تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه به‌وسیله‌ی وارون تظریف «دو»

نظام‌الدین مهدوی امیری (استاد)
دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
فرامرز فامیل سماواتی (استادیار)
بخش علوم کامپیوتر، دانشگاه کالگری، کانادا

تعیین وارون یک تظریف[۱] با استفاده از برازش کمترین مربعات سراسری منجر به ساختار تفکیک‌پذیری چندگانه‌یی می‌شود که می‌توان آن را یک سیستم موجک شبه‌متعامد تلقی کرد.[۱] اما برای رسیدن به تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه باید از موجک‌های دومتعامد[۲] استفاده کرد. گاهی برای وارون تظریف منحنی‌ها و رویه‌های تانسوری از برازش کمترین مربعات موضعی استفاده شده است که به سیستم موجک دومتعامد منجر می‌شود.[۲] در اینجا با استفاده از وارون موضعی تظریف «دو» به ساختار تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه دست می‌یابیم. با تظریف «دو» یک رویه‌ی خشن به یک رویه‌ی ظریف تبدیل می‌شود. این عمل با انقباض وجوه رویه‌ی خشن و افزودن تعدادی وجوه جدید انجام می‌شود.

در این نوشتار، برای وارون تظریف «دو» در تبدیل یک رویه‌ی ظریف به رویه‌یی خشن و خطای وابسته به آن روشی ارائه می‌کنیم. در این فرایند ابتدا وجوهی از رویه‌ی ظریف را می‌یابیم که می‌توانند از انقباض یک وجه خشن در روند تظریف «دو» ناشی شوند. پس از آن وجوه به دست آمده را منبسط می‌کنیم. چون در حالت کلی وجوه انبساط‌یافته لزوماً بر هم منطبق نمی‌شوند، معمولاً چند نامزد برای هر رأس رویه‌ی خشن ایجاد می‌شوند. برای شناسایی نامزدها، نموداری می‌سازیم که رئوس هر مؤلفه‌ی همبندی آن را نامزدهای وابسته به یک رأس رویه‌ی خشن تشکیل دهند. برای تعیین مؤلفه‌های همبندی، از پیمایش اول سطح (عمق) در نمودار استفاده می‌کنیم. نهایتاً، هر رأس رویه‌ی خشن را میانگینی از نامزدهای وابسته به آن قرار می‌دهیم. نتایج حاصل، در فشرده‌سازی تصاویر رقمی و بازسازی مناسب آنها کاربرد دارد.

مقدمه

در تفکیک‌پذیری چندگانه هدف دسترسی به نمایشی است که در آن تقریب‌های مختلف یک مدل از نوع منحنی، تصویر یا رویه در اختیار باشد و به‌سادگی بتوان از طریق هر یک از این تقریب‌ها به تقریب‌های دیگر دست یافت. برای رسیدن به این هدف لازم است با عملیات بازگشت‌پذیر، تقریب ظریفی از مدل را در تفکیک‌پذیری بالا به تقریبی خشن از مدل در تفکیک‌پذیری پایین تبدیل کرد. بنابراین، در این تبدیل ذخیره‌سازی مناسب و فشرده برای اطلاعات حذف شده ضروری است. معمولاً از توابع موجک برای محاسبه‌ی تقریب اطلاعات حذف شده استفاده می‌کنند. عمل تبدیل تقریب مدل از تفکیک‌پذیری بالا به تفکیک‌پذیری پایین و تعیین ضرایب توابع موجک را «تجزیه» و عمل بازسازی تقریب اولیه را «ترکیب» می‌نامند.

مسئله‌ی تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه کاربردهای متنوعی در گرافیک رایانه‌یی دارد.[۳] در اینجا می‌خواهیم با استفاده از تعمیم ایده‌ی وارون موضعی[۲]، مسئله‌ی تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه را حل کنیم. به همین منظور وارون تظریف «دو» را که یکی از تظریف‌های کارآمد رویه‌ها با توپولوژی دلخواه است، معرفی می‌کنیم.

تظریف یکی از توانمندترین روش‌های تولید رویه و منحنی در گرافیک رایانه‌یی است. در این روش با استفاده از ظریف‌سازی متوالی نقاط کنترل، تقریب گسسته‌یی از مدل به دست می‌آورند. عمل تظریف معمولاً به وسیله‌ی یک ماتریس مشخص می‌شود. اگر C^k نقاط کنترلی در مرحله‌ی kام و C^{k+1} نقاط حاصل از عمل تظریف روی C^k باشد، آنگاه داریم:

$$C^{k+1}=P^kC^k \tag{۱}$$

که در آن C^k یک بردار rتایی، C^{k+1} یک بردار sتایی و P^k یک ماتریس $s\times r$ $(s>r)$، به نام ماتریس تظریف است. اگر چه P^k به مرحله‌ی k وابسته است، معمولاً یک ماتریس نواری است که چون

ستون‌های آن (به‌استثنای چند ستون اول و آخر) از انتقال صفر در یک ستون ثابت به وجود می‌آیند، به سادگی قابل تولید است.

