

# ارائه‌ی یک مدل مشخصه‌ی همگرد برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ خمیری مواد سخت‌شونده

رضا نقدآبادی (استادیار)

سعید سهراب‌پور (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا سعیدی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا - دانشگاه صنعتی شریف

در مقاله‌ی حاضر یک مدل مشخصه‌ی همگرد<sup>۱</sup> برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ خمیری در مواد سخت‌شونده‌ی همسان‌گرد (ایزوتروپیک) و جنبشی (سینماتیک) ارائه شده است. این مدل مشخصه بین نرخ همگرد تانسور تنش زمینه<sup>۲</sup> و تانسور کرنش لگاریتمی رابطه برقرار می‌کند. مدل مشخصه‌ی ارائه شده برای نرخ همگرد جاومن<sup>۳</sup> جواب نوسانی نداده است، همچنین برای نرخ‌های همگرد جاومن و زارمبا<sup>۴</sup> جواب یکسانی به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، پاسخ مذکور مستقل از نرخ همگرد استفاده شده است.

## مقدمه

تحلیل تغییر شکل بزرگ خمیری در مواد سخت‌شونده طی چندسال اخیر مورد توجه خاص قرار گرفته است و دسترسی به رایانه‌های قدرتمند و روش‌های عددی کارا، حل مسائل مربوط به آن را امکان‌پذیر کرده است. لذا نیاز به مدل‌های مشخصه‌ی دقیق احساس می‌شود.

در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ خمیری، معمولاً از مدل‌های مشخصه‌ی نرخ‌ی یا نموی استفاده می‌شود. به منظور بیان پاسخ ماده، مستقل از دوران صلب، مدل مشخصه بایستی براساس نرخ‌های همگرد بیان شود. نرخ‌های همگرد مختلفی در مکانیک جامدات مورد استفاده قرار می‌گیرد.<sup>[۱]</sup> اگرچه هر کدام از این نرخ‌ها را می‌توان برای حل مسئله به کار برد، حتی در تغییر شکل کشسانی (الاستیک) نیز انتخاب نرخ همگرد بر جواب مسئله تأثیرگذار است.<sup>[۲]</sup>

نگتگال و دجنگ تغییر شکل بزرگ خمیری در مسئله‌ی برش ساده را با استفاده از مدل سخت‌شونده‌ی پراگر-زیگلر تحلیل کردند.<sup>[۳]</sup> آنها نرخ جاومن تانسور تنش را که با چرخش مادی  $W$  در ارتباط است، به تانسور کشیدگی  $D$  مربوط ساختند و یک جواب نوسانی برای تنش به دست آوردند که غیر قابل قبول است. آنها دلیل جواب نوسانی را به سخت‌شدگی مدل مورد استفاده نسبت دادند.

لی و همکارانش نیز این مسئله را حل کردند.<sup>[۴]</sup> آنها دریافتند که استفاده از نرخ همگرد جاومن برای تنش، پاسخی نوسانی دارد که از

نظر فیزیکی غیر قابل قبول است. این محققین دلیل نوسانات را نه مدل سخت‌شونده، بلکه استفاده از نرخ جاومن بیان کردند. آنها براساس دیدگاه فیزیکی‌شان از تغییر شکل برش ساده، نرخ جاومن بهبودیافته‌ی معرفی کردند که استفاده از آن، حالت نوسانی تنش را تصحیح می‌کند. دافالیاس جسم خمیری سخت‌شونده‌ی را در تغییر شکل‌های بزرگ در نظر گرفت و با استفاده از نرخ زارمبای تانسور تنش که مرتبط با چرخش جسمی  $\Omega^5$  است، معادله‌ی مشخصه‌ی معرفی کرد.<sup>[۵]</sup> او نرخ زارمبای تانسور تنش زمینه را به تانسور کشیدگی  $D$  ربط داد و جواب غیر نوسانی قابل قبولی برای تنش به دست آورد.

متزگر و دوبی در حالت خاص روش محورهای اصلی با استفاده از نرخ‌های مختلف مسئله‌ی برش ساده را حل کردند.<sup>[۶]</sup> آنان دریافتند که در روش محورهای اصلی همه‌ی نرخ‌های همگرد جواب یکسانی برای تنش می‌دهند، یعنی جواب مستقل از نرخ مورد استفاده است. رینهارت و دوبی نرخ همگردی به نام «نرخ  $D$ »<sup>۶</sup> معرفی کرده و نشان دادند که تانسور کشیدگی  $D$  یک نرخ همگرد از کرنش لگاریتمی است.<sup>[۷]</sup> آنها با استفاده از این نرخ معادله‌ی مشخصه‌ی برای مواد فروکشسان (هیپوالاستیک) و خمیری (پلاستیک) معرفی کردند.

