

توسعه‌ی روش سهمی‌گون تک‌یی (PPM) چندماده‌یی با استفاده از روش بازسازی مرز VOF

حامد کرامتی (کارشناس ارشد)

کیومرث مظاهری (دانشیار)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

عدم توجه به وجود مرز بین مواد در میدان حل، حتی در استفاده از روش‌های حل عددی با دقت بالا، نظیر روش سهمی‌گون تک‌یی (PPM)^۱، به اختلالاتی همچون ناپایداری و واگرایی نتایج طی فرایند حل عددی یا نادرستی نتایج می‌انجامد. به منظور جلوگیری از بروز چنین مواردی، از روش‌های دنبال‌سازی مرز استفاده می‌شود. در روش‌های دنبال‌سازی مرز، موقعیت و شکل مرز بین دو ماده در هر بازه زمانی تعیین، و سپس خواص سلول‌های شامل این مرز (سلول‌های مخلوط) با استفاده از روابطی خاص تحت عنوان «مدل مخلوط» محاسبه می‌شود. در بررسی حاضر برای حل عددی معادلات از روش گودونفنی PPM استفاده شده و برای افزایش دقت این روش در برخورد با مسائل چندماده‌یی، از میان انواع روش‌های دنبال‌سازی مرز، روش حجم مایع (VOF)^۲ انتخاب شده است. از میان مدل‌های مخلوط موجود نیز، مدل «هم‌فشار - هم‌انرژی» و مدل «کسر حجمی ثابت» انتخاب شده و به منظور یافتن مدل مناسب‌تر، نتایج استفاده از آن دو با هم مقایسه شده است. نتایج عددی حاصل از استفاده از روش VOF در حل مسئله‌ی لوله شکاف چندماده‌یی، بهبود قابل ملاحظه‌یی را در مقایسه با روش PPM نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: دنبال‌سازی مرز، روش حجم سیال (VOF)، مدل مخلوط، روش سهمی‌گون تک‌یی (PPM).

مقدمه

وجود سطح مشترک^۳ بین دو ماده در میدان حل، به معنای وجود ناپوستگی در خواص جریان در داخل میدان است. وجود این مرزها را می‌توان در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی -- همچون جریان‌های چندفازی، حرکت حباب‌در سیال جوشان، جریان مخازن سیال زیرزمینی، ریخته‌گری فلزات مذاب، حرکت شعله‌ها و امواج احتراقی، حرکت توده‌ی گاز در هوا و بسیاری از پدیده‌های دیگر -- مشاهده کرد. عدم توجه به وجود چنین ناپوستگی در حل عددی، نهایتاً فرایند حل عددی را مختل می‌کند یا سبب نادرستی نتایج می‌شود. در بررسی حاضر نیز بر حذف این موارد، که هنگام استفاده از روش عددی سهمی‌گون تک‌یی (PPM) در حل مسائل دینامیک گاز چندماده‌یی به وجود می‌آید، تأکید شده است.

برای انجام این امر نیاز به سازوکاری است تا در روش‌های عددی، موقعیت و شکل مرز را به خوبی مدل کند. روش‌های فراوانی برای این منظور ارائه شده که می‌توان آنها را به دو دسته‌ی عمده تقسیم کرد. در دسته‌ی اول که به روش‌های «تعقیب مرز»^۴ موسوم‌اند، مرز با یک شبکه‌ی محاسباتی منفصل می‌شود. به طور کلی، روش‌های تعقیب مرز هزینه‌ی محاسباتی بالایی دارند. از مهم‌ترین روش‌های تعقیب مرز می‌توان به روش تعقیب جبهه^۵ اشاره کرد.^[۱] در دسته‌ی دوم روش‌ها

که به روش‌های «تسخیر مرز»^۶ موسوم‌اند، حرکت مرز درون یک شبکه‌ی محاسباتی ثابت بررسی می‌شود. در این روش‌ها انعطاف‌پذیری دنبال‌کردن مرز در مقایسه با روش‌های تعقیب مرز بالاتر، و همچنین هزینه‌های محاسباتی آن در مقایسه با روش‌های تعقیب مرز پایین‌تر است.^[۱] از مهم‌ترین روش‌های تسخیر مرز می‌توان به روش حجم مایع (VOF) و روش چینش هم‌تراز^۷ اشاره کرد.^[۲]

در بررسی حاضر روش VOF برای مدل‌سازی رفتار مرز بین دو ماده انتخاب شده است. در این روش که وسیعاً مورد استفاده‌ی محققین قرار گرفته است،^[۳] مرز بین دو فاز مختلف سیال با محاسبه‌ی حجم کسرهایی از سلول که توسط فازهای مختلف اشغال شده، بازسازی می‌شود. روش VOF ضمن برخورداری از مفاهیمی کاملاً ساده و قابل فهم، و نیز برخورداری از دقت بالا هزینه‌ی محاسباتی کمی دارد. از میان تمامی روش‌های تسخیر مرز، فقط روش VOF ذاتاً قادر به حفظ جرم هر یک از سیال‌های موجود در میدان است به طوری که در بسیاری از کاربردها می‌توان از کلیه‌ی معایب احتمالی این روش، در برابر مشخصه‌ی حفظ پایستاری جرم آن، چشم‌پوشی کرد.^[۵] در این روش تغییرات توپولوژیکی مرز سبب پیچیدگی الگوریتم نمی‌شود. همچنین بار محاسباتی مورد نیاز برای این دسته از روش‌ها معمولاً کم‌تر از سایر روش‌های دنبال‌سازی مرز است.^[۶]

استفاده از روش VOF شامل دو مرحله‌ی اصلی است که در هر بازه

تاریخ: دریافت ۱۳۸۷/۹/۹، داوری ۱۳۸۸/۵/۱۳، پذیرش ۱۳۸۸/۱۲/۱۰.

معادلات حاکم و روش گسسته‌سازی

معادلات حاکم در تحقیق حاضر معادلات اویلر است که به شکل لاگرانژی به کار می‌روند، چرا که در روش لاگرانژی مرز همواره در ارتباط با سلول‌های مشخصی است. این معادلات عبارت‌اند از معادلات پایستاری جرم (رابطه ۱)، گشتاور (رابطه ۲) و انرژی (رابطه ۳).

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}(pu) = 0 \quad (3)$$

در این روابط، τ حجم ویژه، u سرعت، p فشار و E انرژی کل در واحد جرم است. t و m نیز به ترتیب بیان‌گر زمان و مختصات جرم هستند. روابط ۱ تا ۳ شکل یک بعدی معادلات اویلرند. در روش حل عددی معادلات در پژوهش حاضر، معادلات دوبعدی با استفاده از روش جداسازی ابعادی^{۱۲} به دو معادله‌ی یک بعدی تجزیه، و از جواب‌های معادله‌ی اول به عنوان شرایط اولیه در معادله‌ی دوم استفاده می‌شود. این معادلات به همراه معادله‌ی حالت گاز ایده آل $p = (\gamma - 1)\rho e$ که در آن e انرژی داخلی است، حل می‌شوند.

با انتگرال‌گیری از معادلات ۱ تا ۳ بر روی یک حجم کنترل که یک سلول از شبکه‌ی لاگرانژی (سلول نشان داده شده در شکل ۱) است، معادلات اویلر یک بعدی گسسته شده در سیستم مختصات لاگرانژی مانند رابطه‌های ۴ تا ۶ نوشته می‌شود.

$$\tau_i^{n+1} = \frac{1}{m_i} (x_{i+1/2}^{n+1} - x_{i-1/2}^{n+1}) \quad (4)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{\tau} (A_{i+1/2}^* + A_{i-1/2}^*) \times \frac{\Delta t}{m_i} [p_{i-1/2}^* - p_{i+1/2}^*] \quad (5)$$

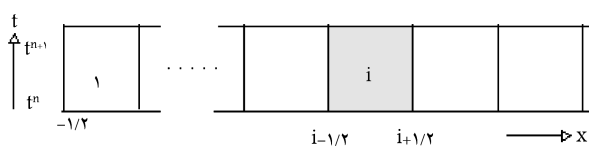
$$E_i^{n+1} = E_i^n + \frac{\Delta t}{m_i} \left[\begin{array}{c} A_{i-1/2}^* u_{i-1/2}^* p_{i-1/2}^* \\ -A_{i+1/2}^* u_{i+1/2}^* p_{i+1/2}^* \end{array} \right] \quad (6)$$

که در آن‌ها:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1/2}^{n+1} = x_{i+1/2}^n + \Delta t \cdot u_{i+1/2}^* \\ A_{i+1/2}^* = \frac{(x_{i+1/2}^{n+1}) - (x_{i+1/2}^n)}{u_{i+1/2}^* \cdot \Delta t} \end{array} \right. \quad (7)$$

علامت ستاره نمایان‌گر مقدار پارامتر بر روی مرز حجم کنترل در بازه زمانی (t^n, t^{n+1}) است. با توجه به معادلات ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود که میانگین جرمی پارامترهای (u, τ, E) در هر سلول، در لحظه‌ی زمانی t^{n+1} به متوسط جرمی آن پارامتر در لحظه‌ی زمانی t^n و سرعت و فشار روی مرزها $(u^*$ و $p^*)$ بستگی دارد.

