدیگر متفاوت است. مثلاً در شکل ۱۳ اگرچه تنش‌های محیطی در جدار داخلی و بیرونی طبق معادله‌ی ۱۶ مقدار ثابتی برآورد می‌شوند، بیشینه‌ی آن‌ها با نتایج اجزاء محدود منطبق است. معادله‌ی ۱۳ تغییراتی مشابه نتایج بررسی حاضر دارد ولی معادله‌ی ۱۵ مقادیر بیشینه را تا یک‌چهارم مقادیر حاصل از روش اجزاء محدود نشان می‌دهد. در مورد تنش‌های طولی، نتایج بررسی حاضر فقط با برخی از نتایج موجود [۲۲] انطباق خوبی دارد ولی مقادیر بیشینه و محل آن‌ها، چنانچه از معادلات ۱۲ و ۱۴ به دست آیند، با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود بسیار متفاوت‌اند. به نظر می‌رسد ساده‌سازی‌هایی که برای استخراج معادلات منظور شده است منشاء این اختلافات باشد.

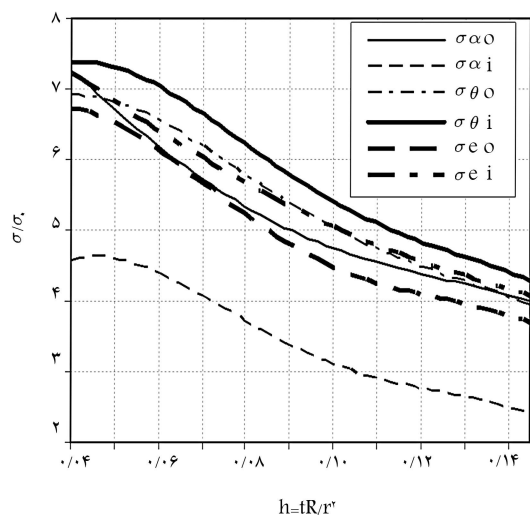
تنش‌های بیشینه‌ی طولی، محیطی و مؤثر برای دسته‌یی از زانویی‌ها با ضریب زانویی $0.04 \sim 0.14$ در شکل ۱۴ رسم شده‌اند. چنان که ملاحظه می‌شود با افزایش ضریب زانویی مقادیر بیشینه‌ی تنش کاهش می‌یابد. اگرچه از لحاظ مقاومت بهتر است ضریب زانویی بزرگ‌تری انتخاب شود، باید توجه داشت که اعطاف‌پذیری



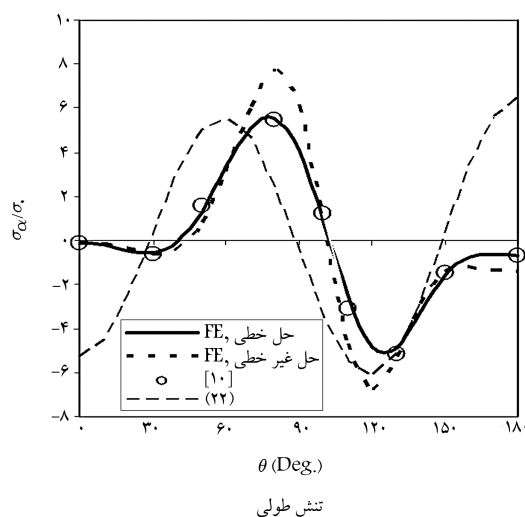
شکل ۱۶. مقایسه‌ی تنش‌های طولی (بستن).