ایشی کاوا در سال ۱۹۹۷ یک فرمول‌بندی براساس اطلاعات تجربی برای یافتن سطوح تسلیم متوالی در تغییر شکل‌های بزرگ خمیری ارائه کرد.<sup>[۸]</sup> او همچنین در سال ۱۹۹۹ مدل مشخصه‌ی برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ خمیری براساس رابطه‌ی نمایی

$\Omega$  تانسور چرخش جسمی نامیده می‌شود.

هیل در ارائه‌ی روش محورهای اصلی دو نوع تانسور چرخش دیگر  $\Omega^E$  و  $\Omega^L$  را نیز معرفی کرد که به ترتیب تانسور چرخش لاگرانژی<sup>۱۰</sup> و تانسور چرخش اویلری<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شوند.<sup>[۱۲]</sup> این تانسورها به ترتیب بیان‌گر چرخش مجموعه‌های  $\{N_i\}$  و  $\{n_i\}$  هستند.

$$\dot{N}_i = \Omega^L N_i, \quad \dot{n}_i = \Omega^E n_i \quad (7)$$

نرخ تغییرات زمانی تانسور  $T$  در یک دستگاه مرجع با چرخش  $W$  از دیدگاه نظری در دستگاه مرجع بدون چرخش چنین بیان می‌شود:<sup>[۷،۲]</sup>

$$\dot{T}^J = \dot{T} - WT + TW \quad (8)$$

که  $T^J$  نرخ جاومن تانسور  $T$  بوده و نخستین بار توسط جاومن معرفی شد.<sup>[۱۳]</sup> نرخ مادی تانسور  $T$  است. همچنین نرخ تغییرات زمانی تانسور  $T$  در یک دستگاه مرجع با چرخش  $\Omega$  از دیدگاه ناظری در دستگاه مرجع بدون چرخش عبارت است از:<sup>[۷،۲]</sup>

$$\dot{T}^Z = \dot{T} - \Omega T + T \Omega \quad (9)$$

$T^Z$  نرخ زارمبای تانسور  $T$  است. این نرخ همچنین نرخ گرین-تقدی<sup>[۱۴]</sup> یا نرخ گرین-مک‌اینیز<sup>[۱۵]</sup> نامیده می‌شود.

### مدل مشخصه‌ی همگرد

به منظور ارضاء اصل عینیت مادی، مدل مشخصه‌ی همگرد باید رفتار ماده را مستقل از هر دستگاه مرجع بیان کند.<sup>[۱۰]</sup> لذا مدل مشخصه‌ی همگرد بایستی مستقل از نرخ همگرد مورد استفاده باشد. مدل‌های مشخصه‌ی تغییر شکل‌های بزرگ خمیری معمولاً رابطه‌ی بین تانسور کشیدگی  $D$  و یک نرخ همگرد از تنش زمینه‌اند.<sup>[۱۶، ۵، ۴]</sup> تغییر نرخ همگرد استفاده شده در این مدل‌ها نتایج متفاوتی برای پاسخ جسم می‌دهد که غیر قابل قبول است.

کرنش لگاریتمی که توسط هنکی معرفی شد یک معیار مطلوب کرنش در مسائل تغییر شکل خمیری اجسام است. فقدان یک رابطه‌ی عمومی برای مشتق زمانی تانسور کرنش لگاریتمی استفاده‌ی آن را محدود به مسائلی ساخته است که محورهای اصلی کرنش ثابت است، که در این حالت رابطه‌ی  $(\ln V) = D$  برقرار است.

در این مقاله با استفاده از نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی<sup>[۱۱]</sup>، یک مدل مشخصه‌ی همگرد برای تغییر شکل بزرگ خمیری مواد سخت‌شونده به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\alpha^0 = \frac{2}{3} h_\alpha (\ln V)^0 \quad (10)$$

در حالت کلی کمیت  $h_\alpha$  یک تانسور مرتبه‌ی چهار بوده و همچنین تابعی از مسیر بارگذاری است که در این حالت کمیت  $h_\alpha$  نیز در داخل

تنش-کرنش معرفی کرد و از طریق آزمایش ضرایب معادله را به دست آورد.<sup>[۹]</sup> ویژگی کار وی آن است که مدل مشخصه‌ی او برای نرخ همگرد جاومن جواب غیرنوسانی می‌دهد.