با معلوم بودن میانگین پارامترها در لحظه‌ی زمانی t^n ، برای محاسبه‌ی u^* و p^* روش گودونف مرتبه‌ی سوم به کار رفته است که در سال ۱۹۸۴ میلادی ارائه شد و به نام PPM معروف است.^{۱۳} هسته‌ی محاسباتی این روش مسئله‌ی ریمن



شکل ۱. طرح‌واره‌ی شبکه یک بعدی محاسباتی مورد استفاده در گسسته‌سازی.

زمانی تکرار می‌شود. در مرحله‌ی اول، با الگوریتمی تحت عنوان بازسازی مرز^{۱۴} هندسه و شکل مرز بین مواد تخمین زده می‌شود. مرحله‌ی دوم نیز شامل حل معادله‌ی جابه‌جایی حجم است که به واسطه آن شار حجمی مبادله شده بین سلول‌ها، کسر حجمی جدید سلول‌ها و موقعیت جدید مرز بین دو سیال مشخص می‌شود.

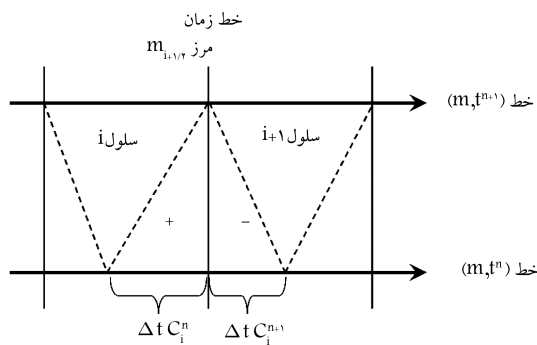
برای بازسازی هندسه‌ی مرز سه گروه روش اصلی شامل الگوریتم‌های تک‌بندی ثابت^{۱۵}، تک‌بندی ثابت پله‌یی^{۱۶} و تک‌بندی خطی^{۱۷}، و نیز برای حل معادله‌ی جابه‌جایی حجم دو نوع الگوریتم شامل الگوریتم مجزا و الگوریتم غیرمجزا ارائه شده است. در یک بازه زمانی از دهه‌ی ۱۹۷۰ و اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰، سه روش اول از روش‌های تعقیب حجمی معرفی شدند: روش دیبارا،^{۱۸} روش SLIC^{۱۹} و روش هرت و نیکولس.^{۲۰}

با وجود دقیق‌تر بودن روش‌های تک‌بندی خطی، بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که اغلب محققین مشکلات و هزینه‌های کم‌تر روش‌های تک‌بندی ثابت را بر دقت بالاتر روش‌های تک‌بندی خطی ترجیح داده‌اند.^{۱۹} پس از روش‌های هرت و نیکولس و SLIC، چندین الگوریتم تعقیب حجمی تک‌بندی ثابت انتشار یافته است. در سال ۱۹۸۰ الگوریتمی برای جابه‌جایی و انتشار شعله با استفاده از روش SLIC مورد استفاده قرار گرفت.^{۲۱} در سال‌های ۱۹۸۲ و ۱۹۸۴، استفاده از الگوریتم SLIC روش احتراق آشفته مدل‌سازی شد.^{۲۲، ۲۳} همچنین در سال‌های ۱۹۸۹ و ۱۹۹۱ با استفاده از این الگوریتم، تأثیر سطح تماس گازی بر امواج ضربه شبیه‌سازی شد.^{۲۴} به‌طور کلی، روش‌های تک‌بندی ثابت، ضمن تکامل همچنان فرضیات ساده‌ی هندسی خود را حفظ کرده‌اند. بنابراین، به‌منظور بازسازی مرز در روش VOF، برای مطالعه‌ی حاضر الگوریتم SLIC^{۲۵} انتخاب شده است. در مطالعه‌ی حاضر با هدف تحلیل یک میدان شامل دو توده گازی، معادلات حاکم با روش عددی PPM حل می‌شوند. بررسی ساختار روش PPM نشان می‌دهد چنانچه در داخل میدان حل تنها یک ماده وجود داشته باشد، الگوریتم ابتدایی این روش بدون هیچ مشکلی نتایج مورد نظر را در اختیار قرار می‌دهد.

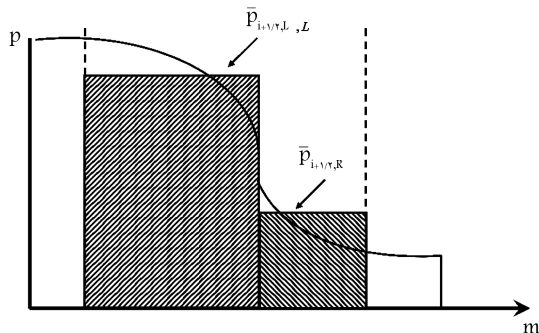
مشکل استفاده از این روش هنگامی پیش می‌آید که فرض یکسان بودن جنس دو توده، مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین، طی تحلیل میدان همواره مرزی بین این دو ناحیه وجود دارد و همواره برخی از سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی وجود دارند که حاوی قسمتی از این مرز هستند. این سلول‌ها تحت عنوان سلول مخلوط نامیده می‌شوند.

هدف از تحقیق حاضر این است که با به کارگیری روش VOF و اتصال آن به روش PPM، موقعیت و شکل مرز بین دو ماده در مسائل چندماده‌یی تعیین، و سپس با استفاده از یک مدل مخلوط خواص سلول‌های مخلوط مشخص شود. نوآوری ارائه شده در این نوشتار، تلفیق یک روش تعقیب مرز و یک مدل مخلوط با الگوریتم PPM است. به این منظور، در این نوشتار چگونگی پیاده‌سازی روش VOF، به‌کارگیری مدل مخلوط و اتصال این دو به روش PPM بیان شده است.

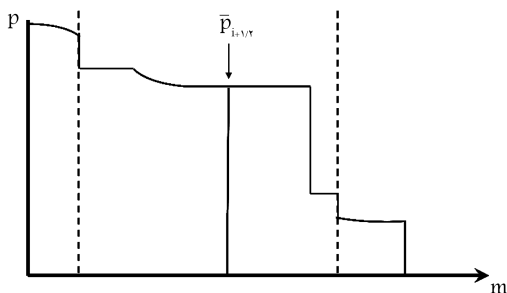
در ادامه، ابتدا معادلات حاکم و روش عددی PPM بیان می‌شود و سپس چگونگی تعقیب موقعیت مرز و بازسازی شکل آن با استفاده از روش VOF-SLIC توضیح داده می‌شود. با انجام این امر و با استفاده از دو مدل مخلوط «هم فشار - هم انرژی» و «کسر حجمی ثابت»، چگونگی محاسبه‌ی خواص سلول‌های مخلوط بیان می‌شود. در انتها نیز با حل مسئله‌ی انتقال و مسئله‌ی لوله‌ی شوک چندماده‌یی، اعتبار روش VOF و دو مدل مخلوط در کنار روش PPM ارزیابی می‌شود.