در تفکیک‌پذیری چندگانه معمولاً C^{k+1}، تقریبی از مدل در تفکیک‌پذیری بالا، در دست است و فقط لازم است آن را به C^k، تقریب مدل در تفکیک‌پذیری پایین، و E^k، ضرایب موجک، تجزیه کنیم. در حالت کلی لزومی ندارد که C^{k+1} حاصل تظریف باشد. برای کارایی عوامل ساخته شده لازم است:

۱. C^k تقریب مناسبی از C^{k+1} باشد؛

۲. اندازه‌ی حافظه‌ی مورد نیاز برای ذخیره‌سازی C^k و E^k بیشتر از C^{k+1} نباشد؛

۳. مقدار زمان مورد نیاز برای عمل تجزیه‌ی C^{k+1} به C^k و E^k نسبت به s خطی باشد؛

۴. مقدار زمان مورد نیاز برای عمل بازسازی C^{k+1} از روی C^k و E^k نسبت به s خطی باشد.

عملیات تجزیه و ترکیب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:[2]

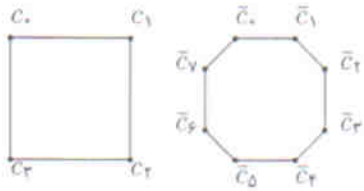
$$\begin{bmatrix} A^k \\ B^k \end{bmatrix} C^{k+1} = \begin{bmatrix} C^k \\ E^k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} P^k & Q^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^k \\ E^k \end{bmatrix} = C^{k+1}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} A^k \\ B^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^k & Q^k \end{bmatrix} = I \tag{4}$$

بنابراین، اگر ماتریس‌های Q^k، P^k، B^k و A^k نمودارهای مناسبی داشته باشند، انجام تجزیه (رابطه‌ی ۲) و ترکیب (رابطه‌ی ۳) به سادگی انجام می‌پذیرند. در کاربردها فقط P^k ساختار معلوم و مناسبی دارد ولی ساختار ماتریس‌های Q^k، B^k و A^k به روش مورد استفاده بستگی دارند. در عمل، ویژگی‌هایی مانند نواری بودن با طول نوار کوتاه، و سادگی درایه‌های این ماتریس‌ها مد نظر قرار می‌گیرد. گاهی این ماتریس‌ها با استفاده از وارون تظریف به دست آمده‌اند.[1] در این موارد که از برازش کمترین مربعات[3] (LS) استفاده شده است، اگر چه در رهیافت ارائه شده مستقیماً به B^k و A^k نیازی نیست، این ماتریس‌ها معمولاً پر هستند.[1] به علاوه در حل مسئله‌ی LS برای تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی رویه‌ها با توپولوژی دلخواه (غیر تانسوری) با دستگاهی با ماتریس ضرایب پرصفر (نه لزوماً نواری) مواجه می‌شویم. در نتیجه امکان خطی‌بودن عمل تجزیه از بین می‌رود.

ما با استفاده از وارون موضعی تظریف، A^k و B^k را به صورت نواری برای منحنی‌ها و رویه‌های تانسوری به دست آورده‌ایم.[2]



شکل ۱. مرحله‌ی اول تظریف تناوبی چیکین.

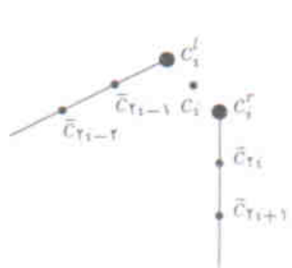
اکنون به‌منظور تعمیم این روش برای رویه‌ها با توپولوژی دلخواه، از تظریف «دو» استفاده می‌کنیم. از آنجا که تظریف «دو» تعمیم‌یافته‌ی تظریف چیکین است، ابتدا به چگونگی تعیین وارون موضعی تظریف چیکین به صورت هندسی می‌پردازیم.

تظریف چیکین[4]

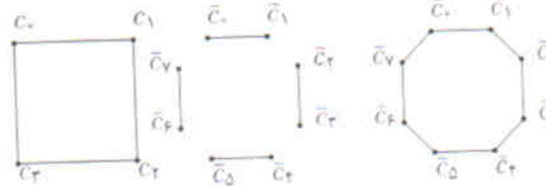
تظریف چیکین یکی از تظریف‌های ساده و کارآمد است[4] که از دیدگاه هندسی یک روش «گوشه‌برشی» محسوب می‌شود. مرحله‌ی از تظریف چیکین در شکل ۱ مشاهده می‌شود (برای ساده‌سازی نماد c_i^k را به c_i و نماد c_j^{k+1} را به $\bar{c}_j$ تبدیل کرده‌ایم). در این روش، ابتدا دو نقطه‌ی جدید بر روی هر پاره‌خط به نسبت‌های $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ تعیین می‌کنند و بعد نقطه‌ی دوم هر پاره‌خط را به نقطه‌ی اول پاره‌خط بعدی وصل می‌کنند. می‌توان نشان داد که نقاط حاصل از تظریف چیکین به یک منحنی بی‌ـاسپلاین درجه‌ی دوم میل می‌کنند، و در نتیجه منحنی حدی این تظریف مشتق‌پذیر پیوسته $\mathbf{C}^1$ است.[5]

وارون موضعی تظریف چیکین

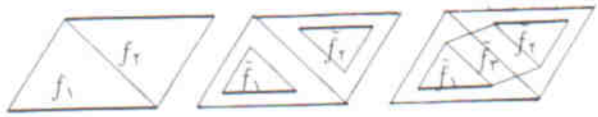
در عمل تظریف، فرض بر آن است که c_iها داده شده‌اند و محاسبه‌ی $\bar{c}_j$ها مورد نظر است. در عمل وارون تظریف، به منظور دستیابی به یک تفکیک‌پذیری پایین از یک تفکیک‌پذیری بالاتر، فرض می‌کنیم که $\bar{c}_j$ها داده شده‌اند و می‌خواهیم c_iها را به دست آوریم — لزومی ندارد که $\bar{c}_j$ها از یک عمل تظریف حاصل شده باشند. یک وضعیت ممکن در شکل ۲ ارائه شده است. مشاهده می‌کنیم که در وهله‌ی اول دو نامزد برای جانشینی c_i مطرح می‌شود. نامزد اول با استفاده از $\bar{c}_{2i-2}$



شکل ۲. وضعیتی برای وارون موضعی تظریف چیکین.



