

تسخیر دقیق موج ضربه‌ی با انتخاب لزجت مصنوعی مناسب

حمیدرضا انارلویی (دانشجوی دکتری)
کیومرث مظاهری (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس
سعید برجی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

اضافه کردن یک عبارت غیرفیزیکی با عنوان «لزجت مصنوعی» به معادلات غیرلزج اویلر، حاکم بر حرکت سیال، به منظور تسخیر خودکار موج ضربه‌ی یکی از قدیمی‌ترین ابزارهای ریاضی در دینامیک سیالات محاسباتی است. تاکنون فرم‌های گوناگونی از لزجت مصنوعی ارائه شده است. اکثر این فرم‌ها دارای ضرایبی دلخواه‌اند که با توجه به مسئله‌ی مورد بررسی تعیین می‌شوند. هدف پژوهش حاضر انتخاب نوعی از لزجت مصنوعی است که ما را از انتخاب این‌گونه ضرایب بی‌نیاز می‌سازد. برای این منظور لزجت مصنوعی کارامان و همکارانش انتخاب شده است. این لزجت مصنوعی از طریق به‌کارگیری یک محدودکننده سعی می‌کند خواصی را که لزجت واقعی از آن برخوردار است به لزجت مصنوعی اعمال کند و از این رهگذر بر دقت شبیه‌سازی ضربه بیفزاید. نتایج عددی به دست آمده حکایت از برتری این نوع لزجت مصنوعی در مسائل همگرا دارد.

۱. مقدمه

دینامیک سیالات یادکرد^[۱] ایده‌ی اصلی این‌گونه روش‌ها، استفاده از سازوکارهای اتلافی نظیر لزجت و هدایت حرارتی بر روی موج ضربه‌ی است و به همین دلیل آنها را «لزجت مصنوعی» می‌نامند. وجود چنین اتلافی سبب ضخیم‌تر شدن موج ضربه و خارج شدن آن از ناپیوستگی محض می‌شود. در این صورت تغییرات در موج ضربه‌ی به جای این‌که در یک فاصله‌ی بسیار کوچک رخ دهد، در ضخامتی معین (در حدود چند سلول محاسباتی) صورت می‌گیرد. اعمال این‌گونه روش‌ها اگرچه تا حدودی سبب فاصله‌گرفتن از فیزیک واقعی مسئله در ناحیه‌ی موج ضربه‌ی می‌شود، مشکلات محاسباتی را از بین می‌برد. توانایی این‌گونه روش‌ها در مسائلی که موج ضربه‌ی متحرک یا تداخل چند موج با یکدیگر را مد نظر دارد، سبب شده است این روش‌ها نسبت به روش‌های دسته‌ی اول بیشتر مورد توجه قرار گیرند.

در مقابل دو روش فوق، دسته‌ی دیگری از روش‌های عددی وجود دارند که ذاتاً دارای خواص مدل‌سازی موج ضربه‌ی‌اند. روش‌های گودونف^[۲] که مبتنی بر پایه‌ی حل مسئله‌ی ریمان هستند، قابلیت حل مسائل مرتبط با موج ضربه‌ی را دارند. نتایج حاصل از این روش‌ها برخلاف روش‌های مبتنی بر لزجت مصنوعی، فیزیک موج ضربه‌ی را با دقت بسیار بالا شبیه‌سازی می‌کنند. مشکل این‌گونه روش‌ها تعمیم آنها به دو و سه بعد است، که معمولاً به وسیله‌ی روش‌های شکست اپراتور^۴ این تعمیم انجام می‌گیرد. همچنین اضافه کردن فیزیک‌های پیچیده -- نظیر معادلات حالت گوناگون، مقاومت مواد و الکترومغناطیس -- به آنها، بر این پیچیدگی‌ها می‌افزاید. اما در روش‌های مبتنی بر اضافه کردن لزجت

وجود موج ضربه‌ی^۱ در میدان حل به معنای وجود نوعی ناپیوستگی در خواص جریان در داخل میدان است. وجود چنین ناپیوستگی در یک حل عددی سبب بروز پاره‌ی از مشکلات می‌شود که این مشکلات نهایتاً فرایند حل عددی را مختل می‌کنند. به عنوان مثال، وجود موج ضربه‌ی در یک روش عددی مرتبه‌ی دوم سبب ایجاد نوسانات غیرفیزیکی در پشت موج می‌شود. دامنه‌ی این نوسانات به تدریج تقویت، و فرایند حل به طور کامل مختل می‌شود. استفاده از یک روش گسسته‌سازی مرتبه‌ی اول از بروز چنین نوساناتی در میدان حل جلوگیری می‌کند اما سبب هموار شدن موج ضربه‌ی شده و آن را از شکل ناپیوستگی خارج می‌کند. برای حل این‌گونه مشکلات سازوکاری مورد نیاز است تا در روش‌های عددی موج ضربه‌ی را به خوبی مدل کرده و از ایجاد اختلال طی فرایند حل، به واسطه‌ی وجود موج ضربه‌ی جلوگیری کند. روش‌های فراوانی برای این منظور ارائه شده است که می‌توان آنها را به دو دسته‌ی عمده تقسیم کرد.

در دسته‌ی اول که «روش‌های دنبال‌سازی موج ضربه‌ی^۲» نام دارند، میدان حل به دو ناحیه‌ی قبل و بعد از موج تقسیم، و معادلات حاکم برای هر کدام از این دو ناحیه به صورت مجزا حل می‌شوند. این‌گونه روش‌ها خصوصاً در مسائلی که با موج ضربه‌ی یا مجموعه‌ی از موج‌های ضربه‌ی متحرک مواجه‌اند دچار مشکل شده و بسیار پیچیده می‌شوند. دسته‌ی دوم روش‌های مبتنی بر به‌کارگیری لزجت مصنوعی^۳ هستند، که شاید بتوان از آنها به عنوان قدیمی‌ترین ابزار ریاضی در

مصنوعی تعمیم به دو یا سه بعد و همچنین اضافه کردن فیزیک‌های پیچیده در بیان لزجت مصنوعی تأثیری نخواهد داشت.

با توجه به مطالب فوق برای مدل‌سازی دقیق حرکت و رفتار موج ضربه‌یی در یک گسسته‌سازی دو یا سه‌بعدی انتخاب روش‌های مبتنی بر لزجت مصنوعی در اولویت قرار دارد. با توجه به این نکته که این‌گونه روش‌ها سبب اندکی دور شدن از فیزیک مسئله در نواحی نزدیک موج می‌شوند، روش‌های مختلف در این گروه سعی می‌کنند با ارضای خواص مورد نیاز تا حد امکان به فیزیک واقعی مسئله نزدیک شوند. به‌طور کلی خواصی که لزجت مصنوعی باید دارا باشد عبارت‌اند از:

۱. لزجت مصنوعی باید همواره به‌گونه‌یی عمل کند که از انرژی جنبشی کاسته و به همان میزان به انرژی داخلی سیستم افزوده شود (همانند اثر لزجت واقعی) -- در حقیقت باید دارای خاصیت پخش^۵ باشد.
۲. لزجت مصنوعی باید به‌طور یکنواخت و هموار، هنگامی که میدان سرعت به یک میدان سرعت یکنواخت تبدیل می‌شود، حذف شود.
۳. لزجت مصنوعی باید در حالتی که تراکم یکنواخت (آیزنوتروپیک) و همچنین دوران صلب وجود دارد بی‌تأثیر باشد.
۴. لزجت مصنوعی نباید در راستای مماس بر فاز ثابت جبهه‌ی موج^۶ اثر داشته باشد. این نکته به دلیل ثابت بودن مؤلفه‌ی مماسی سرعت در این جبهه، مستقل از کیفیت شبکه است. نمونه‌ی چنین حالتی جهت عمود بر حرکت موج ضربه‌یی است. این خاصیت خصوصاً در مورد مسائل مرتبط با موج‌های ضربه‌یی هم‌گرا اهمیت فوق‌العاده‌یی می‌یابد.