الف) محدوده‌ی اطراف مرز سلول که مسئله ریمن باید در آن حل شود توسط مسیر امواج صوتی (خطوط مشخصه) تعیین می‌شود؛



ب) میانگین‌گیری از خواص در محدوده‌ی اطراف سلول جهت تعریف و حل مسئله‌ی ریمن؛



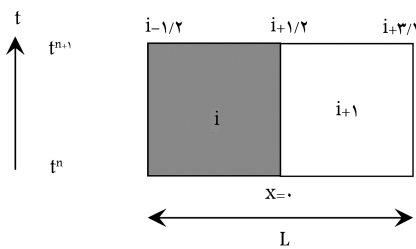
ج) حل مسئله‌ی ریمن و محاسبه‌ی متوسط زمانی خواص در مرز سلول که در محاسبه‌ی فلاکس پارامترهای پایستاری استفاده می‌شود.

شکل ۳. مراحل مربوط به محاسبه فلاکس پارامترهای پایستاری در مسئله‌ی ریمن.

می‌گیرد. با انجام این محاسبات، شبکه‌ی اولیه بدون هیچ تغییر شکلی دارای مقادیر جدید متغیرهای پایستاری می‌شود. فشار هر سلول نیز با استفاده از معادله‌ی حالت محاسبه می‌شود.

بازسازی مرز در روش VOF

در بررسی حاضر، برای بازسازی هندسه‌ی مرز بین دو سیال از الگوریتم SLIC^[۷] استفاده شده است. در روش SLIC مرز در هر سلول مخلوط، به صورت خط (یا خطوطی) موازی با یکی از راستاهای سلول بازسازی می‌شود. الگوریتم SLIC روشی یک‌بعدی است که از اطلاعات کسرهای حجمی مواد در یک بلوک سه‌سولولی، برای بازسازی مرز در سلول وسطی این بلوک استفاده می‌کند. به عبارتی،



شکل ۲. طرح وارهی از مسئله ریمن که در آن دیافراگم در $x=0$ قرار دارد. سیال‌های سمت چپ و راست دیافراگم به ترتیب در سلول‌های i و $i+1$ قرار دارند.

(مسئله‌ی لوله‌ی شوک) است؛ این مسئله یک مسئله‌ی قدیمی در دینامیک گاز است و از دیدگاه محاسباتی در زمره‌ی مسائل «مقدار اولیه» محسوب می‌شود. در شکل ۲ طرح‌واره‌ی از صورت مسئله‌ی ریمن نمایش داده شده است که یک کانال به طول L و یک دیافراگم قابل حرکت در نقطه‌ی $x=0$ را شامل می‌شود؛ خواص سیال در دو طرف دیافراگم متفاوت است، به طوری که:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

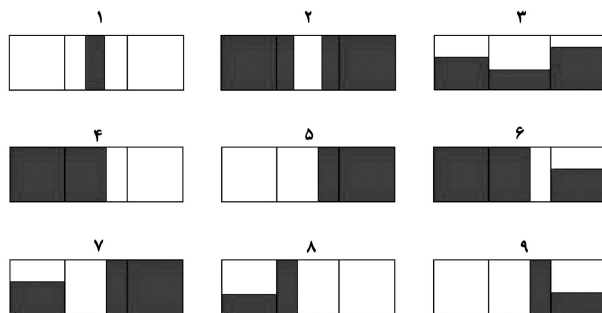
در این رابطه U هریک از خواص سیال است. سیال‌های طرفین دیافراگم ممکن است جنس‌های متفاوتی داشته باشند. در روش‌های گودونگی که روش PPM نیز جزو آنهاست، دو سلول مجاور در شبکه نقش فضاهای طرفین دیافراگم را بازی می‌کنند و مرز سلول‌ها نمایان‌گر دیافراگم است. در روش‌های گودونف محاسبه‌ی متوسط زمانی سرعت دیافراگم (u^*) و فشار دیافراگم (p^*) در فاصله‌ی زمانی Δt هستند. پس از محاسبه‌ی u^* و p^* با استفاده از روابط ۴ تا ۷ می‌توان خواص را پس از گذشت زمان Δt در لحظه‌ی زمانی t^{n+1} به دست آورد. به طور کلی در روش‌های گودونف برای محاسبه‌ی U_j^{n+1} چهار مرحله‌ی محاسباتی انجام می‌شود:

۱. میان‌یابی پارامترهای وابسته (p, u, τ) در مختصات جرم و در لحظه‌ی زمانی t^n ؛
۲. تعیین شرایط اولیه‌ی مسئله‌ی ریمن؛
۳. حل مسئله‌ی ریمن در سلول‌های هم‌جوار؛
۴. محاسبه‌ی پارامترهای پایستاری سلول‌ها در لحظه‌ی زمانی جدید.

مراحل حل مسئله‌ی ریمن در شکل ۳ نمایش داده شده‌است. در بررسی حاضر، گام زمانی از شرط پایداری CFL تعیین می‌شود.

$$\frac{\Delta x}{C(\Delta t)} = CFL \leq 1 \quad (9)$$

Δx پهنای کوچک‌ترین سلول و C سرعت صوت در این سلول است. پس از هر مرحله از حل لاگرانژی، شبکه‌ی محاسباتی موجود دچار تغییر شکل می‌شود که این تغییر شکل پس از گذشت چند بازه زمانی می‌تواند سبب کاهش دقت یا حتی نادرستی متغیرهای حاصل از حل لاگرانژی شود. برای غلبه بر این مشکل، روش لاگرانژی با یک الگوریتم تحت عنوان الگوریتم «انتقال» ترکیب می‌شود. با استفاده از مرحله‌ی «انتقال»، ضمن این که توزیع جرم در کل میدان ثابت نگه داشته می‌شود، مرزهای سلول‌های لاگرانژی به محل اولیه‌ی خود در شروع حل لاگرانژی برگردانده شده و توزیع خواص از شبکه‌ی تغییر شکل داده شده به شبکه‌ی اولیه منتقل می‌شود. این عمل با توجه به میزان تغییر مکان مرزهای شبکه نسبت به حالت اولیه انجام



شکل ۴. نه حالت ممکن برای بازسازی هندسه مرز در جهت x، در روش SLIC^[۷].

برای بازسازی هندسه مرز در یک سلول مخلوط، در جهت x، از اطلاعات حجمی مواد در آن سلول و دو سلول همسایه‌ی آن در جهت افقی و برای بازسازی هندسه‌ی آن مرز در جهت y، از اطلاعات آن سلول و دو سلول همسایه‌ی آن در جهت عمودی استفاده می‌کند. در روش SLIC، با توجه به چگونگی توزیع مواد در این ردیف سه‌سلولی، در هریک از جهت‌های مختصات، نه حالت مختلف برای چگونگی واقع شدن مرز در سلول مرکزی این ردیف (سلول مخلوط مورد نظر) به وجود خواهد آمد.^[۷] در شکل ۴ این نه حالت، برای بازسازی هندسه‌ی مرز بین دو سیال تیره و روشن، در جهت x، نشان داده شده است. بازسازی مرز در جهت y همانند حالت‌های بیان شده در جهت x است، با این تفاوت که حالت‌های نه‌گانه‌ی شکل ۴، به صورت یک ردیف عمودی از سه سلول مورد بررسی قرار می‌گیرند.

محاسبه‌ی شارهای حجمی و تعیین موقعیت مرز در روش VOF

بخش اصلی دیگر در به‌کارگیری روش VOF این است که پس از بازسازی مرز در هر سلول مخلوط و با توجه به معلوم بودن شکل مرز در این سلول‌ها، تبادل شارهای حجمی بین سلول‌های هم‌جوار محاسبه شود. در نتیجه‌ی این عمل، میزان حجم سیال ورودی به یک سلول یا خارج شده از آن معلوم می‌شود و بنابراین می‌توان کسر حجمی جدید سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی و موقعیت مرز بین دو ماده را در بازه زمانی جدید تعیین کرد.