شکل ۳. نمایش دومرحله‌یی قاعده‌ی چیکین.



شکل ۴. یک تظریف ساده‌ی «دو».

و ... $\bar{c}_{2i}$ تعیین می‌شود که آن را با c_i^l نمایش می‌دهیم. با استفاده‌از $\bar{c}_{2i}$ و $\bar{c}_{2i+1}$ نامزد دوم، c_i^r، تعیین می‌شود.

واضح است که اگر $\bar{c}_j$ها از یک تظریف به دست آمده باشند، آنگاه باید: $c_i^l = c_i^r = c_i$. اما در حالت کلی و از دیدگاه محاسباتی، نمی‌توان انتظار داشت که این مقادیر بر هم منطبق باشند. اگر بگوییم $c_i = \frac{1}{2}(c_i^l + c_i^r)$، می‌توان نشان داد که این تعریف به‌طور موضعی کمترین خطا ــ به‌مفهوم نُرم اقلیدسی ــ را دارد. اکنون e_i خطای موضعی وابسته به c_i را به صورت $e_i = c_i - c_i^l$ تعریف می‌کنیم و با استفاده از مجموعه‌ی این تعاریف، برای عملیات تجزیه و ترکیب، ماتریس‌هایی ساده و نواری به دست می‌آوریم.[2]

تظریف «دو»

این عمل یک روش «گوشه‌برشی» برای رویه‌های سه‌بعدی است.[4] در این تظریف، شکل وجوه رویه دلخواه است. می‌توان نشان داد که تظریف «دو» تعمیمی از روش چیکین است. برای این منظور روش چیکین را در دو مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا هر «پاره‌خط» از چندضلعی کنترلی به پاره‌خط جدیدی تبدیل می‌شود. این پاره‌خط جدید از انقباض پاره‌خط اولیه با ضریب a به مرکز آن ایجاد می‌شود. در مرحله‌ی دوم پاره‌خط‌هایی که قبل از تظریف به هم متصل بوده‌اند، با «پاره‌خطی جدید» به هم متصل می‌کنند. مثلاً در شکل ۳، (c_0, c_1) به $(\bar{c}_0, \bar{c}_1)$ تبدیل شده است و در مرحله‌ی بعد پاره‌خط $(\bar{c}_0, \bar{c}_1)$ با پاره‌خط $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ به $(\bar{c}_2, \bar{c}_3)$ متصل شده است. ضریب a را باید چنان انتخاب کرد که منحنی حدی $\mathbf{C}^1$ باشد. به‌طور مثال، $a = \frac{1}{2}$ در قاعده‌ی چیکین به منحنی حدی $\mathbf{C}^1$ منجر می‌شود.

در تظریف «دو»، عملیات انجام شده روی «پاره‌خط» در چندضلعی کنترلی به روی «وجه» در چندوجهی کنترلی تعمیم می‌یابد. عمل انقباض روی وجه، و عمل اتصال با استفاده از «وجه جدید» انجام می‌گیرد. برای مثال در شکل ۴ رویه‌ی اولیه دارای دو وجه f_1 و f_2 است. $\tilde{f}_1$ و $\tilde{f}_2$ در مرحله‌ی اول از انقباض f_1 و f_2 به دست می‌آیند و در مرحله‌ی بعد به وسیله‌ی $\tilde{f}_3$ به هم متصل می‌شوند.

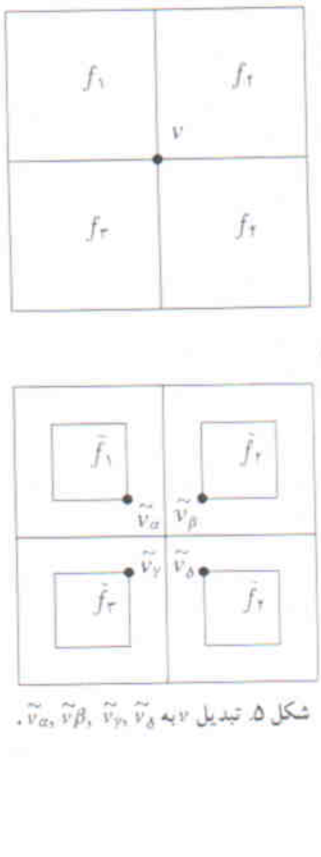
برای شرح دقیق این تظریف، فرض کنید (F, V) یک رویه‌ی وجه‌بندی شده با توپولوژی دلخواه باشد، که در آن V رئوس و F وجوه رویه را مشخص می‌کند. هر رأس $v \in V$ به وسیله‌ی مختصات آن در فضا و هر وجه به وسیله‌ی دنباله‌ی رئوس متوالی وابسته به آن وجه معلوم می‌شود. مجموعه‌ی E را مجموعه‌ی یال‌های (F, V) در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم (NF, NV) رویه‌ی حاصل از تظریف رویه‌ی (F, V) را معرفی کنیم. ابتدا هر وجه $f_i \in F$ را چنان به وجه جدید $\tilde{f}_i \in NF$ تبدیل می‌کنیم که اگر $f_i = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$، آنگاه:

$$\tilde{f}_i = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n)$$

که در آن $\tilde{v}_j$ها از انقباض v_j نسبت به مرکز d در وجه f_i به دست می‌آیند، یعنی:

$$\begin{cases} \tilde{v}_j = a_n\, d + (1 - a_n)\, v_j \\ d = \frac{1}{n}\,(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \end{cases} \tag{۵}$$