۵. لزجت مصنوعی باید در حالتی که اثر انقباض حذف، و سیستم به سمت انبساط می‌رود به آرامی حذف شود و در حالت انبساط (که پدیده‌یی آیزنوتروپیک است) هیچ‌گونه اثری نداشته باشد. البته در این حالت باید تعریف دقیقی از انبساط و انقباض در دستگاه‌های مختصات گوناگون ارائه شود.

اگر لزجت مصنوعی دارای خواص فوق باشد می‌توان انتظار داشت که فاصله‌ی آن در مدل‌سازی نواحی اطراف موج ضربه‌یی از فیزیک واقعی آن نواحی بسیار کم باشد.

چنان که پیش‌تر گفته شد، لزجت مصنوعی به صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود و در حالتی که سیستم در حالت تراکم قرار داشته باشد، به صورت یک عبارت فشاری به فشار محاسبه شده از معادله‌ی حالت اضافه می‌شود و بدین ترتیب اثر آن در معادله‌ی گشتاور و انرژی وارد می‌شود.

$$q_{nl} = C_2 \rho (\nabla v)^2 \quad (1)$$

در این رابطه q_{nl} مقدار لزجت مصنوعی، ρ چگالی سلول، Δv تغییر سرعت در عرض سلول و C_2 یک ثابت از مرتبه‌ی یک است. ضخامت

موج ضربه‌یی که با این روش به دست می‌آید در حدود اندازه‌ی سلول‌های شبکه بوده و این ضخامت هیچ‌گونه تغییر فیزیکی نخواهد داشت.

ایده‌یی که منجر به دست‌یابی به رابطه‌ی ۱ برای لزجت مصنوعی شده است از برخورد غیرکشسان دو جسم به دست آمده است. فرض کنید که دو جرم M_1 و M_2 در یک برخورد غیرکشسان به یکدیگر اصابت کنند. در این حالت با وجود این‌که گشتاور کل پایدار باقی می‌ماند، مقداری از انرژی جنبشی آن دو تبدیل به انرژی داخلی شده و در آنها ذخیره می‌شود. مقدار انرژی جنبشی کاسته شده برابر $\mu(\Delta v)^2/2$ است که در این رابطه Δv تفاوت سرعت دو ذره (قبل از برخورد)، و μ جرم کاسته شده بر اثر برخورد است. با توجه به مطالب یادشده، در حقیقت لزجت مصنوعی معادل میزان انرژی جنبشی است که در یک برخورد غیرکشسان به انرژی داخلی تبدیل می‌شود (البته در لزجت مصنوعی چگالی جای جرم کاسته شده را گرفته است). به دلیل این تشابه، این رابطه‌ی لزجت مصنوعی (غیرخطی، مرتبه دوم) بدون توجه به قدرت موج ضربه‌یی، در صورت وجود انرژی جنبشی کافی سبب انقباض یکسانی می‌شود. در مجموع، لزجت مصنوعی غیرخطی ۱ توانایی تسخیر ضربه و جلوگیری از ایجاد سلول‌های درهم رفته را دارد، اما در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته با استفاده از این نوع لزجت مصنوعی نوساناتی در پشت جبهه‌ی ضربه مشاهده می‌شود. برای حذف این نوسانات، یک عبارت مرتبه اول نسبت به Δv به رابطه‌ی ۱ اضافه شد.^[۳] این عبارت که در رابطه‌ی ۲ نشان داده شده، نسبت به عبارت مرتبه‌ی دوم رابطه‌ی ۱ در پشت ضربه دیرتر میرا می‌شود و وظیفه‌ی آن جلوگیری از ایجاد نوسانات پشت ضربه است.

$$q_{lin} = C_1 \rho C_s |\nabla v| \quad (2)$$

در این رابطه ρ چگالی سلول، C_s سرعت صوت لاگرانژی در سلول (که مبتنی بر پایه‌ی فشار سلول است)، و C_1 ضریبی ثابت است. اگر این عبارت به لزجت مصنوعی ۱ اضافه شود و برای وارد کردن آن در معادلات گشتاور و انرژی از روشی همانند روش فون نیومن استفاده شود، پخش‌شدگی زیادی در ناحیه‌ی موج ایجاد می‌شود. لذا تا همین اواخر ضریب C_1 را یک مرتبه کوچک‌تر از C_2 انتخاب می‌کردند تا از وقوع چنین حالتی جلوگیری شود.

به‌طور کلی امروزه از لزجت مصنوعی که ترکیبی از دو عبارت غیرخطی مرتبه‌ی دوم و مرتبه‌ی اول است به صورت رابطه‌ی ۳ استفاده می‌شود:

$$q_{lin} = C_1 \rho C_s |\nabla v| + C_2 \rho (\nabla v)^2 \quad (3)$$

در این قسمت مناسب است تا تشابه برخورد غیرکشسان را چنان تعمیم دهیم که بتوان توجیه مناسبی برای لزجت مصنوعی به صورت رابطه‌ی

$\rho C_s \Delta v_{1-2} dt / 2$ از جت مصنوعی (رابطه ۲) است. آنچه که واضح است امکان تعریف V به گونه‌ایی است که بتوان به ترکیبی از رابطه‌ی خطی و غیرخطی لزجت مصنوعی (رابطه ۳) رسید.

نکته‌ی بسیار جالبی که باید به آن توجه کرد این است که در صورتی که $\Delta v > 0$ باشد، مدل ذرات (آنالوژی لزجت مصنوعی) برخوردی را پیش‌بینی نکرده و در این حالت باید لزجت مصنوعی غیرفعال شود. چنین شرطی باید در شبکه‌ی محاسباتی اعمال شود. این مسئله با توجه به این‌که در یک شبکه‌ی محاسباتی به جای جرم‌های مجزا با محیط پیوسته‌یی که به گره‌هایی تقسیم شده رو برو هستیم سبب دشواری بیان چنین شرطی می‌شود. همچنین چنان‌که از رابطه‌ی ۶ مشاهده می‌شود بیان لزجت مصنوعی در فرم گسسته نیاز به دانستن اطلاعاتی از نزدیک‌ترین ذرات مجاور هر ذره (در حالت یک بعدی ذره M_2 و M_0) دارد. این به معنای یک گسسته‌سازی سه نقطه‌یی برای عملگر لاپلاسیان در یک شبکه‌ی یکنواخت است. در حالت دوبعدی و برای شبکه‌یی با سازمان دکارتی چنین بیانی برای لزجت مصنوعی منجر به یک گسسته‌سازی ۵ نقطه‌یی برای عملگر لاپلاسیان خواهد شد. یک چنین گسسته‌سازی محدودیت‌ها و همچنین پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. همچنین تعمیم آن به شبکه‌های نامنظم بسیار دشوار خواهد بود. سرانجام به فرم بسیار مناسب و مؤثری از لزجت مصنوعی، که اولین بار توسط کروپاتنکو معرفی شد^[۵] و هم‌اکنون در بسیاری از کدهای تجاری و نیز کدهای تحقیقاتی کاربرد دارد، اشاره می‌شود. این لزجت مصنوعی در حقیقت شکلی از رابطه‌ی ۳ است که به صورت رابطه‌ی ۸ بیان می‌شود:

$$q_{kur} = \rho \left\{ \frac{C_2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right) |\Delta v|}{+\sqrt{C_2^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right)^2 (\Delta v)^2 + C_s^2 C_2^2}} \right\} |\Delta v| \quad (۸)$$

که در آن γ نسبت گرمای ویژه، Δv تغییر سرعت در عرض سلول، ρ چگالی سلول و C_s سرعت صوت در سلول است. همچنین ثابت‌های C_1 و C_2 به ترتیب ضرایب عبارت‌های خطی و غیرخطی لزجت مصنوعی‌اند که معمولاً برابر واحد در نظر گرفته می‌شوند. دو نکته در مورد این شکل از لزجت مصنوعی باید بیان شود. اول این که عبارت داخل پرانتز در رابطه‌ی ۸ همان سرعت برخورد V در تشابه لزجت مصنوعی است. ثانیاً به‌وضوح قابل مشاهده است که رابطه‌ی ۸ با $\Delta v \rightarrow 0$ به شکل خطی لزجت مصنوعی و با $C_s \rightarrow 0$ به شکل غیرخطی لزجت مصنوعی سوق می‌یابد. این بدان معناست که با دور شدن از جبهه‌ی ضربه این عبارت به سمت لزجت خطی حرکت کرده