برای تعیین کسر حجمی جدید سلول‌ها، در برخی از روش‌ها از حل مستقیم معادله‌ی جابه‌جایی حجم استفاده می‌شود. معادله‌ی یک‌بعدی جابه‌جایی حجم و شکل گسسته‌ی آن به ترتیب به صورت روابط ۱۰ و ۱۱ هستند:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uf) = 0 \quad (10)$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + (F_{i-1/2}^n - F_{i+1/2}^n) \quad (11)$$

که در آن f کسر حجمی یک سلول و u مؤلفه‌ی افقی سرعت است. در رابطه‌ی ۱۱ کسر حجمی جدید سلول i ام، در مرحله‌ی زمانی $n + 1$ با استفاده از کسر حجمی آن سلول در مرحله‌ی زمانی n و مقدار شار حجمی که از مرزهای سلول در مرحله‌ی زمانی n عبور می‌کند، محاسبه می‌شود. $F_{i+1/2}^n$ و $F_{i-1/2}^n$ به ترتیب عبارت‌اند از شار کسر حجمی که در مرحله‌ی زمانی n از مرزهای چپ و راست سلول عبور می‌کنند. حل مستقیم معادله‌ی ۱۰ با استفاده از شکل گسسته‌ی آن (رابطه‌ی ۱۱)، معمولاً به گسترش غیرفیزیکی مرز در پهنای سلول‌های شبکه می‌انجامد. بنابراین، محققان از روش‌های دیگری استفاده می‌کنند که به‌وسیله‌ی آن عبارت شار حجمی

(F) در رابطه‌ی ۱۱ تخمین زده می‌شود. این روش‌ها به‌رغم سادگی و فرمول‌پذیری، می‌توانند خطای قابل توجهی را در حل مسئله وارد کنند. در روش دهنده-گیرنده^{۱۳}، که از این تقریب استفاده می‌کند،^[۸] با در نظر گرفتن این که در سلول‌ها، با سیال وجود دارد یا فضای خالی، و یا هر دو، شار حجمی سیال که از مرز یک سلول به سلول پایین دست عبور می‌کند مطابق رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود:

$$F = \delta y \{ \text{MIN} [A, \langle B + \text{MAX} (0, (C - D)) \rangle] \} \quad (12)$$

که در آن، A : بیشترین مقدار سیال موجود در سلول مورد نظر؛ B : شار تخمینی سیال به سلول پایین دست؛ C : شار تخمینی حجم فضای خالی به سلول پایین دست؛ D : بیشترین حجم فضای خالی موجود در سلول مورد نظر.

علاوه بر روش تقریب عبارت شار حجمی، از روش دیگری می‌توان استفاده کرد که در آن تبادل شار حجمی بین سلول‌ها به‌صورت دقیق و هندسی محاسبه می‌شود. در روش‌هایی که از مفاهیم هندسی برهم‌نهی شبکه‌های محاسباتی بهره‌می‌گیرند (نظیر بازگرداندن مرزهای جابه‌جا شده‌ی لاگرانژی به محل اولیه‌ی خود، در بررسی حاضر)، استفاده از چنین الگوریتمی مناسب خواهد بود؛ زیرا با استفاده از مفاهیم هندسی می‌توان تمامی حالات ممکن عبور شار حجمی از مرزهای یک سلول را بررسی، و شار را به‌طور دقیق محاسبه کرد. این روش‌ها به‌رغم دقت بالا، به دلیل عملیات هندسی نیازمند توان محاسباتی بالاتری هستند. روش مورد استفاده در بررسی حاضر، مبتنی بر روشی است که داکویزو و باوم‌گاردنر بیان کرده‌اند.^[۱۵] از آنجا که در بررسی حاضر از روش جداسازی ابعادی استفاده شده است، مسئله‌ی یافتن شار هندسی به یک مسئله‌ی یک‌بعدی کاهش خواهد یافت. همچنین به دلیل استفاده از شکل‌های بازسازی مرز (۹ حالت)، تعداد حالات شارش محدود است. لذا استفاده از روش هندسی برهم‌نهی شبکه‌ها موجب بار محاسباتی قابل توجهی نخواهد بود.

در بررسی حاضر، در پایان حل لاگرانژی و در ضمن مرحله‌ی «انتقال»، موقعیت وجه مشترک لاگرانژی هر سلول با سلول همسایه‌اش مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از این بررسی مشخص کردن سلول گیرنده‌ی سیال و سلول دهنده‌ی سیال، طی بازگرداندن مرزهای لاگرانژی سلول‌ها به محل اولیه‌شان است.

در شکل ۵ الف یک حالت از توزیع سیال در سلول I (سلول وسطی) و سلول همسایه‌ی آن نشان داده شده است. فرض می‌شود سلول سمت چپ پر، و سلول I مخلوط باشد. کسر حجمی سلول I ، $f(I)$ ، و در نتیجه حجم سیال موجود در این سلول، $\text{VOF}(I)$ ، معلوم‌اند.

$$\text{VOF}(I) = f(I) \times \Delta x(I)_{Lag} \times \Delta y(I)_{Lag} \quad (13)$$

فرض می‌شود پس از انجام مرحله‌ی لاگرانژی، وجه مشترک لاگرانژی بین سلول I و سلول سمت چپ آن، به سمت سلول I جابه‌جا شود (شکل ۵ ب)، خطوط ممتد نشان‌گر مرزهای اولیه و خطوط نقطه‌چین نشان‌گر مرزهای جابه‌جاشده‌ی لاگرانژی شبکه‌اند. در این مرحله، حجم ورودی به این سلول از سلول سمت چپ محاسبه می‌شود. با اجرای مرحله‌ی «انتقال»، مرزهای لاگرانژی شبکه (خطوط نقطه‌چین) به محل اولیه‌ی خود (خطوط ممتد) بازگردانده می‌شوند اما توزیع سیال موجود، ثابت باقی می‌ماند و جابه‌جا نمی‌شود (مقایسه‌ی شکل ۵ ج با ۵ ب). با توجه به این مفهوم، محاسبه‌ی حجم ورودی به سلول I و کسر حجمی جدید آن، به سادگی و با کمک موقعیت مرزهای جابه‌جاشده و اولیه‌ی شبکه انجام می‌گیرد.

$$\Delta V(I) = (x(I)_{left,Lag} - x(I)_{left,Eul}) \times \Delta y(I) \quad (14)$$

فشار سلول مخلوط از دستگاه معادلات زیر استفاده می‌شود: [۱۶]

$$\begin{cases} C_1 e_1 + C_2 e_2 = e \\ C_1 \tau_1 + C_2 \tau_2 = \tau \\ P_1 = P_2 = P; Or; \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\tau_1} e_1 = \frac{\gamma_2 - 1}{\tau_2} e_2 = \frac{\gamma - 1}{\tau} e \right) \\ (de + Pd\tau)_1 = (de + Pd\tau)_2 \end{cases} \quad (17)$$

در این معادلات، اندیس ۱ و ۲ به ترتیب مربوط به سیال ۱ و ۲ موجود در سلول مخلوط است. همچنین، مقادیر e, C, τ به ترتیب عبارت‌اند از کسر جرمی، انرژی داخلی، حجم ویژه و فشار. معادله اول و دوم از این دستگاه بیان می‌کنند که انرژی داخلی و حجم ویژه کل سلول مخلوط به ترتیب برابر است با ترکیب وزنی انرژی داخلی و حجم ویژه دو سیال درون سلول مخلوط. مفهوم معادله سوم از این دستگاه این است که فشار هر یک از سیال‌های موجود در سلول مخلوط، با هم و با فشار کل سلول مخلوط برابر است. معادله چهارم از این دستگاه نیز بیان می‌کند که تغییرات آنتروپی، برای هر یک از سیال‌های موجود در سلول مخلوط، با هم برابر است. [۱۷] با حل این دستگاه و معلوم شدن مقادیر τ_1, τ_2, e_1 و e_2 ، با استفاده از معادله سوم، مقدار فشار کل سلول مخلوط تعیین خواهد شد.