در رابطه‌ی ۵ مقدار a_n چنان بین صفر و یک انتخاب می‌شود که رویه‌ی حدی $\mathbf{C}^1$ (هموار) باشد.[4] پس از انجام این عمل، $\tilde{v}_j$های حاصل از همه‌ی وجوه، مجموعه‌ی رئوس جدید یعنی NV را تشکیل می‌دهند. توجه داریم که هر رأس $v \in V$ به k، تعداد وجوه متصل به v، رئوس جدید NV متناظر می‌شود (شکل ۵). مجموعه‌ی وجوه جدید NF به سه نوع زیر تقسیم می‌شود:



شکل ۵. تبدیل v به $\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta, \tilde{v}_\gamma, \tilde{v}_\delta$.

● وجه ـ وجه: مجموعه‌ی وجوه جدید حاصل از وجوه F یعنی $\tilde{f}_i$ها را با F_F نمایش می‌دهیم. وجوه $\tilde{f}_1$، $\tilde{f}_2$، $\tilde{f}_3$، $\tilde{f}_4$ و $\tilde{f}_5$ در شکل ۵ از این نوع‌اند.

● وجه ـ یال: اگر f_i به f_j با یال e در نمودار (F, V) متصل باشد، آنگاه بین وجوه $\tilde{f}_i$ و $\tilde{f}_j$ در (NF, NV) وجه $\tilde{f}_e$ را چنان قرار می‌دهیم که $\tilde{f}_i$ با $\tilde{f}_e$ و $\tilde{f}_e$ با $\tilde{f}_j$ مجاور باشند. بنابراین به‌ازای هر یال غیر مرزی در (F, V) یک وجه جدید در NF ایجاد می‌شود. این وجوه را با F_E نمایش می‌دهیم.

● وجه ـ رأس: به‌ازاء هر رأس درونی v در (F, V) یک وجه جدید $\tilde{f}_v$ نسبت می‌دهیم به‌طوری که رأس‌های جدید $\tilde{v}_i$ متناظر با v به این وجه متصل باشند. این دسته از وجوه را با F_V نمایش می‌دهیم.

توجه: به سادگی می‌توان نشان داد:

۱. هر وجه در F_E چهارضلعی است؛

۲. تعداد اضلاع هر وجه در F_V برابر است با درجه‌ی رأس متناظر با آن در V.

پس از تعیین این وجوه عمل تظریف کامل می‌شود. به عبارت دیگر داریم:

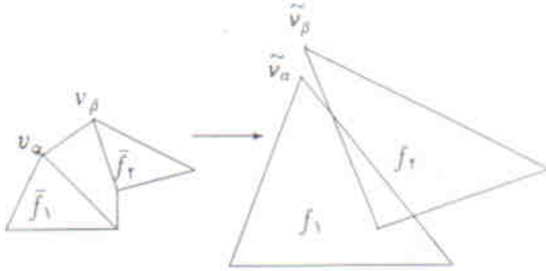
$$NF = F_F \cup F_E \cup F_V$$

وارون تظریف «دو»

با وارون‌سازی تظریف «دو»، به تفکیک‌پذیری رویه‌ها با توپولوژی دلخواه دست یافتیم. دیدیم که چگونه با تظریف «دو» می‌توان رویه‌ی (F, V) را به رویه‌ی ظریف (NF, NV) تبدیل کرد. NF از اجتماع سه نوع وجه مختلف حاصل می‌شود که با F_F (وجوه حاصل از وجه)، F_E (وجوه یالی)، و F_V (وجوه رأسی) نمایش داده می‌شوند. برای وارون این تظریف فرض بر این است که (NF, NV) داده شده و تعیین یک (F, V) مناسب مورد نظر است. می‌دانیم که هر وجه F_F از انقباض یک وجه F نسبت به مرکز آن ایجاد می‌شود. بنابراین اگر F_F در دست باشد و برای هر وجه آن عمل انبساط نسبت به مرکز را انجام دهیم، وجوه F حاصل می‌شوند. ولی در حالت کلی، لزومی ندارد که (NF, NV) مستقیماً حاصل از عمل تظریف باشد. به عبارت دقیق‌تر، می‌توان این گونه فرض کرد که مختصات رأس‌های NV پس از عمل تظریف، به هر دلیلی (ازجمله محاسباتی)، دقیقاً همان مختصات رأس‌های حاصل از تظریف نباشند و باید انتظار داشت که این تغییر موجب عدم اتصال دقیق وجوه F، حاصل از انبساط وجوه F_F شود (شکل‌های ۶ و ۷).

در شکل ۶ یک رویه‌ی ساده پس از عمل تظریف مشخص شده است که در آن وجوه f_1 و f_2 به $\tilde{f}_1$ و $\tilde{f}_2$ و رأس v به v_α و v_β تبدیل شده‌اند. در نمونه‌ی سمت چپ شکل ۷، رویه‌ی ظریف پس از تغییر

شکل ۶. تظریف «دو» در یک شکل ساده.