۳ ارائه کرد. این تعمیم توسط فاوورسکی^[۴] انجام گرفته است. فرض کنید که یک برخورد غیرکشسان بین ذره‌ی δM_1 که قسمتی از ذره‌ی M_1 است با δM_2 که قسمتی از ذره‌ی M_2 است به‌وقوع می‌پیوندد. با این فرض که این ذرات بسیار کوچک بوده و بعد از برخورد با اتصال به یکدیگر یک ذره‌ی مجازی با جرم $(\delta M_1 + \delta M_2)$ تشکیل می‌دهند و همچنین سرعت ذرات قبل از برخورد به ترتیب برابر v_1 و v_2 باشد، طبق اصل بقای گشتاور سرعت ذره‌ی مجازی v^* برابر (رابطه ۴) خواهد بود:

$$(\delta M_1 + \delta M_2) v^* = \delta M_1 v_1 + \delta M_2 v_2 \quad (۴)$$

حال فرض کنید که این ذره‌ی مجازی در یک لحظه دوباره به ذرات تشکیل‌دهنده‌ی خود (δM_1 و δM_2) شکسته شود و این ذرات با ذرات مادر خود که هنوز سرعت قبلی خود را دارند برخورد کنند. اصل بقای گشتاور در این حالت سرعت ذره‌ی M_1 را به صورت رابطه‌ی ۵ بیان می‌کند (در این رابطه v_{f1} سرعت نهایی این ذره است):

$$M_1 (v_{f1} - v_1) = \frac{\delta M_1 \delta M_2}{\delta M_1 + \delta M_2} (v_2 - v_1) \quad (۵)$$

حال چنانچه $\delta M_1 = \delta M_2 = \rho V \tau$ (که در آن V سرعت برخورد و τ زمان برخورد باشد)، سمت راست رابطه‌ی ۵ به صورت $\rho V (v_2 - v_1) \tau / 2$ (در خواهد آمد. اگر فرض شود V به صورت $V = |v_1 - v_2|$ و τ به صورت دیفرانسیل زمانی dt باشد، عبارت فوق به $\rho (\Delta v)_{1-2}^2 dt / 2 -$ تبدیل خواهد شد. چنان که دیده می‌شود، فرم آخر عبارت فوق با فرم لزجت مصنوعی غیرخطی در رابطه‌ی ۱ مطابقت کامل دارد. در حالت یک بعدی اگر فرض شود که ذره‌ی M_2 در سمت راست ذره‌ی M_1 قرار گرفته و همچنین ذره‌ی دیگری به نام ذره‌ی M_0 در سمت چپ ذره‌ی M_1 قرار دارد، تکرار با آنالوژی فوق و در نظر گرفتن برخورد ذره‌ی M_1 با این ذره سرعت ذره‌ی M_1 به صورت رابطه‌ی ۶ قابل بیان خواهد بود:

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{-\rho (v_2 - v_1)^2 + \rho (v_1 - v_0)^2}{2} \quad (۶)$$

حال اگر در این رابطه فرض شود $M_1 = \rho \Delta x$ آنگاه رابطه‌ی ۶ بیان‌گر فرم یک بعدی معادله‌ی گشتاور به همراه لزجت مصنوعی (رابطه ۷) خواهد بود:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla(p + q) \quad (۷)$$

که در آن p فشار اسکالر، و لزجت مصنوعی $q = \rho (\Delta v)^2 / 2$ خواهد بود ($C_2 = 1/2$) به دست خواهد آمد. چنان که یاد شد، سرعت برخورد V به شکل‌های گوناگونی قابل فرض است. اگر فرض شود $\delta M_1 = \delta M_2 = \rho C_s dt$ آنگاه سمت راست رابطه‌ی ۵ به

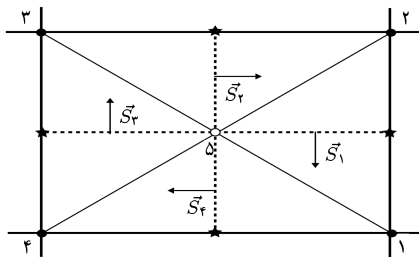
این معادلات از روش گسسته‌سازی سازگار^۷ با حفظ پایداری انرژی کل استفاده شده است.^[۷] برای ادامه‌ی کار شرح مختصری در مورد این روش مورد نیاز است.

شبکه‌ی محاسباتی مورد استفاده در این روش یک شبکه‌ی جابه‌جاشده^۸ است. یک سلول از این شبکه در شکل ۱ نشان داده شده است. این سلول از چهار راس یا گره (با شماره‌های ۱ تا ۴) تشکیل شده است. مختصات مرکز این سلول که با شماره‌ی ۵ نشان داده شده است از میانگین‌گیری مختصات این چهار گره که رئوس سلول را تشکیل می‌دهند به دست آمده است. با اتصال مرکز سلول به وسط اضلاع سلول، یک شبکه‌ی ثانویه^۹ به دست آمده است که با خط‌چین نمایش داده شده است. بردارهای \vec{S}_i که عمود بر خطوط این شبکه‌ی ثانویه‌اند با طولی برابر طول هر ضلع از این شبکه‌ی ثانویه تعریف شده‌اند. از آنجا که هر سلول ۴ راس دارد، لذا در برگیرنده‌ی چهار بردار \vec{S}_i است. همچنین با اتصال مرکز سلول به هر رأس سلول نواحی به شکل مثلث در داخل آن ایجاد می‌شود که آنها را «زیرسلول» می‌نامیم. در روش گسسته‌سازی سازگار مورد استفاده در پژوهش حاضر فرض می‌شود که جرم این زیرسلول‌ها نیز همانند جرم سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی لاگرانژی بوده و در طی فرایند حل ثابت باقی خواهند ماند.

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی بقای اندازه حرکت (رابطه‌ی ۱۰) حول یک گره از شبکه‌ی محاسباتی، معادله‌ی اندازه حرکت به صورت رابطه‌ی ۱۲ تبدیل خواهد شد:

$$M_P \frac{dv_P}{dt} = \oint_{S_P} \bar{Q} \cdot dS \quad (12)$$

در این رابطه M_P جرم گره مورد نظر از شبکه، v_P سرعت گره، و \bar{Q} تانسور نیروهای وارد برگره (از منابع مختلف) است که در هر سلول ثابت در نظر گرفته می‌شود. انتگرال سمت راست رابطه‌ی ۱۲ بیان‌گر مجموع نیروهایی است که به گره وارد می‌شوند. این انتگرال باید حول شبکه‌ی ثانویه، و یا به عبارتی دیگر حول سطح بسته‌یی در اطراف گره که از بردارهای \vec{S}_i ساخته شده‌اند محاسبه شود می‌توان نیروی داخل یک سلول (شکل ۱) را با چهار نیروی \vec{f}_1 تا \vec{f}_4 ، و به صورت نیروهای عمود بر اضلاع شبکه‌ی میانی و برابر $\vec{f}_i = \bar{Q} \cdot \vec{S}_i$ تعریف کرد که در این



شکل ۱. شبکه‌ی محاسباتی مورد استفاده در گسسته‌سازی.