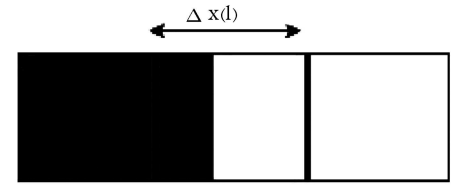
در مدل مخلوط «کسر حجمی ثابت لاگرانژی»، که در این نوشتار اختصاراً مدل مخلوط ۲ نامیده می‌شود، فرض می‌شود که طی حل لاگرانژی معادلات همه مواد موجود در یک سلول مخلوط، همراه با مرزهای سلول و با یک نسبت یکسان، متراکم یا منبسط می‌شوند. با توجه به این فرض، کسر حجمی سلول‌ها طی مرحله لاگرانژی تغییر نمی‌کند. [۱۸] این فرض برای بررسی حاضر که در میدان حل آن فقط سیال‌های گازی وجود دارند، فرض قابل قبولی است. چنین فرضی برای حالت‌هایی همچون مجاورت یک گاز و یک جامد قابل قبول نخواهد بود. در روش مذکور، کلیه خواص سلول‌ها با استفاده از روش عددی مورد نظر در حل معادلات حاکم محاسبه می‌شود و محاسبه فشار سلول‌ها با استفاده از معادله حالت گاز ایده‌آل انجام می‌گیرد. بنابراین، تعیین ضریب γ مربوط به معادله حالتی که بتواند فشار کل سلول مخلوط را محاسبه کند، ضرورت می‌یابد. برای انجام این امر، γ حاکم بر سلول مخلوط با استفاده از یک ترکیب وزنی γ ‌های مواد موجود در سلول مخلوط، برحسب کسر حجمی هر یک از این مواد، تعیین می‌شود:

$$\gamma_{mix} = \gamma_1 \times f_1 + \gamma_2 \times (1 - f_1) \quad (18)$$

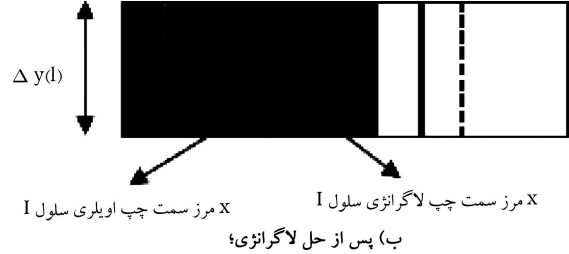
به این ترتیب، کلیه خواص مربوط به سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی، با این مدل مخلوط تعیین خواهد شد.

نتایج

نتایج ارائه شده در این قسمت، به دو بخش تقسیم می‌شوند. بخش اول به بررسی عملکرد روش VOF مورد استفاده در مطالعه حاضر، به عنوان یک روش دنباله‌سازی مرز، اختصاص دارد. در این بخش نتایج یکی از رایج‌ترین آزمون‌های مربوط به الگوریتم‌های دنباله‌سازی مرز، با عنوان آزمون انتقال [۱۴] بررسی خواهد شد. بخش دوم اختصاص به مقایسه‌ی عملکرد روش PPM، قبل و پس از استفاده از دو الگوریتم دنباله‌سازی مرز و مدل مخلوط، دارد. به این منظور، حل مسئله‌ی اولیه شوک [۱۵] که یک مسئله استاندارد در این زمینه است، برای حالت چندماده‌ی بررسی می‌شود.



الف) شکل اولیه سلول‌ها؛



ب) پس از حل لاگرانژی؛



ج) پس از بازگرداندن مرزهای لاگرانژی به محل اولیه اوپری خود و انجام انتقال خواص از شبکه لاگرانژی به شبکه اوپری (Remap).

شکل ۵. طرح‌واره‌ی از حضور دو سیال در یک سلول مخلوط و دو سلول همسایه آن.

حجم جدید موجود در سلول I چنین خواهد بود:

$$VOF_{new}(I) = VOF(I) + \Delta V(I) \quad (15)$$

کسر حجمی جدید سلول I نیز مطابق رابطه‌ی ۱۶ تعیین می‌شود:

$$f_{new}(I) = \frac{VOF_{new}(I)}{\Delta x(I) \times \Delta y(I)} \quad (16)$$

با این الگو و محاسبه‌ی کسر حجمی جدید هر سلول، موقعیت و شکل نهایی مرز در سلول‌های مخلوط بازسازی می‌شود.

مدل مخلوط

تعیین خواص سلول‌های مخلوط و همچنین خواص هر یک از مواد موجود در این سلول‌ها، یکی از مهم‌ترین مواردی است که در تحلیل مسائل چندماده‌ی مطرح می‌شود. برای انجام این هدف، نظریه‌هایی با عنوان مدل مخلوط معرفی می‌شوند. برای این‌گونه سلول‌ها کمیت‌هایی مانند چگالی، سرعت و انرژی داخلی از معادلات پایستاری قابل استخراج‌اند. در مقابل، به دلیل تفاوت معادلات حالت مواد داخل سلول‌های مخلوط، تعیین فشار این‌گونه سلول‌ها ممکن نیست. از مدل‌های مخلوط برای محاسبه‌ی فشار این‌گونه سلول‌ها استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر، دو مدل مخلوط مورد بررسی قرار گرفته‌اند: مدل مخلوط «هم فشار - هم انرژی» و مدل «کسر حجمی ثابت لاگرانژی».

مدل مخلوط «هم فشار - هم انرژی» جزء مدل‌های مخلوط تعادل فشاری محسوب می‌شود. در این نوشتار، این مدل به اختصار مدل مخلوط ۱ نامیده شده است. با در نظر گرفتن یک سلول مخلوط شامل دو ماده، در این مدل برای تعیین

آزمون انتقال

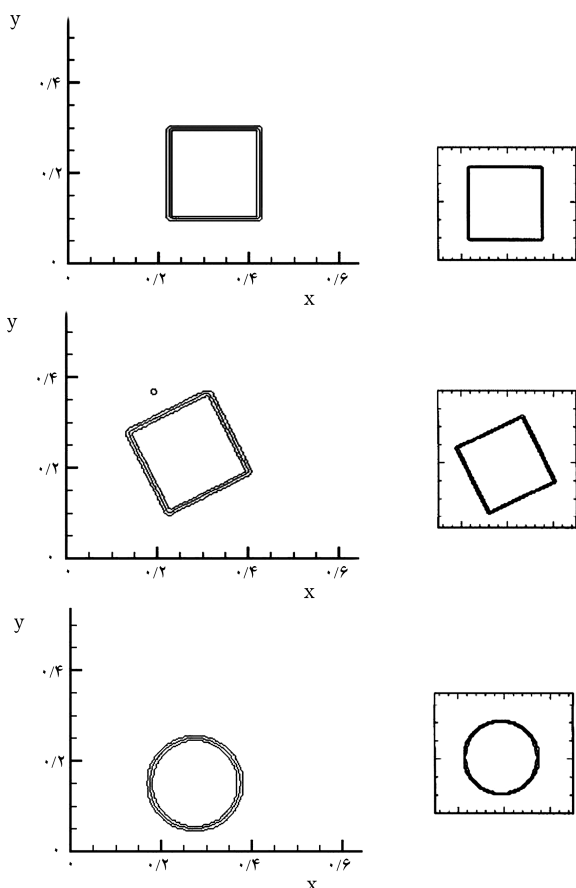
یکی از رایج‌ترین مسائل جابه‌جایی حجمی^{۱۶} دوبعدی، آزمون انتقال نام دارد که در آن از میدان سرعت تک‌جهته استفاده می‌شود. در این بخش، سه شکل مختلف برای انجام آزمون تعقیب مرز انتقال در نظر گرفته می‌شود.^[۱۹] این شکل‌ها عبارت‌اند از: یک ناحیه‌ی مربعی که موازی محورهای مختصات قرار گرفته است؛ یک ناحیه‌ی مربعی که با زاویه‌ی $۲۶/۵۷$ درجه نسبت به محور افقی قرار گرفته است؛ ناحیه‌ی دایره‌یی (شکل ۶). هریک از این سه ناحیه توسط دو میدان سرعت ($u=۱, v=۰$) و ($u=۲, v=۱$) به‌طور جداگانه جابه‌جا می‌شوند. در این مسائل، یک شبکه‌ی ۲۰۰×۲۰۰ مربعی، میدانی به ابعاد ۱×۱ واحد را پوشانده است. گستره‌ی بیرونی هریک از سه شکل اولیه برابر با پهنای ۴۰ سلول شبکه است. عدد کورانت برابر با $۰/۲۵$ است، و حل مسئله پس از ۵۰۰ چرخه‌ی کامل زمانی به پایان می‌رسد. تمامی شکل‌های اولیه و نهایی، کانتورکسر حجمی متناسب با مقادیر $۰/۲۵, ۰/۵$ و $۰/۹۷۵$ نشان داده شده است.