شکل ۷. عدم اتصال در وجوه حاصل از انبساط وجوه F_F.

مختصات رئوس ارائه شده است. در نمونه‌ی سمت راست، مشاهده می‌شود که وجوه f_1 و f_2 دقیقاً به یکدیگر وصل نشده‌اند. به عبارت دیگر، برای v دو نامزد مختلف $\tilde{v}_\alpha$ و $\tilde{v}_\beta$ به وجود آمده‌اند. این حالت کاملاً مشابه وضعیتی است که در وارون چیکین در شکل ۲ وجود داشته است.

پس در حالت کلی می‌توان انتظار داشت که پس از عمل انبساط وجوه F_F برای هر رأس در V نامزدهای متعددی (وابسته به تعداد وجوهی که به آن رأس متصل‌اند) ظاهر شوند. همانند وارون چیکین، از میانگین مختصات این نامزدها برای تعیین مختصات هر رأس استفاده می‌کنیم. با توجه به ملاحظات بالا، انجام مراحل کلی زیر برای وارون تظریف «دو» ضروری است:

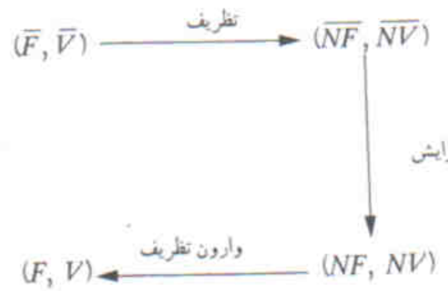
ـ یافتن وجوه F_F در N_F؛

ـ انبساط وجوه F_F؛

ـ تعیین نامزدها برای تمامی رئوس در V؛

ـ تعیین مختصات رئوس V.

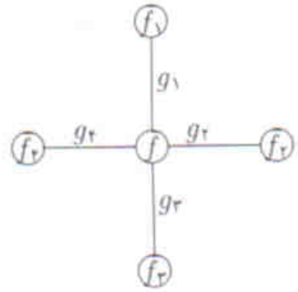
ذکر این نکته لازم است که فرض کرده‌ایم (NF, NV) از تغییر مکان رئوس یک رویه‌ی حاصل از تظریف به‌دست می‌آید (شکل ۸). باید توجه داشت که تظریف دقیق ممکن است از تبدیل $(\overline{F}, \overline{V})$ به $(\overline{NF}, \overline{NV})$ به دست آمده باشد، در حالی که وارون تظریف از نمودار موجود (NF, NV) با یک وارون‌سازی به (F, V) تبدیل می‌شود. به این ترتیب، هرچند رویه‌ی (NF, NV) از لحاظ مختصات رئوس آزاد است، از لحاظ تعداد، نوع و نحوه‌ی اتصال وجوه باید با تظریف «دو» قابل تولید باشد. این ضرورت در اکثر کاربردهای عملی توجیه‌پذیر است.



شکل ۸. تغییر مختصات رئوس کنترلی رویه‌ی ظریف.

		$\bar f_1$		
		g_1		
$\bar f_4$	g_4	$\bar f$	g_2	$\bar f_2$
		g_3		
		f_3		

شکل ۹. وجوه NF.



شکل ۱۰. نمودار منسوب به NF.

یافتن وجوه F_F در NF

از آنجا که $NF = F_F \cup F_V \cup F_E$، با تعیین وجوه F_F در NF می‌توان به وجوه F دست یافت. اگرچه در روند عمل ظریف و با استفاده از یک ساختمان داده‌ی مناسب می‌توان این نوع وجوه را در NF علامت‌گذاری کرد، برای افزایش کارایی و نیز عدم وابستگی به ظریف (جامعیت) روشی را ارائه می‌کنیم که با در دست داشتن تنها یکی از این نوع وجوه در F_F، بقیه‌ی وجوه را با یک جستجوی خطی تعیین می‌کند.

به همین منظور، با فرض این که $\bar f \in F_F$، می‌خواهیم بقیه‌ی عناصر F_F را در NF شناسایی کنیم. در این صورت اگر بین $\bar f$ و $\bar f_i$ یک وجه چهارضلعی $g_i \in F_E$ موجود باشد، آنگاه $\bar f_i$ نیز به F_F متعلق خواهد بود. در شکل ۹ وضعیتی خاص از این حالت ارائه شده است. توجه داریم که وجه g_1 ــ با این تعبیر که یک یال g_1 با $\bar f$ و یک یال دیگر آن با $\bar f_1$ مجاور است و $\bar f$ و $\bar f_1$ هیچ نوع مجاورت یالی و رأسی ندارند ــ بین $\bar f$ و $\bar f_1$ قرار دارد. بنابراین، $\bar f_1$ نیز به F_F متعلق است (در واقع قبل از ظریف، $\bar f$ و $\bar f_1$ دو وجه مجاور از رویه بوده‌اند که به هنگام ظریف وجه g_1 به یال مشترک این دو وجه منسوب شده است). در مورد $\bar f_2$، $\bar f_3$ و $\bar f_4$ نیز می‌توان به همین نتیجه رسید. به این ترتیب، g_1، g_2، g_3 و g_4 وجوه یالی متعلق به F_Eاند.