و نهایتاً اثر آن حذف می‌شود. بررسی اجمالی فرم‌های ارائه شده برای لزجت مصنوعی (فرم‌های عمومی) یعنی روابط ۱، ۲ و ۸ به وضوح نشان می‌دهد که این فرم‌ها تمامی پنج خواسته‌ی بیان شده در بالا را ندارند. شاید مهم‌ترین مشکل این روش‌ها عدم بیان شرط (عدم برخورد — عدم انقباض) $\Delta v > 0$ است که در فوق بیان شد. همچنین در این روش‌ها در مورد خواسته‌ی چهارم از پنج خواسته‌ی فوق نیز اصولاً هیچ‌گونه اقدامی صورت نمی‌گیرد. هدف از پژوهش حاضر استفاده و پیاده‌سازی یک لزجت مصنوعی است که تمامی خواسته‌های فوق را دارا باشد. برای این کار لزجت مصنوعی ارائه شده توسط کارامانا انتخاب شده است.^[۶] این نوع لزجت مصنوعی به جای اثر به صورت فشاری و در مرکز سلول به صورت یک نیرو به اضلاع سلول‌ها وارد می‌شود. این‌گونه بیان، امکان دستیابی به روش‌های مناسب برای اعمال خواسته‌های فوق به لزجت مصنوعی را فراهم آورده است. در ادامه، ابتدا به بررسی اجمالی خواص مورد نیاز لزجت پرداخته شده، و در این رهگذر سعی می‌شود روابطی کلی برای ارضای این خواسته‌ها استخراج شود؛ و سپس لزجت مصنوعی کارامانا بیان می‌شود. این ترکیب سبب می‌شود تا در هنگام مواجهه با رابطه‌ی نسبتاً پیچیده‌ی این نوع لزجت مصنوعی اثر هرکدام از عبارات به خوبی درک شود. در انتها نیز توانایی‌ها و مزایای این نوع لزجت مصنوعی با حل عددی چند مسئله‌ی کلاسیک بررسی می‌شود.

۲. معادلات حاکم و روش گسسته‌سازی

برای بیان لزجت مصنوعی کارامانا لازم است ابتدا به بررسی هرچند اجمالی معادلات حاکم و نحوه‌ی گسسته‌سازی آنها بپردازیم. معادلات حاکم در تحقیق حاضر معادلات اولر در فرم لاگرانژی هستند. این معادلات عبارت‌اند از معادلات بقای جرم (رابطه‌ی ۹)، بقای اندازه حرکت (رابطه‌ی ۱۰) و انرژی (رابطه‌ی ۱۱). در این روابط V حجم، v سرعت، e انرژی داخلی، \bar{Q} تانسور نیرو و P فشار است. بقای جرم به واسطه‌ی فرض یک شبکه‌ی لاگرانژی (شبکه‌یی که هیچ‌گونه شار جرمی از مرزهای سلول‌های آن وجود ندارد) به طور خودکار ارضا می‌شود.

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = (\nabla \cdot \vec{v})_i \quad (9)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla \cdot \bar{Q} = -\nabla P \quad (10)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \bar{Q} : \nabla \vec{v} = -P \nabla \cdot \vec{v} \quad (11)$$

این معادلات به همراه یک معادله‌ی حالت به فرم $p = p(\rho, e)$ که در آن p فشار و e انرژی داخلی است کامل می‌شود. برای گسسته‌سازی

۳. خاصیت پخش

بر خلاف مسائل یک‌بعدی در دو بعد و بیشتر، لازم است در مورد محاسبه و اعمال لزجت مصنوعی به‌عنوان یک پارامتر واقع در مرکز سلول یا واقع بر اضلاع آن تصمیم‌گیری شود. این انتخاب اولین بار توسط شولتز مورد بررسی قرار گرفت.^[۸] لزجت مصنوعی که در مرکز سلول محاسبه می‌شود در هر سلول دارای مقدار ثابتی است در حالی که لزجت مصنوعی محاسبه شده بر روی اضلاع سلول در هر زیرسلول (مثلث‌های نشان داده شده در شکل ۱) ثابت فرض می‌شود.

در یک لزجت مصنوعی که در مرکز سلول محاسبه می‌شود مقدار لزجت مصنوعی q یک کمیت اسکالر است که همانند فشار اثر آن وارد معادلات می‌شود. کار حاصل از این نوع لزجت نیز به‌سادگی به‌صورت $-qdV_Z$ قابل بیان است که dV_Z از رابطه‌ی ۱۵ قابل محاسبه است. از آنجا که مقدار q همواره مثبت یا معادل صفر است، و نیز اثر لزجت فقط برای $dV_Z < 0$ وارد محاسبات می‌شود کار آن همواره مطابق خواسته مثبت خواهد بود.

کارامانا با استفاده از رابطه‌ی ۱۵ که تغییرات حجم را برای یک سلول نشان می‌دهد رابطه‌ی را برای تغییر حجم بر روی یک ضلع سلول به‌دست آورده است.^[۶] این رابطه فرم ساده و منطقی $\vec{S}_i \cdot \Delta \vec{v}_i < 0$ را برای ضلع تحت فشار نشان می‌دهد و با استفاده از آن درخصوص انقباض ضلع می‌توان یک لزجت مصنوعی را که بر روی اضلاع سلول محاسبه می‌شود تعریف کرد. قدم بعد برای تعریف لزجت مصنوعی که بر روی اضلاع محاسبه شود بیان آن به‌گونه‌ی است که تنها سبب کار مثبت شود. پیش‌تر در مورد نیروی \vec{f}_i در رابطه‌ی ۱۴ چنین بیان شد که این نیرو از هر منبعی می‌تواند نشأت گرفته باشد. چنان که در این رابطه مشاهده می‌شود در صورتی که این نیرو غیرموازی با بردار Δv_i باشد کار آنها همواره مثبت خواهد بود. این شرط یک شرط کافی و نه لازم برای دارا بودن خاصیت پخش برای لزجت مصنوعی است. مقایسه‌ی این شرط با شرط تراکم ضلع نشان می‌دهد که با اعمال شرط تراکم این خواسته به‌طور خودکار ارضا می‌شود. لذا در لزجت مصنوعی کارامانا این شرط به‌صورت صریح وارد نشده است.

۴. استفاده از محدودکننده‌ها برای حذف اثر لزجت

مصنوعی

با مراجعه به خواسته‌های مطرح شده برای یک لزجت مصنوعی در بخش‌های قبل، مشاهده می‌شود که خواسته‌های اول و پنجم با در نظر گرفتن مطالبی که در بخش قبل بیان شد ارضا می‌شوند. همچنین خواسته‌ی دوم با مراجعه به رابطه‌ی ۸ که اساس لزجت مصنوعی کارامانا است به‌وضوح ارضا می‌شود. برای ارضاء خواسته‌های سوم و چهارم

رابطه منظور از $\overline{Q_Z}$ تانسور مربوط به سلول Z است. با استفاده از این رابطه می‌توان معادله‌ی ۱۲ را به‌صورت رابطه‌ی ۱۳ بازنویسی کرد که در آن عمل جمع بر روی تمام سلول‌های اطراف گره صورت می‌پذیرد.

$$M_P \frac{dv_p}{dt} = \sum_{Z \in P} \overline{Q_Z} \cdot \vec{S}_i \quad (13)$$

یکی از مهم‌ترین مزایای این گونه گسسته‌سازی معادلات تعیین دقیق کار صورت گرفته توسط یک نیرو بر روی یک سلول است که به‌صورت $-\vec{f}_i \cdot v_p$ قابل محاسبه است. در این رابطه v_p سرعت گره p از سلول مورد نظر، و \vec{f}_i نیروی وارد بر این گره توسط سلول Z است. با استفاده از این تعبیر برای کار می‌توان با استفاده از معادله‌ی ۱۱ تغییرات انرژی داخلی سلول Z را به‌صورت معادله‌ی ۱۴ بیان کرد:

$$M_Z \frac{de_z}{dt} = \sum_{i=1}^f -\vec{f}_i \cdot \Delta v_i \quad (14)$$

که در آن M_Z جرم سلول Z ، e_z انرژی داخلی سلول، و $\Delta v_i = v_i - v_{i+1}$ تفاضل سرعت دو گره مجاور از مجموع گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی سلول است.