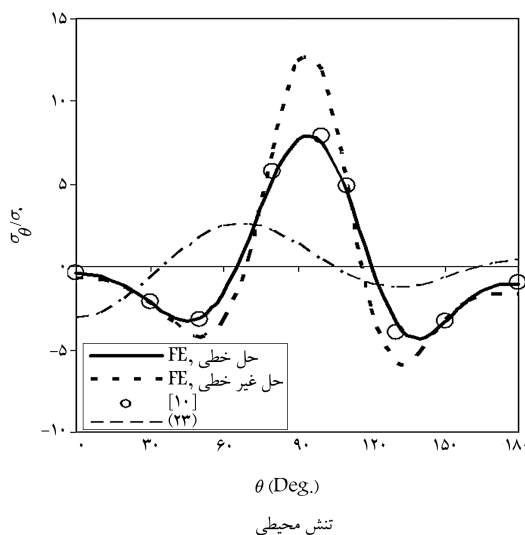
شکل ۱۷. مقایسه‌ی تنش‌های محیطی (بستن).



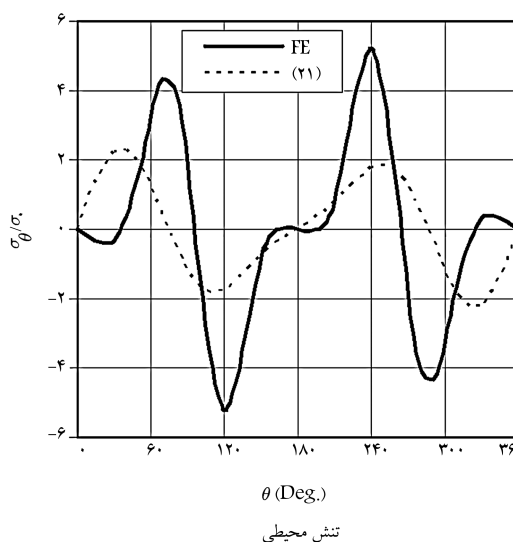
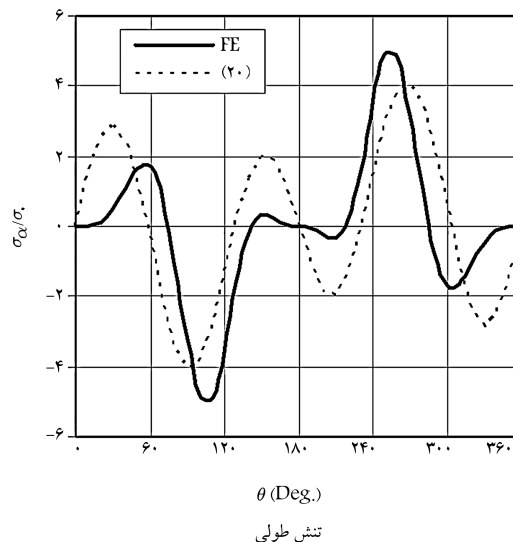
شکل ۱۷. تنش های بیشینه ی طولی، محیطی و مؤثر برای زانویی های مختلف تحت خمش برون صفحه یی. حروف i و o به ترتیب برای سطوح داخلی و بیرونی است.



شکل ۱۶. مقایسه ی تنش های بیشینه ی طولی و محیطی حاصل از منابع دیگر با نتایج بررسی حاضر در مقطع $\alpha = 22.5^\circ$ و روی سطح بیرونی.



شکل ۱۸. مقایسه ی تنش ها در سطح بیرونی مدل مینا تحت بارگذاری مرکب خمشی در جهت بستن و فشار داخلی.



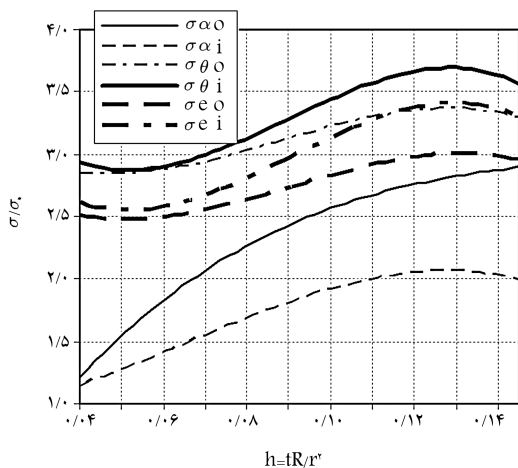
زانویی ها با اندازه های مختلف در شکل ۱۷ نشان داده شده است. در این حالت نیز کاهش تنش در مواردی اتفاق می افتد که انعطاف پذیری زانویی نیز کاهش می یابد و باید مورد توجه طراح قرار گیرد.