با این ملاحظات، مسئله‌ی یافتن عناصر F_F را به مسئله‌ی پیمایش[5] نمودار متناظر می‌کنیم. ابتدا نمودار G_F را چنان تعریف می‌کنیم که رئوس آن متناظر با وجوه F_F (با $\bar f$، وجه اولیه به‌عنوان ریشه) و یال‌های آن متناظر با وجوه F_E باشند. در شکل ۱۰ نمودار G_F منسوب به شکل ۹ ارائه شده است. در این صورت مسئله‌ی یافتن عناصر F_F با پیمایش رئوس این نمودار معادل می‌شود، و می‌توان با جستجوی اول سطح (یا اول عمق) رئوس G_F، به F_F دست یافت.[7]

عملیات اصلی در این پیمایش از مرتبه‌ی $O(ne)$ است که در آن ne تعداد یال‌های G_F است. با توجه به این که تعداد یال‌ها در G_F با تعداد عناصر F_E یکسان است، و از آنجا که

$$|F_E| \leq |NF| \leq |NV|$$

پس $ne \leq |NV|$ و در نتیجه پیمایش طرح شده، نسبت به تعداد رئوس کنترلی رویه‌ی ظریف، خطی است.

انبساط وجوه F_F

به‌منظور تعیین وجوه F، باید وجوه F_F را نسبت‌به مرکز آن منبسط کنیم (وارون عمل انقباض). در این‌مورد از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

- $\bar f$ برای یک وجه F_F با m ضلع؛
- $\bar v_1, ..., \bar v_m$ برای رئوس وجه $\bar f$؛
- $\bar d$ برای مرکز $\bar f$؛
- f برای وجه حاصل از انبساط $\bar f$؛
- $v_1, ..., v_m$ برای رئوس وجه f؛
- d برای مرکز f؛
- α_m برای ضریب هموارسازی منسوب به f (وابسته به m).

لازم به ذکر است که ضریب انبساط $\bar f$ برابر $\frac{1}{\alpha_m}$ است. با توجه به این نمادها ملاحظه می‌کنیم:

- مرکز f و $\bar f$ یکسان است، یعنی $d = \bar d$
- رابطه‌ی زیر بین رئوس f و $\bar f$ برقرار است:

$$v_i = \frac{1}{1-\alpha_m}\bar v_i + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}\bar d, \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (6)$$

بنابراین، با در دست داشتن $\bar f$ و با استفاده از رابطه‌ی ۶، رأس‌های مجاور f را می‌توان تعیین کرد.

تعیین نامزدهای مختلف برای رئوس V

فرض کنید که وجوه f و $\bar{f}$ با وجه g_i به هم مرتبط شده باشند (شکل ۹). در این صورت یال‌های $e=(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ و $e'=(\bar{v}_3, \bar{v}_4)$ طوری وجود دارند، که e بین $\bar{f}$ و g_i، و e' بین $\bar{f}_i$ و g_i واقع می‌شوند (شکل ۱۰). پس از انبساط $\bar{f}$ و $\bar{f}_i$ دو رأس متناظر با $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_3$ (v_1 و v_3)، و دو رأس متناظر با $\bar{v}_2$ و $\bar{v}_4$ (v_2 و v_4) باید منطبق باشند. ولی همانطور که قبلاً ذکر شد، با توجه به تغییر مکان احتمالی رئوس NV، این انطباق لزوماً صورت نمی‌گیرد. درنتیجه v_1 و v_3 دو نامزد برای یک رأس و v_2 و v_4 دو نامزد برای رأس دیگر هستند. بنابراین با استخراج این گونه وضعیت‌ها در روند تعیین وجوه F_F (پیمایش رئوس G_F) می‌توان جایگزین‌های مختلف هر رأس را به دست آورد. به همین منظور نمودار G_C را می‌سازیم که رئوس آن با رئوس NV یکسان است. در هر مرحله از پیمایش G_F، دو یال متناظر با نامزدها را برای رئوس این نمودار اضافه می‌کنیم. برای مثال، اگر قرار باشد $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_3$ دو نامزد برای یک رأس و $\bar{v}_2$ و $\bar{v}_4$ دو نامزد برای رأسی دیگر باشند، آنگاه به ترتیب یال‌های ($\bar{v}_1$ و $\bar{v}_3$) و ($\bar{v}_2$ و $\bar{v}_4$) را در G_C قرار می‌دهیم. پس از آن که پیمایش G_F انجام شد، نمودار G_C تکمیل می‌شود. اکنون رئوس هر مؤلفه‌ی همبندی[۶] این نمودار نامزدهای یک رأس از رئوس رویه‌ی خشن (V) هستند. برای تعیین مؤلفه‌ی همبندی یک نمودار نیز می‌توان مجدداً از جستجوی اول سطح استفاده کرد. تعداد عملیات اصلی در حل این مسئله از مرتبه‌ی $O(ne)$ است که در آن ne تعداد یال‌های G_C است.[۷]

لازم به ذکر است که در هر مرحله از پیمایش G_F، دو وجه از F_F با کمک یک وجه از F_E به هم مرتبط می‌شوند (شکل ۱۱). در نتیجه به‌ازاء هر وجه F_E دو یال به نمودار G_C اضافه می‌شود. بنابراین ne تعداد یال‌های G_C، دو برابر تعداد وجوه از نوع وجه ـ یال یعنی F_E است. پس:

$$ne = 2\,|F_E| \le 2\,|NV|$$

به عبارت دیگر، عملیات اصلی برای تعیین مؤلفه‌های همبندی نمودار G_C نسبت به $|NV|$ خطی است.