اگر فقط نیروهای فشاری وارد بر یک سلول در نظر گرفته شود، \vec{f}_i به‌صورت $P_Z \vec{S}_i$ بیان می‌شود که در آن منظور از P_Z فشار سلول Z است. در این حالت مشاهده می‌شود که سمت راست معادله‌ی ۱۱ به‌صورت $-P_Z \sum_{i=1}^f \vec{S}_i \cdot \Delta \vec{v}_i$ تبدیل می‌شود. با مقایسه‌ی این دو مشاهده می‌شود که:

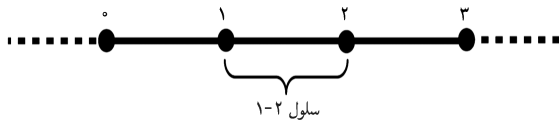
$$(\nabla \cdot \vec{v})_Z = \sum_{i=1}^f \vec{S}_i \cdot \Delta \vec{v}_i$$

با استفاده از رابطه‌ی اخیر و همچنین رابطه‌ی ۹ می‌توان رابطه‌ی ۱۵ را برای بیان تغییرات حجم یک سلول به‌دست آورد. در این رابطه V_Z حجم سلول Z است.

$$dV_Z = V_Z (\nabla \cdot \vec{v})_Z = \sum_{i=1}^f \vec{S}_i \cdot \Delta \vec{v}_i \quad (15)$$

این رابطه برای بیان تغییرات حجم سلول به‌منظور استفاده در لزجت مصنوعی بسیار مفید است. در حقیقت با استفاده از این رابطه، و در صورتی که $dV_Z < 0$ باشد، لزجت مصنوعی باید فعال شود و در غیر این صورت لزجت مصنوعی باید غیرفعال باشد.

در لزجت مصنوعی کارامانا^[۶] با استفاده از رابطه‌ی ۱۵ و به‌طور کلی گسسته‌سازی فوق سعی می‌شود رابطه‌ی مناسبی برای لزجت مصنوعی استخراج شود که علاوه بر فعال شدن (که فقط در حالت انقباض روی می‌دهد) خاصیت پخش نیز داشته باشد.



شکل ۲. شبکه‌ی یک‌بعدی مورد استفاده برای تعریف محدودکننده.

$$r_r = \frac{\Delta v_{10}}{\Delta x_{10}} / \frac{\Delta v_{21}}{\Delta x_{21}} \quad (21)$$

$$r_l = \frac{\Delta v_{22}}{\Delta x_{22}} / \frac{\Delta v_{21}}{\Delta x_{21}} \quad (22)$$

خاصیت اصلی این محدودکننده حذف اثر لزجت مصنوعی در زمانی است که مشتق دوم سرعت در سلول ۱-۲ صفر باشد. با وجود این که این محدودکننده رفتار مشتق دوم سرعت را در نظر می‌گیرد، مقدار این مشتق دوم را به‌طور صریح محاسبه نمی‌کند. این کار باعث سادگی فرمول‌بندی و همچنین توانایی تعمیم به هندسه‌های پیچیده را فراهم می‌آورد. در لزجت مصنوعی کارامانا با تعمیم این محدودکننده به دو و سه بعد، از خاصیت اساسی آن (یعنی حذف لزجت در انقباض یکنواخت و چرخش صلب) استفاده شده است.

۵. لزجت مصنوعی کارامانا

این بخش به بررسی لزجت مصنوعی ارائه شده توسط کارامانا و همکاری‌اش [۶] می‌پردازد. برای بیان این لزجت مصنوعی، نحوه‌ی اعمال آن به دو‌گه b و c از شبکه‌ی محاسباتی که در شکل ۳ نشان داده شده است بیان می‌شود. نیروی ناشی از لزجت را که از طرف سلول Z به این دو‌گه اعمال می‌شود، با $f_{i=1}^{\rightarrow}$ نمایش می‌دهیم. این نیرو به‌واسطه‌ی حجم زیرسلولی که با رنگ تیره در شکل ۳ نشان داده شده است به این دو‌گه وارد می‌شود. بردار \vec{S}_1 برداری از شبکه‌ی ثانویه در داخل سلول Z است که در این حجم زیرسلولی واقع شده است. همچنین تفاوت سرعت دو‌گه به‌صورت $v_b - v_c = \Delta v_{i=1}$ و بردار یک در جهت این تفاضل به‌صورت $\Delta \vec{v}_{i=1}$ بیان می‌شود. با توجه به این که هسته‌ی اصلی لزجت مصنوعی کارامانا همان لزجت مصنوعی کروپانکو (رابطه‌ی ۸) است مقدار $f_{i=1}^{\rightarrow}$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ بیان می‌شود:

$$\vec{f}_{i=1} = \begin{cases} \rho_i \left\{ \begin{array}{l} C_{\gamma} \frac{(\gamma+1)}{\gamma} |\Delta v_i| + \\ \sqrt{C_{\gamma}^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right)^2 (\Delta v_i)^2 + C_{\gamma}^2 C_s^2} \end{array} \right\} \\ \times (1 - \psi_i) (\Delta \vec{v}_i \cdot \vec{S}_1) \Delta \vec{v}_i \quad \text{if } (\Delta \vec{v}_i \cdot \vec{S}_1) \leq 0 \\ 0 \quad \text{if } (\Delta \vec{v}_i \cdot \vec{S}_1) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

در این رابطه C_1 و C_2 همان ضرایب عبارات خطی و غیرخطی لزجت مصنوعی‌اند که معمولاً برابر واحد در نظر گرفته می‌شوند. همچنین γ

در لزجت مصنوعی کارامانا از یک محدودکننده 1° استفاده می‌شود. [۹] اگر لزجت مصنوعی همانند رابطه‌ی ۳ در نظر گرفته شود، به‌وضوح مشخص است که این نوع لزجت در هنگام انقباض یکنواخت 1° و یا چرخش صلب 1° غیرفعال نمی‌شود. معمولاً برای رفع این مشکل با بازنویسی فرم لزجت مصنوعی به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ که در آن Q_{ij} تانسور نرخ کرنش به‌صورت رابطه‌ی ۱۷، ε_{ij} به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود، این خواسته به لزجت مصنوعی اعمال می‌شود (l_z طول مشخصه‌ی سلول و δ_{ij} دلتای کرونگر است).

$$q = \rho (C_1 C_S + C_{\gamma} |\Delta v|) l_z Q_{ij} \quad (16)$$

$$Q_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \quad (17)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

یکی از خواص تانسور نرخ کرنش (Q_{ij}) این است که در حالت تراکم یکنواخت و چرخش صلب مقداری برابر صفر خواهد داشت. لذا این فرم لزجت مصنوعی سبب حذف اثر لزجت در موارد فوق می‌شود. استفاده از رابطه‌ی ۱۶ برای لزجت مصنوعی، سبب بروز مشکلاتی در بعضی از حالات می‌شود. این مشکلات به‌واسطه‌ی دقت پایین در گسسته‌سازی عبارات موجود در رابطه‌ی ۱۷ بروز می‌کند. به‌عنوان مثال اگر از یک گسسته‌سازی دو نقطه‌یی برای حالتی استفاده شود که یکی از این دو نقطه ثابت باشد، مقدار محاسبه شده برای تانسور نرخ کرنش همواره صفر خواهد بود. چنین حالتی به‌عنوان مثال در مورد نقاط هم‌گرا پیش خواهد آمد. این بدان دلیل است که گسسته‌سازی دو نقطه‌یی دقت لازم برای بیان مشتق دوم سرعت را نداشته و همواره آن را صفر فرض می‌کند. لذا برای غلبه بر این مشکل باید از گسسته‌سازی‌هایی با دقت بیشتر استفاده کرد. یک روش نوین برای دوری جستن از انتخاب چنین گسسته‌سازی‌هایی استفاده از یک محدودکننده‌ی TVD است که در صورت بروز حالات فوق اثر لزجت را حذف کند. [۹] برای بیان این روش یک شبکه‌ی یک‌بعدی همانند شکل ۲ در نظر بگیرد.