۳.۴. تأثیر فشار داخلی

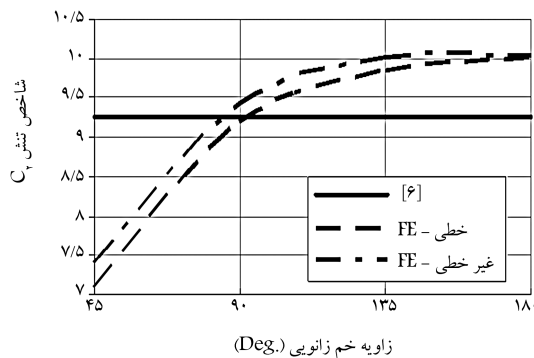
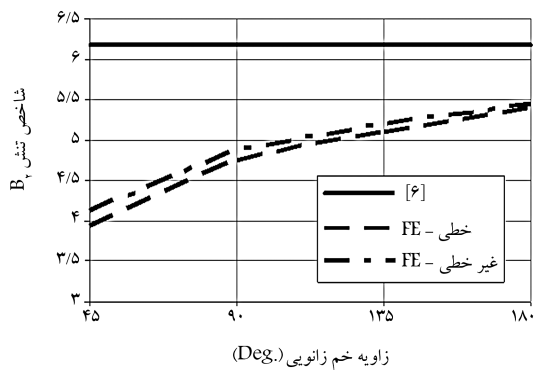
در شکل ۱۸ تنش های طولی و محیطی یا نصف النهاری حاصل از تحلیل خطی و غیرخطی روی سطح بیرونی مقطع میانی زانویی مدل مینا، و تحت بارگذاری مرکب گشتاور خمشی در جهت بستن و فشار داخلی با نتایج حاصل از منابع دیگر و روابط ۲۲ و ۲۳ مقایسه شده است. در این نوع بارگذاری تنش در لوله ی مستقیم معادل به صورت $\sigma_o = \frac{Mr}{I} + \frac{Pr}{rt}$ محاسبه می شود که در آن P فشار داخلی است. چنان که ملاحظه می شود اگر فشار داخلی و خمش درون صفحه یی به طور هم زمان بر زانویی وارد شوند نتایج حاصل از بررسی حاضر در تحلیل خطی، تنش های طولی و محیطی را با دقت کافی در مقایسه با نتایج موجود [۱۰] برآورد می کند هرچند که با نتایج حاصل از معادلات ۲۲ و ۲۳ اختلاف زیادی دارند.

باشد، تأثیر آن بر تغییرات تنش ناچیز است. اگر فشار داخل و گشتاور برون صفحه‌یی به‌طور هم‌زمان به زانویی وارد شوند بیشینه تنش‌های طولی، محیطی و مؤثر با ضریب زانویی افزایش خواهد یافت (شکل ۲۱).

برای ارزیابی نتایج حاصل از بررسی حاضر با ضرایب B_2 و C_2 برنامه‌یی رایانه‌یی نوشته شد^[۶] تا بتوان بیشترین مقادیر تنش‌ها را برای راستاهای موجد گشتاور برون صفحه‌یی در زانویی محاسبه، و سپس با استفاده از تعریف این ضرایب آنها را محاسبه کرده و نتایج را با آنچه که از روابط ۱۸ و ۱۹ به‌دست می‌آید سنجید. در این بررسی تحلیل خطی و غیرخطی هندسی انجام، و نتایج در شکل ۲۲ ارائه شده است.