تعیین رئوس V

دیدیم که کلیه‌ی رئوس NV که در یک مؤلفه‌ی همبندی G_C واقع می‌شوند، باید به یک رأس v تبدیل شوند. فرض کنید که $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_l$ رئوس یک مؤلفه‌ی همبندی G_C و $v_1, v_2, \ldots, v_l$ رئوس متناظر آنها پس از انبساط باشند. اگر رویه‌ی (NF, NV) دقیقاً حاصل تظریف «دو» باشد، آنگاه:

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_l$$

اما عملاً v_iها با یکدیگر تفاوت دارند. در شکل ۱۲ این عدم تطابق در یک مثال ساده مشخص شده است، که در آن v_1, v_2, v_3, v_4 باید به صورت یک رأس منطبق شوند.

اگر $v_1, v_2, \ldots, v_l$ را با میانگین آنها نامزد کنیم و آن را v بنامیم، آنگاه کمترین مجموع مربعات خطا (به‌صورت موضعی) به دست می‌آید. بنابراین:

$$v = \frac{1}{l}(v_1 + v_2 + \ldots + v_l) \qquad (7)$$

با تکرار این عمل برای تمام مؤلفه‌های همبندی G_C، رئوس V تعیین می‌شوند. باید توجه داشت که انتخاب رابطه‌ی ۷ برای تمام مؤلفه‌های همبندی لزوماً به بهترین انتخاب سراسری منجر نمی‌شود، ولی در عمل کارایی مناسبی دارد. با این وجود هنوز روشی که بتواند با عملیات خطی بهترین انتخاب سراسری را پیدا کند، یافت نشده است.[۳]

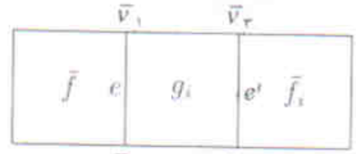
اکنون با ارائه‌ی چند شکل به بررسی کارایی این روش می‌پردازیم. در شکل ۱۳، سه بار عمل تظریف «دو» صورت گرفته است. در شکل ۱۴ مختصات یک رأس از آخرین شکل ۱۳ تغییر داده شده و سپس سه مرحله از وارون تظریف «دو» انجام شده است.

نمایش خطا

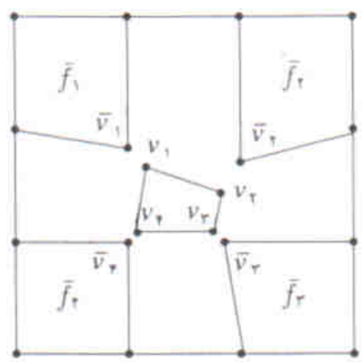
می‌خواهیم خطای موضعی وابسته به رابطه‌ی ۷ را محاسبه و ذخیره کنیم تا امکان بازسازی (NF, NV) فراهم شود. به همین منظور، فاصله‌ی v تا هر رأس v_i را با d_i نمایش می‌دهیم:

$$d_i = v_i - v, \qquad i = 1, 2, \ldots, l \qquad (8)$$

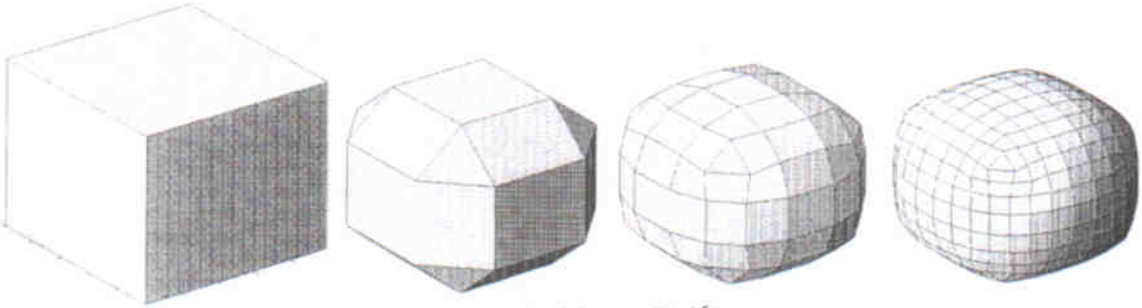
واضح است که حجم حافظه‌ی موردنیاز برای v و d_iها از v_iها



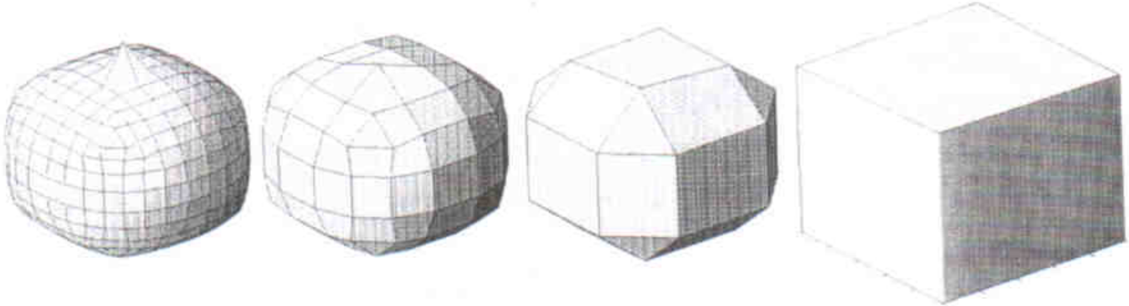
شکل ۱۱. نحوه‌ی مجاورت $\bar{f}$، g_i، $\bar{f}_i$.