هدف از روابطی که در ادامه ارائه می‌شود تعیین لزجت مصنوعی برای سلول ۲-۱ است که توسط گره‌های ۱ و ۲ در شکل ۲ محدود شده است. در روش کریستیانسن لزجت مصنوعی برای سلول ۲-۱ به‌صورت رابطه‌ی ۱۹ بیان می‌شود.

$$q = q_{kur-21} (1 - \psi_{21}) \quad \text{if } \Delta v_{21} < 0 \quad (19)$$

در این رابطه مقدار تابع محدودکننده ψ_{21} به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ بیان می‌شود که در آن r_l و r_r به‌صورت روابط ۲۱ و ۲۲ محاسبه می‌شوند.

$$\psi_{21} = \max \left[0, \min \left[0, 5 / (r_1 + r_r), 2r_r, 2r_l, 1 \right] \right] \quad (20)$$

شده‌اند که حل آنها به‌وسیله‌ی روش‌های دیگر غیرممکن یا با خطای عددی زیادی همراه است. تمامی مسائلی که در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرند دارای معادله‌ی حالت از جنس گاز ایده‌آل با $\gamma = 5/3$ در نظر گرفته می‌شوند.

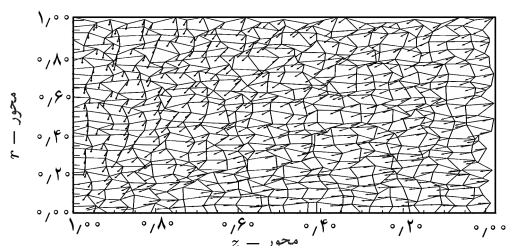
۱.۶. تراکم یکنواخت بر روی شبکه‌ی نامنظم

در این مسئله قابلیت روش کارامانا [۷] در حذف اثر لزجت مصنوعی در حالت تراکم یکنواخت بررسی می‌شود. در این مسئله یک شبکه‌ی غیریکنواخت (تصادفی) اولیه که گره‌های آن با سرعت‌هایی که متناسب با موقعیت گره‌ها است به سمت مرکز متراکم می‌شوند (شکل ۴). این مسئله در مختصات استوانه‌یی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین چگالی در تمام نقاط این میدان برابر واحد است. شکل ۴ نشان‌دهنده‌ی نتیجه‌ی حل عددی این مسئله بعد از طی مدت زمانی است که تقریباً حجم میدان به یک دهم مقدار اولیه‌ی آن کاهش یافته است. چنان که از تعریف مسئله پیداست، این مسئله در مختصات استوانه‌یی به یک تراکم یکنواخت تبدیل خواهد شد. لذا در این حالت باید محدودکننده از اعمال اثر لزجت مصنوعی بر حل مسئله جلوگیری کند.

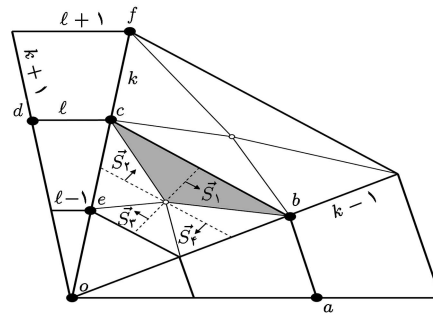
با بررسی رفتار تابع محدودکننده در طی فرایند حل عددی مشاهده می‌شود که این تابع تحت شرایط مسئله‌ی فوق همواره با تولید مقدار واحد برای پارامتر ψ_i از اعمال اثر لزجت مصنوعی بر فرایند حل جلوگیری می‌کند. همچنین بررسی توزیع چگالی در این حالت نیز نشان‌دهنده‌ی افزایش ۱۰۰۰ برابری چگالی به‌صورت یکنواخت در داخل میدان است. این مسئله صحت عملکرد لزجت مصنوعی کارامانا را در حذف اثر لزجت در حالت انقباض یکنواخت نشان می‌دهد. همچنین این مسئله نشان می‌دهد که تابع محدودکننده مستقل از نوع شبکه‌بندی مورد استفاده در جهت برآوردن خواسته‌ی فوق عمل می‌کند.

۲.۶. انقباض آدیاباتیک

در این بخش مسئله‌ی کوگشال [۱۰] مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از این مسئله بررسی قابلیت لزجت مصنوعی در تمایز قائل شدن بین انقباض آدیاباتیک و انقباض به‌وسیله‌ی موج ضربه‌یی در حالتی است که هیچ‌گونه تقارن یک‌بعدی مشهود نباشد. این مسئله از یک کره تشکیل شده است که گره‌های شبکه‌ی محاسباتی منطبق بر آن با



شکل ۴. مسئله‌ی انقباض ایزنتروپیک شبکه تصادفی.



شکل ۳. نحوه‌ی محاسبه‌ی لزجت مصنوعی کارامانا.

نسبت گرماهای ویژه‌ی ماده‌ی موجود در سلول، ρ_i چگالی و C_s سرعت صوت است. این دو کمیت اخیر به‌صورت رابطه‌های ۲۴ و ۲۵ محاسبه می‌شوند.

$$\rho_I = \frac{\gamma \rho_b \rho_c}{\rho_b + \rho_c} \quad (24)$$

$$C_s = \min(C_{s,b}, C_{s,c}) \quad (25)$$

در آخر تابع محدودکننده ψ_i به‌صورت همان رابطه‌ی ۲۰ تعریف می‌شود. با این تفاوت که در اینجا از رابطه‌ی تعمیم‌یافته برای r_l و r_r استفاده می‌شود. [۷] این فرم‌های تعمیم‌یافته در روابط ۲۶ و ۲۷ بیان شده‌اند:

$$r_l = \frac{\Delta v_{i+1} \cdot \Delta \vec{v}_i}{\Delta X_{i+1} \cdot \Delta \hat{X}_i} \bigg/ \frac{|\Delta v_i|}{|\Delta X_i|} \quad (26)$$

$$r_r = \frac{\Delta v_{i-1} \cdot \Delta \vec{v}_i}{\Delta X_{i-1} \cdot \Delta \hat{X}_i} \bigg/ \frac{|\Delta v_i|}{|\Delta X_i|} \quad (27)$$

پارامترهای مورد نیاز برای محاسبه‌ی روابط ۲۶ و ۲۷ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند (نقاط a, b, c, d در شکل ۳ مشخص شده‌اند).

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_b - x_c; \quad \Delta x_{i+1} = x_c - x_d; \quad \Delta x_{i-1} = x_a - x_b \\ \Delta v_i &= v_b - v_c; \quad \Delta v_{i+1} = v_c - v_d; \quad \Delta v_{i-1} = v_a - v_b \end{aligned} \quad (28)$$

در آخر باید نیروی $f_{i=1}$ به مجموع نیروهای گره‌های b و c در معادله‌ی اندازه حرکت و انرژی اضافه شود. برای این منظور این نیرو باید به نیروهای گره b به‌صورت مثبت، و به نیروهای گره c به‌صورت منفی اضافه شود. براساس مباحث قبلی کاملاً مشخص است که این لزجت مصنوعی تمام خواص پنج‌گانه‌ی مورد نیاز را دارد.

۶. نتایج

در این قسمت با حل عددی چند مسئله‌ی نمونه، نقاط قوت و ضعف لزجت مصنوعی کارامانا بررسی می‌شود. این مسائل به‌گونه‌یی انتخاب

برابر صفر انتخاب شود (این کار به معنای حذف کل لزجت مصنوعی از فرایند حل عددی است)، نتایج عددی توزیع چگالی بسیار نزدیک به حالت ۶ الف را پیش‌بینی می‌کند. در حقیقت این مسئله نشان می‌دهد که لزجت مصنوعی کاراماناً^[۶] قابلیت تشخیص حرکت آدیاباتیکی را از موج ضربه‌یی داشته و در این حالت می‌تواند با موفقیت، اثر لزجت مصنوعی را از فرایند حل حذف کند.