بر اساس اصل عینیت مادی<sup>۷</sup> رفتار ماده مستقل از دستگاه مرجع است.<sup>[۱۰]</sup> لذا معادله‌ی مشخصه‌ی نرخ‌ی باید توصیف‌کننده‌ی رفتار ماده مستقل از نرخ همگرد مورد استفاده باشد.

در نوشتار حاضر برای مواد سخت‌شونده‌ی همسان‌گرد و جنبشی که از معیار تسلیم فون میسر پیروی می‌کند، یک مدل مشخصه‌ی همگرد ارائه شده است. این مدل مشخصه نرخ همگرد تنش زمینه را به نرخ همگرد کرنش لگاریتمی به شکل مستقل از دستگاه مرجع مربوط می‌سازد. با استفاده از این مدل مشخصه نشان داده شده است که همه‌ی نرخ‌های همگرد تانسور تنش در مسئله‌ی برش ساده پاسخ یکسان می‌دهند.

### سینماتیک تغییر شکل‌های بزرگ

فرض کنید  $F$  گرادیان تغییر شکل در یک نقطه از جسم تغییر شکل یافته باشد. از آنجا که  $\det F > 0$ ، با استفاده از قضیه‌ی جداسازی قطبی می‌توان نوشت:

$$F = RU = VR \quad (1)$$

که  $U$  و  $V$  به ترتیب تانسورهای کشش راست و چپ<sup>۸</sup> و  $R$  یک تانسور دوران متعامد است.  $U$  و  $V$  تانسورهای متقارن و مثبت معین با مقادیر ویژه‌ی  $\lambda_i$  هستند که این مقادیر کشش‌های اصلی‌اند.

فرض کنید که مجموعه‌ی  $\{N_i\}$  بیان‌گر جهات اصلی  $U$  باشد، پس جهات اصلی  $V$  (مجموعه‌ی  $\{n_i\}$ ) چنین به دست می‌آید:

$$n_i = RN_i \quad (2)$$

لذا تانسور  $V$  را می‌توان چنین نوشت:

$$V = \sum_i \lambda_i n_i \otimes n_i \quad (3)$$

تانسور لگاریتم، یک نگاشت از تانسورهای متقارن به تانسورهای متقارن مثبت معین است<sup>[۱۰، ۱۱]</sup> و چنین تعریف می‌شود:

$$\ln V = \sum_i \ln \lambda_i n_i \otimes n_i \quad (4)$$

اگر تانسور  $F$  یک تانسور پیوسته‌ی مشتق‌پذیر باشد، تانسور گرادیان سرعت  $L$  چنین تعریف می‌شود:

$$L = \dot{F}F^{-1} = D + W \quad (5)$$

که تانسور کشیدگی  $D$  و تانسور چرخش مادی  $W$  به ترتیب بخش‌های متقارن و پادمتقارن  $L$  هستند. چنانچه تانسور  $\Omega$  بیان‌گر چرخش نسبی بین مجموعه‌ی  $\{N_i\}$  و  $\{n_i\}$  باشد، به طوری که:

$$\dot{R} = \Omega R \quad (6)$$

هر یک از روابط ۱۶ یا ۱۷ می‌تواند در مدل مشخصه‌ی ۱۰ مورد استفاده قرار گیرد ولی باید توجه داشت که در هر دو طرف این رابطه باید از نرخ‌های همگرد یکسان استفاده شود.

### کاربرد

به‌عنوان کاربردی از مدل مشخصه‌ی ۱۰، تغییر شکل برش ساده‌ی مربعی به ابعاد واحد تحلیل می‌شود. در این تحلیل میدان تغییر مکان به‌صورت زیر است:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2 \quad (18)$$

$$x_2 = X_2$$

که در آن  $\gamma$  بیان‌گر تغییر مکان برشی است. بنا به تعریف، مؤلفه‌های تانسور گرادین تغییر شکل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (19)$$

در میدان تغییر مکان رابطه‌ی ۱۸، این مؤلفه‌ها عبارتند از:

$$F_{11} = F_{22} = 1, \quad F_{12} = \gamma, \quad F_{21} = 0 \quad (20)$$

با استفاده از قضیه‌ی جداسازی قطبی، مؤلفه‌های تانسور کشش چپ چنین به دست می‌آیند:

$$V_{ij} = \frac{1}{\sqrt{4+\gamma^2}} \begin{bmatrix} 2+\gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