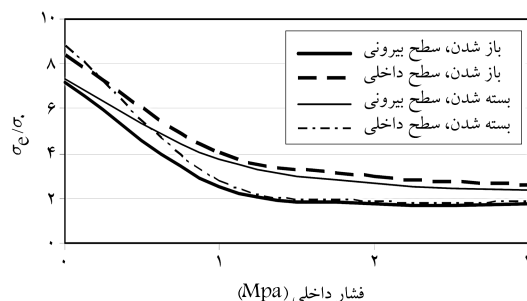


شکل ۲۱. بیشینه تنش‌های طولی، محیطی و مؤثر برای زانویی‌های مختلف تحت بارگذاری مرکب خمشی خارج از صفحه و فشار داخلی.

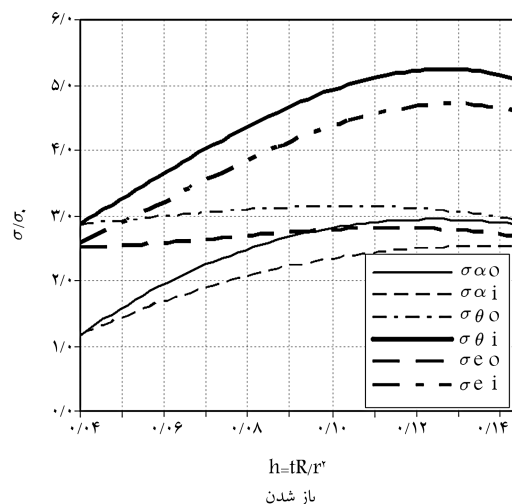
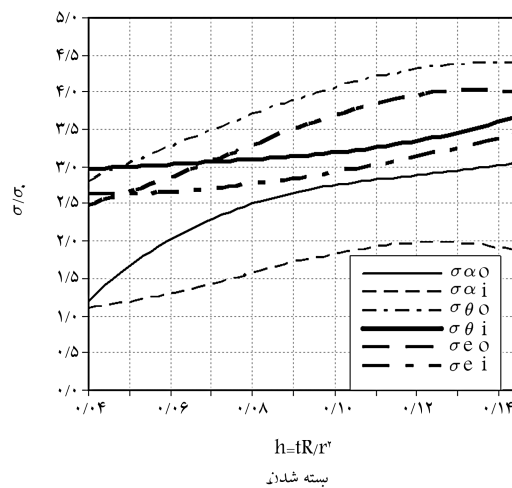


شکل ۲۲. مقایسه‌ی شاخص‌های تنش.

در شکل ۱۹ تغییرات مقادیر بیشینه تنش مؤثر برای مدل مینا در فشارهای مختلف و تحت گشتاور خمشی درون صفحه‌یی، برای حالت باز شدن یا بسته شدن زانویی نشان داده شده است. در شکل ۲۰ نیز این تغییرات تحت گشتاور خمشی درون صفحه‌یی و برحسب ضریب زانویی رسم شده است. شکل ۲۱ نمودارهای مشابهی را برای هنگامی که گشتاور برون صفحه‌یی و فشار داخلی بر زانویی وارد شوند، نشان می‌دهد. چنان که مشاهده می‌شود، در مواردی که فشار زانویی زیاد



شکل ۱۹. تغییرات تنش مؤثر با فشار داخلی برای مدل مینا تحت گشتاور خمشی.



شکل ۲۰. تغییرات تنش بیشینه و مؤثر برای زانویی‌های مختلف تحت بارگذاری مرکب خمشی و فشار داخلی. حروف i و o به ترتیب برای سطوح داخلی و بیرونی است.