۳.۶. موج بلاست سدوف

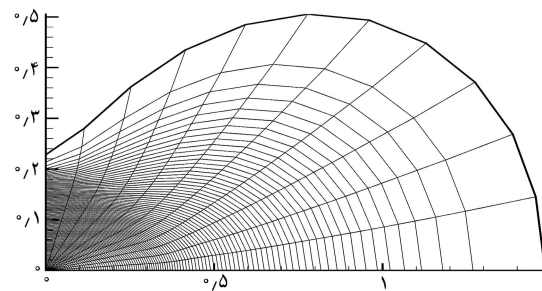
در این بخش مسئله‌ی موج بلاست سدوف^[۱۱] در مختصات استوانه‌یی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مسئله از یک میدان مربعی که شبکه‌ی محاسباتی دکارتی بر روی آن به وجود آمده تشکیل شده است. ابعاد این میدان $۱٫۲۵ \times ۱٫۲۵$ واحد بوده و محور افقی محور تقارن آن است. فشار در تمام این میدان برابر صفر، و چگالی برابر واحد است. انرژی داخلی نیز در تمام سلول‌ها به‌جز سلول اول از سمت راست که برابر $۲۷/۷$ واحد است، معادل صفر است. این ترکیب سبب می‌شود تا یک موج ضربه‌یی واگرا از داخل به سمت خارج میدان ایجاد شده و شروع به حرکت کند. حل این مسئله تحلیلی است و این حل پیش‌بینی می‌کند که در زمان واحد موج ضربه‌یی مسافتی برابر یک واحد را طی خواهد کرد. در این بخش، این مسئله در دو مرحله حل شده است. ابتدا در حالتی که لزجت مصنوعی به‌صورت کامل فعال است، و در حالت دوم محدودکننده‌ی لزجت مصنوعی از فرایند حل حذف شده است. نتایج این دو حل در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. هدف از این مسئله بررسی اثر لزجت مصنوعی در مسائل واگراست. اصولاً لزجت مصنوعی مشکل چندانی در بررسی مسائل واگرا ایجاد نمی‌کند^[۶] این مطلب در دو شکل ۷ و ۸ قابل مشاهده است. چنان‌که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، وجود یا عدم وجود محدودکننده در شکل نهایی شبکه‌ی محاسباتی (شکل‌های ۷ ب و ۸ ب) و همچنین موقعیت موج تأثیری ندارد. چنان‌که حل تحلیلی در مورد این مسئله پیش‌بینی می‌کند، در هر دو حالت موج ضربه‌یی بعد از طی زمان واحد با دقت خوبی در موقعیت واحد قرار دارد. در اینجا باید به این نکته اشاره کرد که اگرچه وجود محدودکننده در این مسئله اثر چندانی ندارد، چنان‌که از شکل ۸ الف پیداست عدم وجود آن سبب تشدید نوسانات غیرفیزیکی در نزدیکی محور شعاعی (محور عمودی) می‌شود.

۷. مشکلات پیشرو

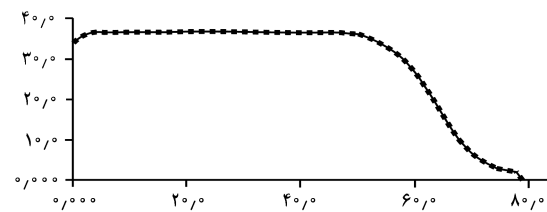
اعمال لزجت مصنوعی به مسائلی که در آنها یک موج ضربه‌یی ثابت و پابا مورد بررسی قرار می‌گیرد معمولاً منتج به نتایج صحیح خواهد شد. اما اگر ضربه با یک دیواره‌ی صلب برخورد کند، یا از یک مرز باگرادیان چگالی زیاد عبور کند (همانند آنچه که در مرز میان دو ماده به‌وقوع می‌پیوندد)، و

سرعتی برابر $(-z, -r/4)$ در مختصات استوانه‌یی در حال حرکت‌اند. همچنین سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی نیز دارای انرژی داخلی متناسب با $(3z/8)^2$ هستند. این چنین مقادیر برای پارامترهای میدانی سبب ایجاد انقباض آدیاباتیکی زیادی در جهت r و انبساط آیزنتروپیک در جهت z خواهد شد. این مسئله دارای حل تحلیلی بوده و این حل پیش‌بینی می‌کند چگالی بعد از منعکس شدن موج انبساطی (زمان حدود 0.8° واحد) از مرکز در پشت این موج برابر $37/4$ باشد.

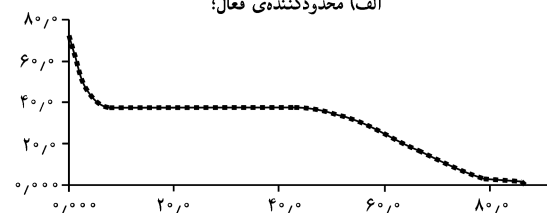
شکل ۵ نشان‌دهنده‌ی شبکه‌ی محاسباتی در این حالت است. همچنین شکل ۶ الف نشان‌گر توزیع چگالی در این شبکه در راستای شعاعی (محور r) در نقطه‌یی نزدیک مرکز کره است. چنان‌که از این نمودار پیداست مقدار چگالی در ناحیه‌ی موج انعکاسی بسیار به مقدار تحلیلی نزدیک است. همچنین مقدار چگالی در ناحیه‌ی موج انعکاسی مطابق پیش‌بینی حل تحلیلی ثابت است. در شکل ۶ ب همین نمودار در حالتی که محدودکننده‌ی لزجت مصنوعی غیرفعال باشد نمایش داده شده است. چنان‌که در این نمودار دیده می‌شود، حذف محدودکننده سبب بروز خطای بسیار زیاد در نواحی نزدیک مرکز می‌شود؛ به طوری که چگالی در این نواحی حتی تا دو برابر میزان واقعی خود می‌رسد. اگر در این حالت ضرایب ثابت لزجت مصنوعی یعنی C_1 و C_2 نیز



شکل ۵. شبکه‌ی محاسباتی در مسئله‌ی کوگشل.



الف) محدودکننده‌ی فعال؛



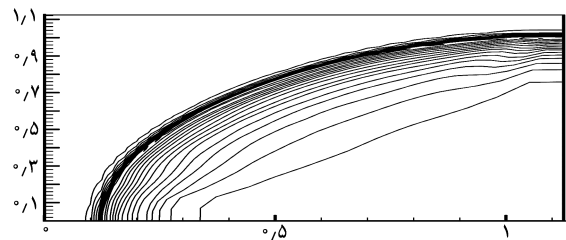
ب) محدودکننده‌ی غیرفعال.

شکل ۶. توزیع چگالی در مسئله‌ی کوگشل.

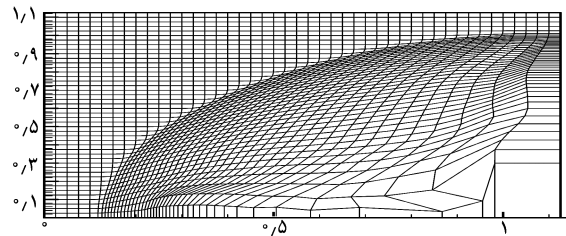
است که لزجت مصنوعی سبب تغییر موج ضربه‌یی از ناپوستگی به یک جهش در عرض چند سلول می‌شود. تعداد این سلول‌ها نه به واسطه‌ی فیزیک موج ضربه‌یی، بلکه یک مقدار معین وابسته به نوع لزجت مصنوعی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین بروز خطا در هنگامی که موج ضربه‌یی به مرزی برخورد می‌کند معمولاً به واسطه‌ی وقوع پدیده‌یی موسوم به «گرم شدن مصنوعی» است. وقوع چنین خطاهایی در کار محققان مشهود است. [۱۴] چنین پدیده‌یی سبب شده است که بعضی از محققان در این زمینه استفاده از سازوکار هدایت حرارت مصنوعی [۱۳] را در کنار لزجت مصنوعی پیشنهاد کنند. [۱۴] روش‌هایی که سعی می‌کنند مشکلات فوق را بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت مصنوعی حل کنند بر روی یک شبکه‌ی یک بعدی گسترش یافته‌اند و تعمیمی برای آنها در مختصات دو و سه بعدی وجود ندارد. اما انتقال حرارت مصنوعی برای بررسی مسائل دو و سه بعدی نیز گسترش یافته است. همچنین این روش در تحلیل بعضی از مسائل کارایی داشته است [۱۴] اما استفاده از آن در مسائل دیگر هنوز جای بررسی بیشتری دارد.