همچنین زاویه‌ی دوران مرتبط با مؤلفه‌های تانسور دوران،  $R_{ij}$ ، چنین محاسبه می‌شود:

$$\theta = \arctan(-\gamma/2) \quad (22)$$

کشش‌های اصلی  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  و زاویه جهات اصلی  $\beta$  با استفاده از رابطه‌ی ۲۱ به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{\gamma} (\sqrt{4+\gamma^2} \pm \gamma) \quad (23)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \arctan(2/\gamma) \quad (24)$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیری برای مشتقات جزئی، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور کشیدگی چنین محاسبه می‌شوند:

$$D_{12} = D_{21} = \dot{\gamma}/2 \quad (25)$$

همچنین مؤلفه‌های غیرصفر تانسور چرخش مادی عبارتند از:

$$W_{12} = -W_{21} = \dot{\gamma}/2 \quad (26)$$

با استفاده از روابط ۶ و ۲۲، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور چرخش جسمی  $\Omega_{12}$  و  $\Omega_{21}$  چنین به دست می‌آیند:

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \frac{2\dot{\gamma}}{4+\gamma^2} \quad (27)$$

مؤلفه‌های غیرصفر تانسور چرخش اویلری با استفاده از روابط (۷) و (۲۴) چنین محاسبه می‌شوند:

پراتر نرخ همگرد قرار می‌گیرد. در حالت خاص، معادله‌ی ۱۰ برای یک ماده‌ی همسان‌گرد با سخت‌شوندگی سینماتیک خطی که در آن  $h_\alpha$  یک مقدار اسکالر و ثابت است قابل استفاده است.

برای یافتن مؤلفه‌های تانسور انحرافی تنش کوشی از مدل مشخصه‌ی (۱۰) به یک معیار تسلیم نیاز است. در این مقاله از معیار تسلیم فون میسز به‌شکل زیر استفاده می‌شود:

$$f = \frac{3}{2} (S - \alpha) : (S - \alpha) - k^2 = 0 \quad (11)$$

در رابطه‌های ۱۰ و ۱۱، بیان‌گر تانسور انحرافی تنش کوشی،  $k$  بیان‌گر اندازه‌ی سطح تسلیم،  $\alpha$  تانسور تنش زمینه  $h_\alpha$  ضریب سخت‌شوندگی سینماتیکی است. در یک مدل سخت‌شونده‌ی همسان‌گرد غیرخطی  $k$  چنین تعریف می‌شود:

$$k = 1 + [k_s - 1] [1 - \exp(-c\bar{\epsilon})] \quad (12-الف)$$

که  $k_s$  ثابت ماده است و  $\bar{\epsilon}$  چنین به دست می‌آید:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} D:D} \quad (12-ب)$$

در مدل مشخصه‌ی ۱۰،  $\alpha^0$  بیان‌گر نرخ همگرد تانسور تنش زمینه و  $(\ln V)^0$  بیان‌گر نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی است که چنین تعریف می‌شوند:

$$\alpha^0 = \dot{\alpha} - \Lambda \alpha + \alpha \Lambda \quad (13-الف)$$

$$(\ln V)^0 = (\ln V)^{\cdot} - \Lambda (\ln V) + (\ln V) \Lambda \quad (13-ب)$$

در روابط ۱۳، بیان‌گر تانسور چرخشی است که می‌تواند با  $W$  یا  $\Omega$  و یا هر تانسور چرخش دلخواه دیگری جایگزین شود. با استفاده از رابطه‌ی ارائه شده در مرجع ۱۱ برای مشتق مادی کرنش لگاریتمی  $(\ln V)^{\cdot}$  به‌شکل زیر:

$$(\ln V)^{\cdot} = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] + [\Omega^E (\ln V) - (\ln V) \Omega^E] \quad (14)$$

و با جایگذاری رابطه‌ی ۱۴ در رابطه‌ی ۱۳-ب، نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی  $(\ln V)^0$  به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\ln V)^0 = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] + [(\Omega^E - \Lambda) \ln V - \ln V (\Omega^E - \Lambda)] \quad (15)$$

از جایگزینی  $\Lambda$  با تانسورهای چرخش  $W$  و  $\Omega$  به ترتیب نرخ‌های همگرد جاومن و زارمبای تانسور کرنش لگاریتمی چنین به دست می‌آیند: <sup>[۱۷]</sup>

$$(\ln V)^J = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] + [(\Omega^E - W) \ln V - \ln V (\Omega^E - W)] \quad (16)$$

$$(\ln V)^Z = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] + [(\Omega^E - \Omega) \ln V - \ln V (\Omega^E - \Omega)] \quad (17)$$



$$\Omega_{12}^E = -\Omega_{21}^E = \frac{\dot{\gamma}}{4+\gamma^2} \quad (28)$$

با استفاده از تعریف کرنش لگاریتمی، رابطه‌ی ۴، و مقادیر اصلی تانسور  $V$ ، مؤلفه‌های تانسور کرنش لگاریتمی در محورهای اصلی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(\ln V)_{ij}^* = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