برای آزمون یادشده، نتایج حاصل از الگوریتم تعقیب مرز مطالعه‌ی حاضر با نتایج روش SLIC^[۷] مقایسه شده است. به‌منظور انجام این مقایسه، لازم است به نقاط اصلی اشتراک و تفاوت الگوریتم حاضر با روش SLIC اشاره شود:

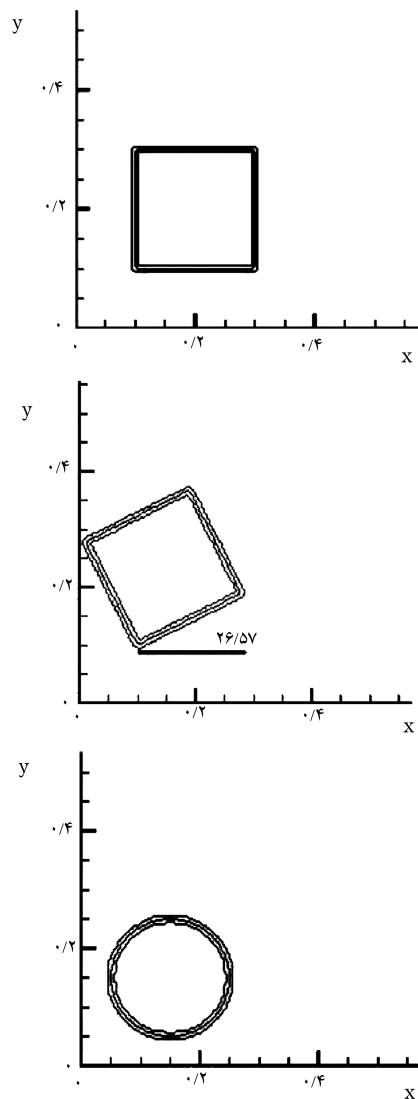
۱. الگوریتم مورد استفاده در تحقیق حاضر و روش مورد مقایسه، هر دو از خانواده روش‌های SLIC هستند.
۲. در روش SLIC، نوع و وودوارد، تعیین کسر حجمی سلول‌ها در هر بازه زمانی با گسسته‌سازی معادله‌ی جابه‌جایی حجم (روابط ۱۰ و ۱۱) و تقریب عبارت‌های شار حجمی این معادله انجام می‌گیرد، اما در روش SLIC مورد استفاده در بررسی حاضر، این عمل با استفاده از مفاهیم هندسی و به‌صورت دقیق انجام می‌پذیرد.

برای دو میدان سرعت ($u=۱, v=۰$) و ($u=۲, v=۱$)، حالت‌های نهایی جابه‌جایی هریک از سه ناحیه، به‌ترتیب در ستون سمت چپ شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. نتایج مربوط به روش SLIC نوع و وودوارد نیز در ستون سمت راست هریک از شکل‌های مذکور ارائه شده است.

با توجه به نتایج به دست آمده در شکل‌های ۷ و ۸ و مقایسه‌ی کیفی آن با نتایج روش نوع و وودوارد، می‌توان نتیجه گرفت که روش SLIC مورد استفاده در بررسی حاضر نتایجی را با کیفیت نتایج روش نوع و وودوارد و در برخی از شکل‌ها، با کیفیت بالاتر ارائه می‌دهد. در برخی از نتایج کار حاضر می‌توان شاهد مقداری



شکل ۷. جابه‌جایی سه ناحیه در میدان سرعت ($u=۱, v=۰$)، نتایج روش VOF-SLIC کار حاضر (ستون سمت چپ)، نتایج روش VOF-SLIC^[۱۹] (ستون سمت راست).



شکل ۶. سه ناحیه‌ی اولیه مربوط به آزمون انتقال.

جدول ۱. خطای روش SLIC کار حاضر در مقایسه با روش SLIC [۱۹] برای آزمون انتقال.

توزیع سرعت	ناحیه‌ی دربرگیرنده سیال	روش SLIC کار حاضر	روش SLIC
(۱ و ۰)	مربع (۰ درجه)	$۱,۳۰ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۸,۴۲ \times ۱۰^{-۸}$
	مربع (۲۶,۵۷ درجه)	$۷,۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱,۴۶ \times ۱۰^{-۲}$
	دایره	$۶,۳۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱,۳۰ \times ۱۰^{-۲}$
(۲ و ۱)	مربع (۰ درجه)	$۷,۵۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۱,۳۲ \times ۱۰^{-۱}$
	مربع (۲۶,۵۷ درجه)	$۲,۵۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱,۰۸ \times ۱۰^{-۱}$
	دایره	$۵,۷۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۹,۱۸ \times ۱۰^{-۲}$

را در راستای محورهای مختصات تخمین می‌زند و از روش‌های هندسی برای تعیین تبادل شار حجمی بین سلول‌ها استفاده می‌کند، به‌طور دقیق می‌تواند مسئله‌ی مورد نظر را حل کند و مقدار خطا را به حد بسیار ناچیز کاهش دهد.

مسئله‌ی لوله‌ی شوک چندماده‌یی

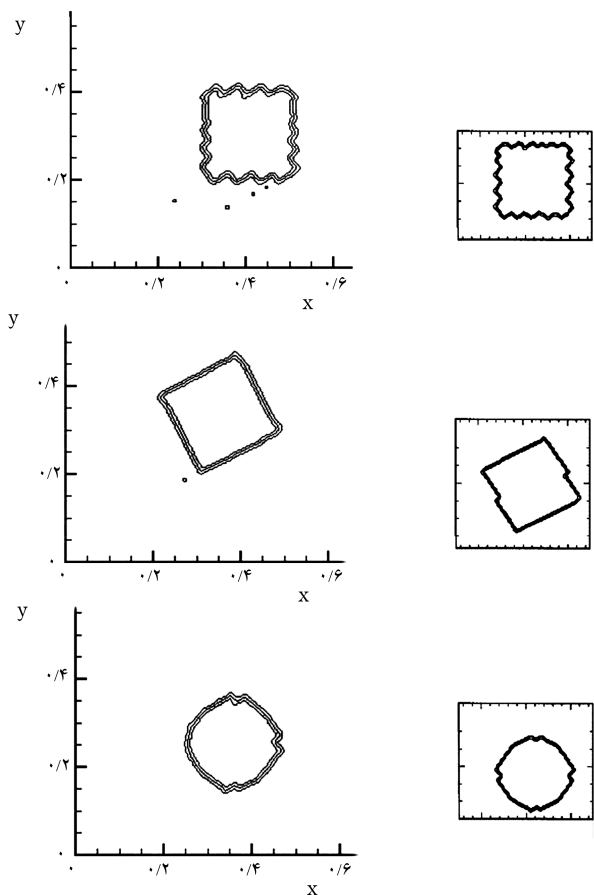
طول لوله‌ی شوک مورد نظر در این مسئله ۱cm بوده و به‌صورت میدان حلی با شبکه‌ی ۱۰۰×۱۰۰ سلولی، حاوی یک سیال پرفشار در سمت چپ و یک سیال کم‌فشار در سمت راست خود است. γ ناحیه‌ی پرفشار برابر با $۱,۴$ و γ ناحیه‌ی کم‌فشار برابر با $۲,۰$ در نظر گرفته می‌شود. مرز اولیه‌ی بین دو سیال، خطی موازی با محور y و واقع در $x = ۰,۳$ cm واحد است. زمان نهایی حل، $t = ۰,۲ \mu s$ در نظر گرفته شده است. مشخصات سیال‌های موجود در این میدان در جدول ۲ آورده شده است.

این مسئله در مختصات صفحه‌یی بررسی می‌شود. نمودار توزیع فشار و چگالی، در امتداد محور x ، به‌ترتیب در شکل‌های ۹ الف و ۹ ب پس از زمان $t = ۰,۲ \mu s$ نشان داده شده‌اند. در این نمودارها، نتایج روش PPM برای حالت عدم استفاده از الگوریتم‌های دنبال‌سازی مرز و مدل مخلوط، و همچنین پس از استفاده از روش VOF و مدل مخلوط «هم‌فشار - هم‌انرژی» (مدل ۱)، در کنار حل دقیق این مسئله مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

با توجه به نتایج این مسئله، مشاهده می‌شود که عدم استفاده از روش دنبال‌سازی مرز VOF به بروز نتایج غیرواقعی می‌انجامد. علت این امر این است که بدون استفاده از الگوریتمی مناسب برای دنبال‌سازی مرز، موقعیت و شکل مرز بین دو ماده در هر بازه زمانی مشخص نمی‌شود و در نتیجه، سلول‌های مخلوط موجود در شبکه و نیز خواص آنها را نمی‌توان به‌درستی پیش‌بینی کرد. در مقابل، مشاهده می‌شود که دنبال‌سازی مرز نتایج فیزیکی را در اختیار قرار می‌دهد. تفاوت دقت روش PPM، قبل و بعد از استفاده از روش VOF، اهمیت دنبال‌سازی مرز را نمایان می‌سازد. در

جدول ۲. مشخصات سیال‌های موجود در لوله‌ی شوک چندماده‌یی.