۸. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر انواع لزجت مصنوعی مورد استفاده در تحقیقات مختلف مرور شد. چنان که مشاهده شد تقریباً تمامی انواع لزجت مصنوعی بیان شده در حالات خاص -- نظیر مسائل همگرا یا توانایی تمایز بین انقباض آیزتروپیک و ضربه -- رفتار مناسبی نداشتند. در این بین لزجت مصنوعی کارامانا [۶] تنها لزجت مصنوعی است که دارای خواص پنج‌گانه‌ی مطرح شده برای لزجت مصنوعی است. چنان که از نتایج عددی برمی‌آید این لزجت مصنوعی به‌طور دقیق توانایی تشخیص انقباض آیزتروپیک از ضربه را دارد. همچنین به‌واسطه‌ی استفاده از لزجت مصنوعی کروپانکو [۵] توانایی تشخیص حرکت‌های صلب را دارد. این خواص این امکان را برای این نوع لزجت فراهم می‌آورد تا خصوصاً در مسائل همگرا بر دیگر انواع لزجت مصنوعی برتری داشته باشد. بررسی‌های صورت گرفته بر روی این نوع لزجت مصنوعی نشان می‌دهد که این نوع لزجت مصنوعی دقت عددی لازم برای رقابت با روش‌های گودونف را دارد. [۶] این دقت به‌خصوص به‌واسطه‌ی بیان بسیار دقیق و فیزیکی خواص لزجت در آن است. این مسئله سبب می‌شود که حتی در بررسی مسائل در دو و سه بعد به‌واسطه‌ی نیاز روش‌های گودونف به شکست عملگر برای تعمیم به این ابعاد ارجحیت یابد. همچنین چنان که بیان شد فرمول‌بندی لزجت مصنوعی با پیچیده‌شدن فیزیک حاکم بر مسئله تغییری نخواهد کرد اما در روش‌های گودونف، فرمول‌بندی و روش حل به‌شدت پیچیده خواهند شد. تنها مشکل این لزجت مصنوعی محاسبه‌ی آن بر روی اضلاع

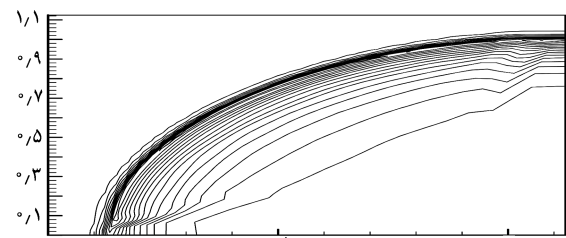


الف) کانتور چگالی، محدودکننده‌ی فعال؛

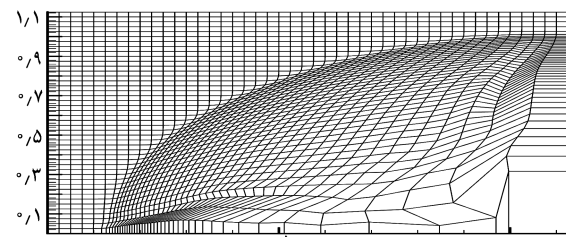


ب) شبکه محاسباتی، محدودکننده‌ی فعال.

شکل ۷. مسئله‌ی بلاست سدوف با محدودکننده‌ی فعال.



الف) کانتور چگالی، محدودکننده‌ی غیرفعال؛



ب) شبکه محاسباتی، محدودکننده‌ی غیرفعال.

شکل ۸. مسئله‌ی بلاست سدوف با محدودکننده‌ی غیرفعال.

یا از یک شبکه‌ی محاسباتی دارای سلول‌هایی با اندازه‌ی متغیر عبور کند خطا در حل آشکار می‌شود. این‌گونه خطاها در لزجت مصنوعی کارامانا نیز وجود دارد. اولین بار کامرون [۱۲] در یک شبکه‌ی یک بعدی به بررسی این مشکل پرداخت. او با معرفی روشی برای تعیین ضرایب در لزجت مصنوعی و همچنین تعیین اندازه‌ی اولیه‌ی سلول‌ها سعی در کاستن این‌گونه خطا کرد. مارگولین [۱۳] نیز در کار خود نشان داد که با معرفی مناسب روش گسسته‌سازی اپراتور گرادیان که در محاسبه‌ی نیروها مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌توان از بروز چنین مشکلاتی جلوگیری کرد. این‌گونه بررسی‌ها نشان می‌دهند که بروز خطا در محاسبه‌ی موج ضربه‌یی در شبکه‌های غیریکنواخت و یک‌اندازه (اما از جنس یک ماده) به این دلیل

از روش گسسته‌سازی کارامانا^[۴] برای گسسته‌سازی معادلات حاکم و با توجه به این که این روش گسسته‌سازی خود از اطلاعات اضلاع شبکه برای حل معادلات اویلر استفاده می‌کند استفاده از لزجت مصنوعی فوق سبب افزایش حجم حافظه‌ی مورد نیاز نشده است. اما استفاده از آن در روش‌های گسسته‌سازی دیگر، به‌خصوص روش‌های مرکز‌گرا^{۱۴} باید مورد بررسی قرار گیرد.

سلول‌های شبکه‌ی محاسباتی است. این امر سبب می‌شود تا مقدار حافظه‌ی بیشتری برای نگهداری اطلاعات این اضلاع و همچنین نیروهای محاسبه شده مورد نیاز باشد. همچنین به دلیل این که اضلاع یک شبکه بیشتر از سلول‌های آن شبکه‌اند، حجم محاسبات بیشتری نسبت به انواع لزجت مصنوعی دیگر که مقدار آنها در مرکز سلول محاسبه می‌شود مورد نیاز است. در نوشتار حاضر به‌واسطه‌ی استفاده

پانویس

1. shock wave
2. shock tracking
3. artificial viscosity
4. operator splitting
5. dissipativity
6. wave front
7. compatible
8. staggered grid
9. median mesh
10. limiter
11. uniform compression
12. rigid rotation
13. artificial heat flux
14. collocated

منابع

1. VonNeumann, J. and Richtmyer, R.D. "A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks," *J. Appl. Phys.* **21**, p. 232 (1950).
2. vanLeer, B. "Towards the ultimate conservative difference scheme 5: A second order sequel to Godunov's method," *J. Comput. Phys.* **32**, p. 101 (1979).
3. Landshoff, R. "A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks", Los Alamos National Laboratory Report, LA-1930, (1955).
4. Favorskii, A.P. Moiseenko, L.V. Tishkin, V.F. and Tyurina, N.N. "The introduction of artificial dissipators into finite-difference schemes of hydrodynamics", preprint, No. 18, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia (1982).
5. Kuropatenko, V.F. "In difference methods for solutions of problems of mathematical physics", vol. 1, edited by N.N. Janenko, Amer. Math. Soc., Providence, p. 116 (1967).

6. Caramana, E.J. Shashkov, M.J. and Whalen, P.P. "Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations", *J. Comput. Phys.* **144**, p. 70 (1998).
7. Caramana, E.J. Burton, D.E. Shashkov, M.J. and Whalen, P.P. "The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy", *J. Comput. Phys.* **146**, p. 227 (1998).
8. Schulz, W.D. "Two-dimensional Lagrangian hydrodynamic difference equations", *Methods Comput. Phys.* **3**, 1 (1964).
9. Christiansen, R.B. "Godunov methods on a staggered mesh-an improved artificial viscosity", Lawrence Livermore National Laboratory Report, UCRL-JC-105269 (1991).
10. Coggeshall, S.V. and Meyer-ter-Vehn, J. "Group invariant solutions and optimal systems for multidimensional hydrodynamics", *J. Math. Phys.* **33**, p. 3585 (1992).
11. Sedov, L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York, (1959).
12. Cameron, I.G. "An analysis of the errors caused by using artificial viscosity terms to represent steady-state flow", *J. Comput. Phys.* **1**, 1 (1966).
13. Margolin, L.G. Ruppel, H.M. and Demuth, R.B. *Gradient Scaling for Nonuniform Meshes*, Los Alamos National Laboratory Report, presented to Fourth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (1985).
14. Noh, W.F. "Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux", *J. Comput. Phys.* **72**, p.78 (1987).