با تبدیل مؤلفه‌های  $(\ln V)_{ij}^*$  به محورهای مرجع، مؤلفه‌های تانسور کرنش لگاریتمی،  $(\ln V)_{ij}$  چنین می‌شوند:

$$(\ln V)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{4+\gamma^2}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \ln \lambda_1 + \lambda_2 \ln \lambda_2 & \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2 \\ \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2 & \lambda_2 \ln \lambda_1 + \lambda_1 \ln \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر اصلی تانسور کشش چپ‌اند که در رابطه‌ی ۲۳ معرفی شده‌اند. با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ مؤلفه‌های مشتق مادی کرنش لگاریتمی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(\ln V)_{ij}^{\dot{}} = \frac{\dot{\gamma}}{(4+\gamma^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} \gamma\sqrt{4+\gamma^2} + 4e_1 & 2\sqrt{4+\gamma^2} - 2\gamma e_1 \\ 2\sqrt{4+\gamma^2} - 2\gamma e_1 & -\gamma\sqrt{4+\gamma^2} - 4e_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

که در آن:

$$e_1 = \ln \left[ \frac{1}{\gamma} (\gamma + \sqrt{4+\gamma^2}) \right] \quad (32)$$

به منظور مطالعه‌ی اثر انتخاب نرخ همگرد در تغییر شکل برش ساده، مدل مشخصه برای نرخ‌های جاومن و زارمبا به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### مدل مشخصه با نرخ همگرد جاومن

مدل مشخصه‌ی ۱۰ با استفاده از نرخ همگرد جاومن به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha^J = \frac{2}{3} h_\alpha (\ln V)^J \quad (33)$$

که  $\alpha^J$  به عنوان نرخ جاومن تانسور تنش زمینه چنین تعریف می‌شود:

$$\alpha^J = \dot{\alpha} - W\alpha + \alpha W \quad (34)$$

با استفاده از روابط ۳۳ و ۳۴ می‌توان نوشت:

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} h_\alpha (\ln V)^J + W\alpha - \alpha W \quad (35)$$

برای حل میدان تغییر مکان ۱۸ با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۳۵، بایستی مؤلفه‌های نرخ جاومن تانسور کرنش لگاریتمی  $(\ln V)_{ij}^J$  محاسبه شوند. برای این کار با استفاده از رابطه‌ی ۱۶ و مؤلفه‌های به

دست آمده از روابط سینماتیک برش ساده داریم:

$$(\ln V)_{ij}^J = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{(4+\gamma^2)^3}} \begin{bmatrix} \gamma\sqrt{4+\gamma^2} - 2e_1(2+\gamma^2) & 2\sqrt{4+\gamma^2} + \gamma e_1(2+\gamma^2) \\ 2\sqrt{4+\gamma^2} - \gamma e_1(2+\gamma^2) & -(\gamma\sqrt{4+\gamma^2} - 2e_1(2+\gamma^2)) \end{bmatrix} \quad (36)$$

جاگذاری روابط ۲۶ و ۳۶ در معادله‌ی مشخصه‌ی ۳۵ به دست‌گاه معادلات دیفرانسیل زیر می‌انجامد:

$$\dot{\alpha}_{11} = \frac{2}{3} \frac{h_\alpha \dot{\gamma}}{(4+\gamma^2)^{3/2}} [\gamma\sqrt{4+\gamma^2} - 2e_1(2+\gamma^2)] + \dot{\gamma} \alpha_{12} = -\dot{\alpha}_{22} \quad (37)$$

$$\dot{\alpha}_{12} = \frac{2}{3} \frac{h_\alpha \dot{\gamma}}{(4+\gamma^2)^{3/2}} [2\sqrt{4+\gamma^2} + \gamma e_1(2+\gamma^2)] + \dot{\gamma} \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2} \quad (38)$$

اگر جسم هیچ‌گونه تنش اولیه‌ی نداشته باشد، این معادلات را می‌توان چنین نوشت:

$$\alpha'_{11} = -\alpha'_{22} = \alpha'_{12} + \frac{2}{3} \frac{h_\alpha}{(4+\gamma^2)^{3/2}} [\gamma\sqrt{4+\gamma^2} - 2e_1(2+\gamma^2)] \quad (39)$$

$$\alpha'_{12} = -\alpha'_{11} + \frac{2}{3} \frac{h_\alpha}{(4+\gamma^2)^{3/2}} [2\sqrt{4+\gamma^2} + \gamma e_1(2+\gamma^2)] \quad (40)$$