فشار	چگالی	سرعت افقی (u)	سرعت عمودی (v)	سرعت γ
۱/۰	۱/۰	۰/۰	۰/۰	۱/۴
۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۰	۰/۰	۲/۰



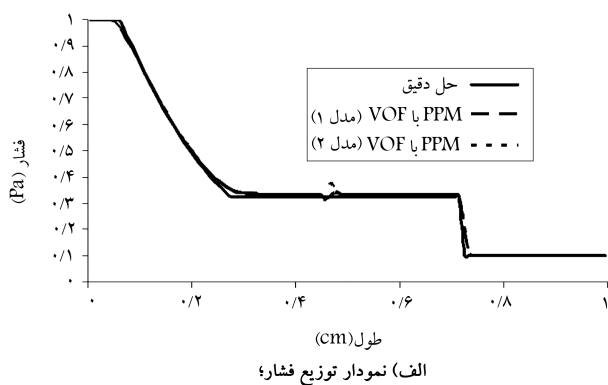
شکل ۸. جابه‌جایی سه ناحیه در میدان سرعت $(u=۲, v=۱)$ ، نتایج روش VOF-SLIC کار حاضر (ستون سمت چپ)، نتایج روش VOF-SLIC [۱۹] (ستون سمت راست).

خروج ماده از ناحیه‌ی اصلی بود. این پدیده را نوح و وودوارد معرفی، و آن را از نقاط ضعف روش SLIC برشمرده‌اند. [۷] به‌منظور تأیید تحلیل کیفی فوق، از رابطه‌ی ۱۹ برای تعیین خطا و تحلیل کمی نتایج استفاده شده است: [۱۹]

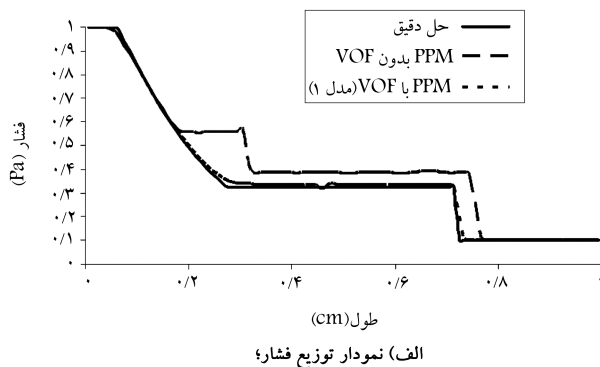
$$E = \frac{\sum_{i,j} |f_{i,j}^n - f_{i,j}^e|}{\sum_{i,j} f_{i,j}^e} \quad (۱۹)$$

که در آن، f^n کسر حجمی محاسبه‌شده برای یک سلول پس از n چرخه‌ی کامل زمانی است. f^e مقدار دقیق کسر حجمی یک سلول پس از n چرخه‌ی کامل زمانی، و f^0 مقدار اولیه‌ی کسر حجمی سلول است. مقدار این خطا برای جابه‌جایی هر سه شکل در دو میدان سرعت مذکور، برای روش SLIC به‌کار رفته در تحقیق حاضر در مقایسه با روش SLIC نوح و وودوارد، در جدول ۱ ارائه شده است.

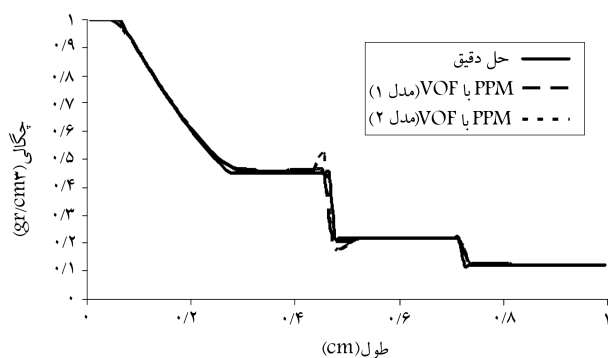
با توجه به جدول ۱ مشاهده می‌شود که در تمامی این آزمون‌ها، نتایج روش SLIC در تحقیق حاضر نسبت به روش SLIC نوح و وودوارد از دقت بالاتری برخوردار است. دلیل این امر، به کارگیری مفاهیم هندسی به‌جای تقریب عبارت شار حجمی، در تعیین موقعیت جدید مرز بین دو سیال است. بهبود نتایج، به‌خصوص برای جابه‌جایی ناحیه‌ی مربعی‌اول در توزیع سرعت $(u=۱, v=۰)$ کاملاً مشهود است. در این مسئله، اضلاع ناحیه‌ی مربعی و همچنین میدان سرعت موجود کاملاً در راستای محورهای مختصات‌اند. بنابراین، روش SLIC در تحقیق حاضر که مرز



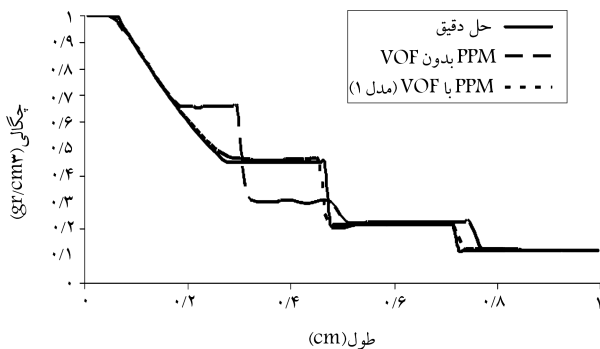
الف) نمودار توزیع فشار؛



الف) نمودار توزیع فشار؛



ب) نمودار توزیع چگالی.



ب) نمودار توزیع چگالی.

شکل ۱۰. مقایسه‌ی نتایج استفاده از دو نوع مدل مخلوط در روش VOF برای لوله شوک چند ماده‌یی، پس از زمان $t = 0.2 \mu s$ (شبهه 100×100).

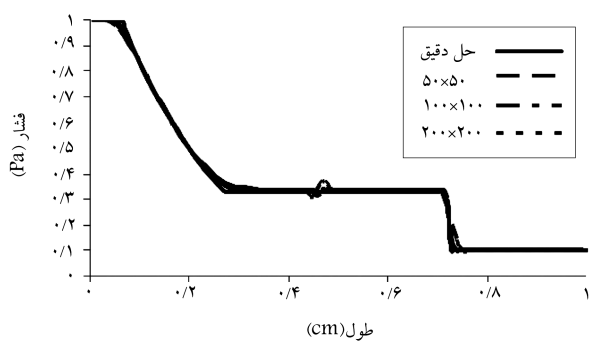
شکل ۹. مقایسه‌ی نتایج روش PPM، قبل و پس از استفاده از روش VOF و مدل مخلوط برای لوله شوک چندماده‌یی، پس از زمان $t = 0.2 \mu s$ (شبهه 100×100).

ادامه همین مسئله با دو مدل مخلوط یادشده بررسی می‌شود تا کارایی این دو مدل نیز با یکدیگر مقایسه شود.