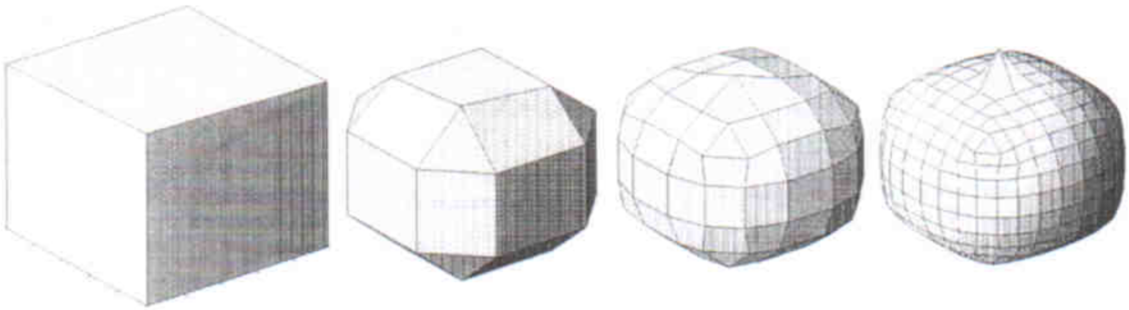
شکل ۱۲. مثالی ساده از عدم تطابق v_iها.



شکل ۱۳. سه مرحله از تظریف «دو».



شکل ۱۴. عمل وارون تظریف «دو» پس از تغییر مختصات بعضی از رئوس.



شکل ۱۵. بازسازی کامل رویه‌ی شکل ۱۴.

بیشتر است. برای کاهش حجم d_lها، در مقایسه با نمادهای قبلی، داریم:

$$C^j = [\, v \,]$$
$$C^{j+1} = [v_1, v_2, \ldots, v_l]^T$$
$$P^j = [\,1, 1, \ldots, 1\,]^T$$

حال ماتریس Q^j را چنان تعریف می‌کنیم که ستون‌های آن پایه‌یی برای فضای پوچ P^{jT} باشد. انتخاب زیر بسیار مناسب است:

$$Q^j_{l \times (l-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

ستون‌های Q^j پایه‌یی برای خطا تشکیل می‌دهند.[1] بنابراین دستگاه زیر، سازگار و به سادگی قابل حل است:

$$Q^j \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_l \end{bmatrix} \qquad (9)$$

به عبارت دیگر، رئوس $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_l)$ به رأس v و عوامل خطای $(e_1, e_2, \ldots, e_{l-1})$ تبدیل شده‌اند. این عوامل را می‌توان ضرایب موضعی موجک تلقی کرد. با بهره‌گیری از این عوامل می‌توانیم رویه‌ی اولیه، یعنی (NF, NV) را به‌طور کامل بازسازی کنیم. بدین‌منظور، ابتدا از رابطه‌ی ۹ عوامل $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$ را محاسبه می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، با استفاده از رابطه‌ی ۸، v_iها و

با استفاده از رابطه‌ی ۶، $\tilde{v}_i$ها را تعیین می‌کنیم. شکل ۱۵ بازسازی کامل رویه‌ی شکل ۱۴ را با استفاده از عوامل خطا نشان می‌دهد.

نتیجه گیری

به منظور وارون‌سازی تظریف «دو» و با استفاده از تعمیم وارون چیکین، به تفکیک‌پذیری چندگانه‌ی کارایی برای رویه‌ها با توپولوژی دلخواه دست یافتیم. در راه انجام این کار، یافتن وجوه رویه‌ی تظریف، متناظر با وجوه رویه‌ی خشن را به پیمایش اول سطح نمودار بازسازی کردیم. پس از انبساط این وجوه و یافتن نامزدهایی برای رئوس رویه‌ی خشن، هر رأس رویه‌ی خشن را میانگین رئوس نامزد شده‌ی متناظر با آن رأس قرار دادیم. این میانگین‌گیری بهترین انتخاب از نقطه نظر نُرم اقلیدسی است. همچنین پایه‌یی مناسب برای محاسبه‌ی ضرایب موجک ارائه کردیم که در بازسازی رویه‌ها بسیار مؤثر واقع می‌شود. مثال‌های ارائه شده، نشان‌دهنده‌ی امکان‌پذیری و کارایی این روش است.

پانوشت‌ها

1. subdivision
2. biorthogonal
3. least squares
4. Chaikin, G.
5. traversing
6. connected component

منابع

1. Samavati, F.F. and Bartels, R.H. "Multiresolution curve and surface representation by reversing subdivision rules," *Computer Graphics Forum*, **18**(2),pp. 97-120 (1999).
2. Bartels, R.H. and Samavati, F.F. "Reversing subdivision rules: local linear conditions and observations on inner products," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **119**, Issues 1-2, pp. 29-67 (2000).
3. Lounsbery, M. DeRose, T.D. and Warren, J. "Multiresolution analysis for surface of arbitrary topological type," *ACM Transactions on graphics*, **16**(1), pp. 34-73 (1997).
4. Chaikin, G. "An algorithm for high speed curve generation," *Computer Graphics and Image Processing*, **3**, pp. 346-349 (1974).
5. Riesenfeld, R. "On Chaikin's algorithm," *Computer Graphics and Image Processing*, **4**, pp. 304-310 (1975).
6. Doo, D.W.H. "A subdivision algorithm for smoothing down irregularly shaped polyhedrons," *In Proceedings of the Interactive Techniques in Computer Aided Design- Conference*, pp. 157-165, Bologna, Italy (1978).
7. Brassard, G. and Bratley, G. *Fundamentals of algorithms*. Prentice-Hall Inc. (1996).