در روابط ۳۹ و ۴۰ از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$\alpha'_{11} = \frac{d\alpha_{11}}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma} \dot{\alpha}_{11}, \quad \alpha'_{12} = \frac{d\alpha_{12}}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma} \dot{\alpha}_{12} \quad (41)$$

معادلات ۳۹ و ۴۰ به یکدیگر وابسته‌اند و نمی‌توانند به طور مستقل حل شوند. به علت موجود نبودن حل تحلیلی، با استفاده از روش عددی رانج-کوتا<sup>۱۲</sup> معادلات حل می‌شود و مؤلفه‌های تنش زمینه  $\alpha_{11}$  و  $\alpha_{22}$  و  $\alpha_{12}$  به دست می‌آیند. با جاگذاری مؤلفه‌های تنش زمینه در معیار تسلیم ۱۱، مؤلفه‌های قائم و برشی تنش کنشی محاسبه می‌شوند.

### مدل مشخصه با نرخ همگرد زارمبا

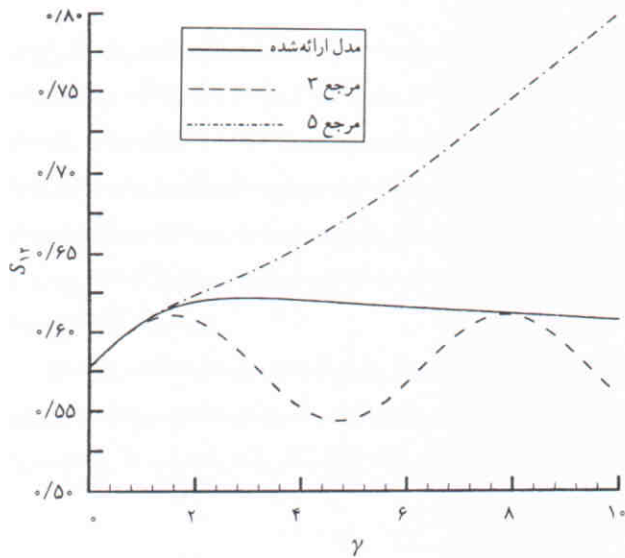
مدل مشخصه‌ی ۱۰ را می‌توان با استفاده از نرخ همگرد زارمبا به شکل زیر نوشت:

$$\alpha^Z = \frac{2}{3} h_\alpha (\ln V)^Z \quad (42)$$

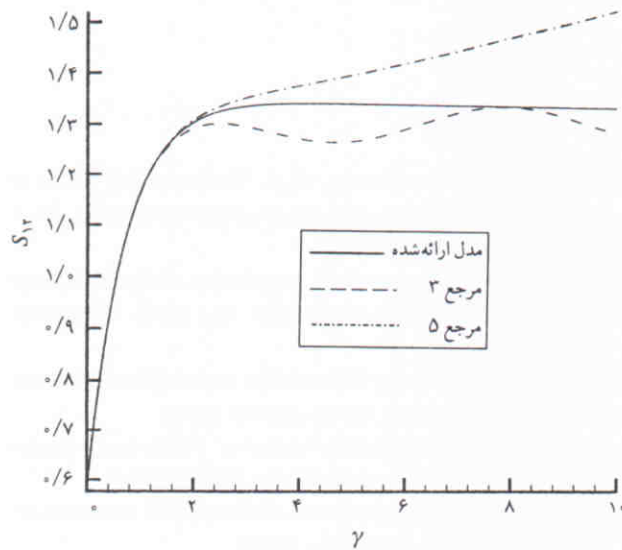
که  $\alpha^Z$  نرخ زارمبای تانسور تنش زمینه، چنین تعریف می‌شود:

$$\alpha^Z = \dot{\alpha} - \Omega\alpha + \alpha\Omega \quad (43)$$

از ترکیب روابط ۴۲ و ۴۳، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



شکل ۲. مؤلفه برشی تنش کوشی برحسب تغییر مکان برشی برای ماده‌یی با سخت‌شوندگی سینماتیک (k=1 و hα=0/1).



شکل ۳. مؤلفه‌ی برشی تنش کوشی برحسب تغییر مکان برشی برای ماده‌یی با سخت‌شوندگی سینماتیک و همسان‌گرد (k<sub>s</sub>=2/25; c=2/57; hα=0/1).

با جاگذاری مؤلفه‌های تنش زمینه در معیار تسلیم ۱۱، مؤلفه‌های قائم و برشی تنش کوشی محاسبه می‌شوند.