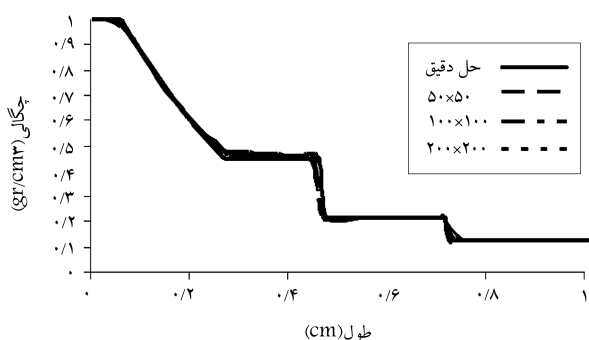
مقایسه‌ی عملکرد دو مدل مخلوط

در این قسمت به منظور مقایسه عملکرد دو مدل مخلوط به کار برده شده، این دو مدل در حل مسئله‌ی لوله‌ی شوک چندماده‌یی قبل مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در شکل‌های ۱۰ الف و ۱۰ ب به ترتیب نمودار توزیع فشار و چگالی در طول این لوله‌ی شاک، پس از گذشت زمان $t = 0.2 \mu s$ نشان داده شده است. نتایج موجود برای استفاده از روش VOF، برای دو مدل مخلوط «هم‌فشار - هم‌انرژی» (مدل ۱) و «کسر حجمی ثابت» (مدل ۲)، در کنار حل دقیق این مسئله مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که به جز در مجاورت مرز بین دو ماده، دقت استفاده از دو مدل مخلوط، به طور قابل توجهی به هم نزدیک است، اما، در عبور از مرز بین دو ماده استفاده از مدل مخلوط «هم‌فشار - هم‌انرژی» نسبت به مدل مخلوط «کسر حجمی ثابت»، یکنواختی در فشار و چگالی در مرز دو ماده را بهتر حفظ کرده و سبب افزایش دقت نتایج شده است. دلیل این امر آن است که اصولاً مدل مخلوط «هم‌فشار - هم‌انرژی»، از مدل‌های تعادل فشاری است. این مدل‌ها به علت استفاده از فرض یکسان بودن فشار سیال‌های موجود در یک سلول مخلوط، فیزیک نواحی حاوی مرز بین دو ماده را بهتر پیش‌بینی می‌کنند.^[۱۶]

در نهایت، استقلال نتایج از شبکته‌ی محاسباتی، با استفاده از شبکته‌های 50×50 ، 100×100 و 200×200 بررسی شده است. شکل ۱۱ توزیع فشار و چگالی لوله‌ی شوک چندماده‌یی مورد نظر را برای مدل مخلوط «هم‌فشار - هم‌انرژی» نشان



الف) توزیع فشار در طول لوله،



ب) توزیع چگالی در طول لوله.

شکل ۱۱. استقلال نتایج از شبکته، در لوله شوک چندماده‌یی، برای مدل مخلوط «هم‌فشار-هم‌انرژی»، پس از زمان $t = 0.2 \mu s$.

فهرست علائم

ρ : چگالی (gr/cm^3)
 E : انرژی کل ($\text{Mbar}\cdot\text{cm}^3/\text{gr}$)
 e : انرژی داخلی ($\text{Mbar}\cdot\text{cm}^3/\text{gr}$)
 m : جرم (gr)
 p : فشار (Mbar)
 t : زمان (micro sec.)
 u : سرعت ($\text{cm}/\text{micro sec.}$)
 τ : حجم ویژه (cm^3/gr)
 ΔV : تبادل حجم (cm^3)
 C : سرعت صوت ($\text{cm}/\text{micro sec.}$)
 C : کسر جرمی
 f : کسر حجمی
 γ : نسبت گرماهای ویژه
 F : شار کسر حجمی
 E : خطا
VOF: حجم موجود از سیال
Lag: لاگرانژی
Eul: اویلری
Mix: مخلوط

می‌دهد. با توجه به شکل ۱۱ الف مشاهده می‌شود که استفاده از مدل مخلوط «هم فشار-هم انرژی» در شبکه‌های با چگالی سلولی بالاتر سبب کاهش پرش موجود در مجاورت مرز بین دو ماده می‌شود. با توجه به این شکل و شکل ۱۱ ب نیز درمی‌یابیم که استفاده از شبکه‌های ریزتر محاسباتی، نتایج را به حل دقیق مسئله نزدیک‌تر می‌کند.

نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر، برای افزایش دقت روش PPM در مواجهه با مسائل چندماده‌یی، روش VOF-SLIC که دارای ویژگی‌های مطلوبی همچون سادگی و حفظ پایستاری جرم است، انتخاب شد. همان‌گونه که از نتایج عددی مربوط به آزمون انتقال مشاهده شد، روش VOF-SLIC در بررسی حاضر به عنوان یک روش دنبال‌سازی مرز، نسبت به روش VOF-SLIC^[۱۹] دارای دقت بالاتری است. علت این امر در به‌کارگیری مفاهیم هندسی در حل معادله‌ی جابه‌جایی حجم، به جای تقریب عبارات‌های شار حجمی در این معادله است. همچنین، نتایج به دست آمده نشان دادند که استفاده از روش VOF و هر یک از دو مدل مخلوط به‌کار رفته، سبب ایجاد قابلیت لازم برای روش PPM، در بررسی مسائل چندماده‌یی خواهد شد. حضور پرش در خواص مواد، در مجاورت مرز بین دو ماده، معیاری برای ارزیابی و مقایسه‌ی کارایی دو مدل مخلوط است. با توجه به این معیار مشاهده شد که استفاده از مدل مخلوط «هم فشار - هم انرژی» که جزو مدل‌های تعادل فشاری است، نسبت به مدل «کسر حجمی ثابت»، مرز دو سیال را با دقت بالاتری شبیه‌سازی می‌کند.

پانویس

1. piecewise parabolic method (PPM)
2. volume of fluid (VOF)
3. interface
4. interface tracking
5. front tracking
6. interface capturing
7. level set
8. interface reconstruction
9. piecewise constant
10. piecewise constant-stair stepped
11. piecewise linear
12. dimensional splitting
13. donor-acceptor
14. translation test
15. shock tube
16. volume advection

منابع

1. Aulisa, E.; Manservigi, S., and Scardovelli, R. "A mixed markers and volume-of-fluid method for the reconstruction and advection of interfaces in two-phase and free-boundary flow", *Journal of Comput. Phys.*, **188**, pp. 611-639 (2003).
2. Pishevar, A.R. "An ALE method for compressible multi-fluid flows : Application to underwater explosion", CFD 2003, Vancouver, May 28-30, Canada (2003).
3. Garimella, R.V.; Dyadechko, V.; Swartz, B.K., and Shashkov, M.J. "Interface reconstruction in multi-fluid , multi-phase flow simulations", 14th International Meshing Roundtable, September 11-14, 2005, San Diego, CA, USA, pp. 19-32, B. W. Hanks (Ed.) Springer (2005).
4. Debar, R. "Fundamentals of KRAKEN code", Technical Report UCIR-760, LLNL (1974).
5. Dyadechko, V., and Shashkov, M. "Moment-of-fluid interface reconstruction", Los Alamos National Laboratory, LA-UR-05-7571.
6. Pilliod, J.E., and Puckett, E.G. "Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces", *Journal of Comput. Phys.*, **199**, pp. 465-502 (2004).
7. Noh, W.F., and Woodward, P. "SLIC (simple line interface calculation)", Lawrence Livermore laboratory, University of California, Livermore, California 94550.
8. Hirt, C.W., and Nichols, B.D. "Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries", *Journal of Comput. Phys.*, **39**, pp. 201-215 (1981).

9. Rider, W.J., and Kothe, D.B. "Reconstructing volume tracking", *Journal of Comput. Phys.*, **141**, pp. 112-152 (1998).
10. Chorin, A.J. "Flame advection and propagation algorithms", *J. Comput. Phys.*, **35**, pp. 1-11 (1980).
11. Ghoniem, A.F.; Chorin, A.J., and Oppenheim, A.K. "Numerical modeling of turbulent flow in a combustion tunnel", *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **304**, pp. 303-325 (1982).
12. Sethian, J.A. "Turbulent combustion in open and closed vessels", *J. Comput. Phys.*, **54**, pp. 425-456 (1984).
13. Colella, P.; Henderson, L.F., and Puckett, E.G., *A Numerical Study of Shock Wave Refraction at a Gas Interface*, Proceedings of the AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference, Buffalo, New York, pp. 426-439, AIAA-89-1973 (1989).
14. Colella, P., and Woodward, P.R. "The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations", *Journal of Comput. Phys.*, **54**, pp. 174-201 (1984).
15. Dukowicz, J.K., and Baumgardner, J.R. "Incremental remapping as a transport/advection algorithm", *Journal of Comput. Phys.*, **160**, pp. 318-335 (2000).
16. Despres, B., and Logoutiere, F. "Numerical resolution of two-component compressible fluid model with interfaces and mixing zones", Preprint R04008 of the Laboratoire Jacques-Louis Lions.
17. Shashkov, M. "Closure models for multimaterial cells in arbitrary lagrangian-eulerian hydrocodes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, DOI: 10.1002/flid.1574 (2007).
18. Benson, D.J. "A mixture theory for contact in multi-material eulerian formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **140**, pp. 59-86 (1997).
19. Rudman, M. "Volume-tracking methods for interfacial flow calculations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, pp. 671-691(1997).