چنان که مشاهده می‌شود، روش موجود برای محاسبه‌ی شاخص تنش‌های اولیه‌ی B_2 [6] در جهت اطمینان است ولی این روش برای محاسبه‌ی شاخص مجموع تنش‌های اولیه و ثانویه (C_2)، فقط برای زوایای زانویی کم‌تر از 90° درجه در جهت اطمینان است. برای زانویی‌های با زاویه مرکزی بیش از 90° درجه این شاخص‌ها کم‌تر از نتایج حاصل از بررسی حاضر محاسبه می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که طبق روش پیشنهادی قبلی [6] تأثیر زاویه‌ی خم بر B_2 و C_2 نادیده گرفته شده است، ولی این ضرایب ممکن است با افزایش زاویه‌ی زانویی تا 50% افزایش یابند.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار نتایج حاصل از بررسی پارامتری مدل اجزای محدود زانویی، به عنوان بخشی از یک لوله‌ی خمیده، ارائه شد. تأثیر زاویه‌ی خم و نیز تأثیر هم‌زمان فشار داخلی و گشتاور خارجی بر ضرایب انعطاف‌پذیری و تمرکز تنش که از مشخصه‌های سازهبی زانویی هستند، در بعضی از بررسی‌های دیگران به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم نادیده گرفته شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد که در مواردی نادیده گرفتن این عوامل اختلاف‌های قابل توجهی در این ضرایب به وجود می‌آورد. بنابراین برای ارزیابی دقیق‌تر، علاوه بر تحلیل خطی، تحلیل غیرخطی هندسی نیز انجام شد. نتایج حاصل از تحلیل خطی، با نتایج موجود [11] که در شکل ۱۸ نمایان است، انطباق مطلوبی دارد ولی تنش‌های بیشینه حاصل از تحلیل غیرخطی بسیار بیشتر برآورد

می‌شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود در نحوه‌ی محاسبه‌ی ضرایب B_2 و C_2 تجدید نظر شود و در صورت لزوم، روابط مربوط به آنها اصلاح شوند. توجه به موارد زیر نیز توصیه می‌شود:

- تحت گشتاور خمشی درون‌صفحه‌یی، زاویه‌ی خم زانویی بر انعطاف‌پذیری آن تأثیر قابل ملاحظه‌یی ندارد ولی اگر خمش برون‌صفحه‌یی باشد، این تأثیر قابل ملاحظه است.
- با کاهش ضریب زانویی تحت هر نوع بارگذاری، انعطاف‌پذیری و ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد. افزایش فشار داخلی موجب کم‌شدن انعطاف‌پذیری زانویی تحت هر نوع بارگذاری می‌شود.
- جهت گشتاور خمشی درون‌صفحه‌یی و برون‌صفحه‌یی بر انعطاف‌پذیری و توزیع تنش‌ها تأثیر دارد اما در برآوردهای تقریبی می‌توان از این تأثیر چشم‌پوشی کرد.
- برای زانویی‌های بیش از 90° درجه افزایش ضریب C_2 نباید نادیده گرفته شود ولی تغییر ضریب B_2 با زاویه‌ی زانویی را می‌توان نادیده گرفت.
- اگرچه تحت گشتاور درون‌صفحه‌یی مقطع بحرانی در صفحه‌ی تقارن قرار دارد ولی تحت گشتاور برون‌صفحه‌یی تنش‌های بیشینه در این صفحه ظاهر نخواهند شد و باید با توجه به زاویه‌ی زانویی محل آن‌ها را پیدا کرد.
- در تحلیل‌های نظری زانویی، به کمک روش اجزاء محدود و به دلیل این که ساده‌سازی‌های کم‌تری در آن اعمال می‌شود، می‌توان انعطاف‌پذیری و تنش‌های بیشینه را تحت انواع بارگذاری‌های مرکب با سرعت و سادگی و با دقت کافی به دست آورد.