### نتیجه‌گیری

بر اساس مدل مشخصه‌ی ارائه شده، تغییر شکل برشی ساده در یک ماده‌ی سخت‌شونده‌ی سینماتیک و همسان‌گرد تحلیل شده است. شکل‌های ۱ و ۲ نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های قائم و برشی تنش کوشی برحسب تغییر مکان برشی برای یک ماده‌ی سخت‌شونده‌ی سینماتیک، با استفاده از هر دو نرخ جاومن و زارمبا هستند. چنان‌که ملاحظه می‌شود، با استفاده از دو نرخ مختلف در مدل مشخصه‌ی ارائه شده

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} h_{\alpha} (\ln V)^2 + \Omega \alpha - \alpha \Omega \quad (44)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱۷ و مؤلفه‌های به دست آمده از روابط سینماتیک برش ساده، مؤلفه‌های نرخ زارمبای تانسور کرنش لگاریتمی  $(\ln V)_{ij}^z$  چنین محاسبه می‌شوند:

$$(\ln V)_{ij}^z = \frac{\dot{\gamma}}{(\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} \gamma \sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} - \dot{\epsilon} e_1 & 2\sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} + 2\dot{\gamma} e_1 \\ 2\sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} + 2\dot{\gamma} e_1 & -\gamma \sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} + \dot{\epsilon} e_1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

از جاگذاری روابط ۲۷ و ۴۵ در معادله‌ی مشخصه‌ی ۴۴، دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\alpha}_{11} = \frac{2}{3} \frac{h_{\alpha} \dot{\gamma}}{(\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} (\gamma \sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} - \dot{\epsilon} e_1) + \frac{4}{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} \alpha_{12} = -\dot{\alpha}_{22} \quad (46)$$

$$\dot{\alpha}_{12} = \frac{2}{3} \frac{h_{\alpha} \dot{\gamma}}{(\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} (2\sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} + 2\dot{\gamma} e_1) + 2\dot{\gamma} \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} \quad (47)$$

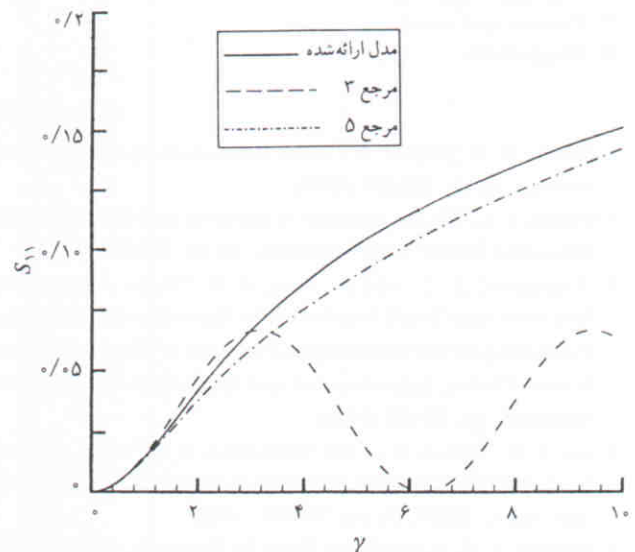
با فرض صفر بودن تنش اولیه، معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha'_{11} = -\alpha'_{22} = \frac{4}{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} \alpha_{12} + \frac{2}{3} \frac{h_{\alpha}}{(\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} (\gamma \sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} - \dot{\epsilon} e_1) \quad (48)$$

$$\alpha'_{12} = -\frac{4}{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} \alpha_{11} + \frac{2}{3} \frac{h_{\alpha}}{(\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2)^{3/2}} (2\sqrt{\dot{\epsilon} + \dot{\gamma}^2} + \dot{\epsilon} e_1) \quad (49)$$

$\alpha'_{11}$  و  $\alpha'_{12}$  در رابطه‌ی ۴۱ تعریف شده‌اند.

مشابه حالت قبل، با حل معادلات ۴۸ و ۴۹ از طریق روش عددی رانج-کوتا، مؤلفه‌های تنش زمینه  $\alpha_{11}$  و  $\alpha_{22}$  به دست می‌آیند.



شکل ۴. مؤلفه‌ی قائم تنش کوشی برحسب تغییر مکان برشی برای ماده‌یی با سخت‌شوندگی سینماتیک (k=1 و hα=0/1).

مؤلفه‌های قائم تنش اثر نمی‌گذارد، مؤلفه‌ی برشی تنش کوشی برحسب تغییر مکان برشی در ماده‌ی با خصوصیات  $h_{\alpha} = 0/1$ ،  $k_{\beta} = 2/25$  و  $c = 2/57$  در شکل ۳ رسم شده است. ملاحظه می‌شود که در این حالت خطای جواب مراجع ۳ و ۵ کمتر از حالت قبل است. در این حالت نیز دو نرخ همگرد مختلف در مدل مشخصه‌ی ارائه شده پاسخ یکسانی برای تنش به دست می‌دهند و این پاسخ با جواب حالت خاص محورهای اصلی (مراجع ۶) یکسان است. از آنجا که پاسخ مدل مشخصه‌ی ارائه شده برای هر دو نرخ مورد استفاده یکسان است، این مدل مستقل از نرخ همگرد مورد استفاده بوده و لذا مستقل از ناظر است.

پاسخ یکسانی برای مؤلفه‌های تنش به دست می‌آید. خصوصیات ماده‌ی مورد مطالعه عبارتند از:  $h_{\alpha} = 0/1$  و  $k = 1$ . پاسخ برای ماده‌ی با همان خصوصیات از معادلات مشخصه‌ی مراجع ۳ و ۵ نیز در این شکل‌ها آمده است. ملاحظه می‌شود جواب مراجع ۳ یک منحنی نوسانی با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است که توجیه فیزیکی ندارد. پاسخ مدل ارائه شده با مرجع ۵ اختلاف دارد، اما با پاسخ حالت خاص محورهای اصلی (مراجع ۶) یکسان است.

به منظور مطالعه‌ی اصل سخت‌شوندگی همسان‌گرد، همان مثال برای یک ماده‌ی سخت‌شونده‌ی همسان‌گرد غیرخطی حل شده است. با توجه به این که سخت‌شوندگی همسان‌گرد در تغییر شکل برش ساده بر

#### پانوشته‌ها

1. corotational constitutive model
2. corotational rate of back stress tensor
3. Jaumann
4. Zaremba
5. body spin
6. D-Rate
7. principle of material objectivity
8. right and left stretch tensors
9. material spin tensor
10. Lagrangian spin tensor
11. Eulerian spin tensor
12. Runge-Kutta

#### منابع

1. Dubey, R. N. "Choice of Tensor Rates-A Methodology", *SM Archives*, **12**, pp. 233-244 (1987).
2. Dienes, J. K. "On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies", *Acta Mechanica*, **32**, pp. 217-232 (1979).
3. Nagtegaal, J. C. and de Jong, J. E. "Some Aspects of Non-Isotropic Work-Hardening in Finite Strain Plasticity, Proceeding of the Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experimental and Computation", Stanford University, pp. 65-102 (1981).
4. Lee, E. H., Mallett, R. L. and Wertheimer, T. B. "Stress Analysis for Anisotropic Hardening in Finite Deformation Plasticity", *J. Appl. Mech. ASME*, **50**, pp. 554-560 (1983).
5. Dafalias, Y. F. "Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations", *J. Appl. Mech. ASME*, **50**, pp. 561-565 (1983).
6. Metzger, D.R. and Dubey, R.N. "Corotational Rates in Constitutive Modeling of Elastic-Plastic Deformation", *Int. J. Plasticity*, **4**, pp. 341-368 (1987).
7. Reinhardt, W. and Dubey, R. N. "Application of Objective Rates in Mechanical Modeling of Solids", *J. Appl. Mech. ASME*, **118**, pp. 692-698 (1996).
8. Ishikawa, H. "Subsequent Yield Surface Probed From its Current Center", *Int. J. Plasticity*, **13**, pp. 533-549 (1997).
9. Ishikawa, H. "Constitutive Model of Plasticity in Finite Deformation", *Int. J. Plasticity*, **15**, pp. 299-317 (1999).
10. Truesdell, C. "The Elements of Continuum Mechanics", Springer-Verlag, New York Inc. (1966).
11. Naghdabadi, R. Dubey, R. N. and Heppler, G. R. "On Material Time Derivative of Logarithmic Strain", *CANCAM'95*, Canada pp. 844-845 (1995).
12. Hill, R. "Aspects of Invariance in Solid Mechanics, In Advances in Applied Mechanics", **18**, Academic Press, New York (1978).
13. Prager, W. "An Introduction to Mechanics of a Continua", Ginn and Company, Toronto (1961).
14. Green, A. E. and Naghdi, P. M. "A General Theory of an Elastic -Plastic Continuum", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **18**, pp. 251-281 (1965).
15. Green, A.E. and McInnis, B.C. "Generalized Hypo-Elasticity", *Proc. Roy. Soc., Edinburgh A67*, part III, pp. 220-230 (1967).
16. Schieck, B. and Stumpf, H. "The Appropriate Corotational Rate, Exact Formulation for the Plastic Spin and Constitutive Model for Finite Elasto-Plasticity", *Int. J. Solids Structures*, pp. 3643-3667 (1995).