منابع

1. Calladine, C.R., *Theory of shell Structures*, Cambridge University Press (1983).
2. Flugge, W., *Stresses in Shells*, 2nd edn, Berlin: Springer-Verlag (1973).
3. Kitching, R., *Smooth and Mitred Pipe Bends*, chap. 7 in "The stress analysis of pressure vessels & pressure vessels components", ed. by Gill S.S., New York, Pergamon Press (1970).
4. Clark, R.A., and Reissner, E. "Bending of curved tubes", *In Advances in Applied Mechanics*, **2**, pp. 93-122, New York, Academic press, Inc. (1951).
5. Kellogg Company "Design of piping systems", 2nd ed., New York, J. Wiley & sons (1956).
6. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Sec. III, Div. 1, American Society of Mechanical Engineers, New York, N.Y. (1998).
7. Matzen, V.C., and Tan, Y. "The history of the B2 stress index", *Transactions of the ASME: Journal of Pressure Vessel Technology*, **124**, pp. 168-176 (May 2002).
8. Kumar, R., and Saleem, M.A. "B₂ and C₂ stress indices for large - angle bends", *Transactions of the ASME: Journal of Pressure Vessel Technology*, **124**, pp. 177-186 (May 2002).
9. Fujimoto, T., and Soh, T. "Flexibility factors and stress indices for piping components with $D/t \geq 100$ subjected to in-plane or out-of-plane moment", *Transactions of the ASME: Journal of Pressure Vessel Technology*, **110**, pp. 374-386 (Nov. 1988).
10. Natarjan, R., and Mirza, S. "Effect of internal pressure on flexibility factors in pipe elbows with end constraints", *Transactions of the ASME: Journal of Pressure Vessel Technology*, **107**, pp. 60-63 (Feb. 1985).
11. Babaii Kocheksaraii, S., *Mitred Pipe Bends Subject to Internal Pressure and in-Plane Bending Moment*, PhD Thesis, Faculty of technology, The University of Manchester (1994).
12. Melo, F.J.M.Q., and Castro, P.M.S.T. "The linear elastic stress analysis of curved pipes under generalized loads using a reduced integration finite ring element", *Journal of Strain Analysis*, **32**(1), pp. 47-59 (1997).
13. Shalaby, M.A., and Younan, M.Y.A. "Nonlinear analysis and plastic deformation of pipe elbows subjected to in-plane bending", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **75**, pp. 603-611 (1998).
14. Younan, M.Y.A., and Mourad, H.M. "The effect of modeling parameters on the predicted limit loads for pipe bends subjected to out-of-plane moment loading and internal pressure", *Transactions of the ASME: Journal*

- of *Pressure Vessel Technology*, **122**, pp. 450-456 (Nov. 2000).
15. Younan, M.Y.A., and Mourad, H.M. "Limit load analysis of pipe bends under out-of-plane moment loading and internal pressure", *Transactions of the ASME: Journal of Pressure Vessel Technology*, **124**, pp. 32-37 (Feb. 2002).
 16. Chattopadhyay, J. "The effect of internal pressure on in-plane collapse moment of elbows", *Nuclear Engineering and Design*, **212**, pp. 133-144 (2002).
 17. Abdalla, H.F.; Megahed, M.M., and Younan, M.Y.A. "Determination of shakedown limit load for a 90-degree pipe bend using a simplified technique", *Journal of Pressure Vessel Technology*, **128**, pp. 618-624 (Nov. 2006).
 18. Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N. "Theory of elasticity", 3rd ed., McGraw-Hill (1982).
 19. Gill, S.S., *The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components*, Pergamon press (1970).
 20. Melo, F.J.M.Q.; Fonseca E.M.M., and Oliveir C.A.M. "Determination of flexibility factors in curved pipes with end restraints using a semi-analytic formulation", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **79**, pp. 829-840 (2002).
 21. Minaeefar, M. "Stress and strain analysis in curved tubes and pipe-bends", M.Sc. Dissertation, Applied Mechanics Department, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran (2007).
 22. ANSYS 9.0, program documentation. SAS IP, Inc. (2004).
 23. Melo, F.Q., and Madureira L. "Stress analysis of curved pipes with a hybrid formulation", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **81**, pp. 243-249 (2004).

