

تعیین دمای سطح متحرک با استفاده از آنالیز حساسیت

بیژن فرهانیه (دانشیار)

امیرحسن کاکالی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار روش آنالیز حساسیت در حل مسائل معکوس حرارتی، به منظور تعیین دمای سطح متحرک مورد استفاده قرار گرفته است. برای گسسته‌سازی مکانی معادلات از روش اجزاء محدود متحرک استفاده شده است که در آن به راحتی حرکت‌های مختلف در مرزهایی با اشکال پیچیده قابل استفاده است. همچنین برای گسسته‌سازی زمانی معادلات حاکم از روش کرنک نیکلسون استفاده شده است که دارای دقت مرتبه‌ی دوم است و دارای خواص پایداری و همگرایی مناسب است. با استفاده از روش شبیه‌سازی در این روش به منظور تعیین دمای سطح متحرک، از سوخت جامد برای موشک استفاده شده است و صحت عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است.

مقدمه

اندازه‌گیری دمای سطح متحرک — نظیر سطوح در حال ذوب، انجماد یا سوختن — به علت تحرک با مشکلات متعددی مواجه هستیم. همچنین هنگامی که دمای سطح بسیار بالاست، نمی‌توان به راحتی از دماسنج‌های متداول استفاده کرد و عملاً اندازه‌گیری دما کاری پرهزینه و دشوار است. یکی از راه‌های حل این مشکلات، استفاده از روشی است که در حل مسائل معکوس از آن بهره می‌جویم. در روش آنالیز مسئله‌ی معکوس به جای اندازه‌گیری دمای محل مورد نظر، دما در نقطه یا تقاطعی دیگر در داخل جسم اندازه‌گیری می‌شود. براساس این اندازه‌گیری و یک سری روش‌های حل دیگر، دما در مرز که همان دمای مطلوب است محاسبه می‌شود.

برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی روش‌های مختلفی وجود دارد که کاربردی‌ترین آنها روش اجزاء محدود است.^[۱] این روش را می‌توان در هندسه‌های مختلف، با مرزهای متفاوت و با پشتوانه‌ی تئوری ریاضی قوی به کار برد. البته روش‌های احجام محدود نیز — چنانچه با روش‌های اجزاء محدود ادغام شود — به علت برخورد فیزیکی با مسئله دارای قابلیت‌هایی برای حل مسائل پیچیده‌تر هستند.^[۲]

در نوشتار حاضر، با توجه به توانایی گسترش روش اجزاء محدود عادی به روش اجزاء محدود متحرک و قابلیت‌های انطباق با روش‌های احجام محدود، از روش ترکیبی اجزاء محدود — احجام محدود استفاده شده است. برای استفاده از این روش در حل مسئله‌ی معکوس از روش آنالیز حساسیت استفاده شده است.^[۳] مزیت استفاده از این روش — در مقایسه با روش‌های مبتنی بر تغییرات مزدوج^[۴] در نحوه‌ی برخورد آن

با متغیر زمان است.^[۵] در روش آنالیز حساسیت با استفاده از اطلاعات در مورد لحظه‌ی خاص، می‌توان مجهولات مورد نظر در آن لحظه را محاسبه کرد، اما در روش‌های مبتنی بر تغییرات مزدوج نیازمند یک محدوده‌ی زمانی حداقل هستیم. به این ترتیب، می‌توان از روش مورد بررسی در اندازه‌گیری در خط و با زمان واقعی، به منظور اندازه‌گیری لحظه‌ی دمای سطح استفاده کرد.

در بخش‌های بعدی، ابتدا مسئله‌ی مستقیم و مسئله‌ی معکوس به صورت ریاضی ارائه می‌شود، و سپس ضمن تشریح روش آنالیز حساسیت الگوریتم حل ارائه می‌شود. پس از آن روش‌های گسسته‌سازی مکانی و زمانی توضیح داده می‌شود و در پایان روش شبیه‌سازی به همراه حل مسئله‌ی تعیین دمای سطح سوخت موشک سوخت جامد و محدودیت‌های این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مسئله‌ی مستقیم

مسئله‌ی مستقیم هدایت حرارتی، که تابع قانون فوریه است با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۱)$$

و شرایط مرزی:

$$T = T^b \quad \vec{r} \in \Gamma_T \text{ و } t > 0 \quad (۲.الف)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_b \quad \vec{r} \in \Gamma_q \text{ و } t > 0 \quad (۲.ب)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = f \quad \vec{r} \in \Gamma_c \text{ و } t > 0 \quad (۲.ج)$$

و شرایط اولیه:

$$T = T_0 \quad \vec{r} \in \Omega \text{ و } t = 0 \quad (۲.د)$$

$$W = \sigma^{-2} I \quad (6)$$

جهت کمینه کردن جمع مربعات نسبت به متغیر اصلی لازم است:

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{T}^b} = \left[\frac{\partial \vec{T}^c}{\partial \vec{T}^b} \right] W (\vec{T}^m - \vec{T}^c) = 0 \quad (7)$$

حال به فرض آن که مقدار اولیه بی برای \vec{T}^b به دست آمده باشد، و با توجه به این که طبق روابط ۱ و ۲ تابعی از \vec{T}^b است، پس با تغییر این مقدار به اندازه $\Delta \vec{T}^b$ و با استفاده از سری مک لورن تیلور می توان نتیجه گرفت:

$$\vec{T}^c \Big|_{\vec{T}^{cb} + \Delta \vec{T}^b} = \vec{T}^c + \frac{\partial \vec{T}^c}{\partial \vec{T}^b} \Delta \vec{T}^b \quad (8)$$

با جایگذاری این عبارت در رابطه ی ۷ و با استفاده از تعریف ماتریس حساسیت به صورت زیر:

$$X = \frac{\partial \vec{T}^c}{\partial \vec{T}^b} \quad (9)$$

می توان به رابطه ی ۱۰ رسید:

$$X^T W (\vec{T}^m - \vec{T}^c) = X^T X \Delta \vec{T}^m \quad (10)$$

در این عبارت با توجه به مقادیر معلوم که از محاسبات اولیه به دست می آید می توان مشاهده کرد که یک معادله ی ماتریس خطی بر حسب $\Delta \vec{T}^b$ به دست می آید که می توان با حل آن مقادیر قبلی را تصحیح کرد.

الگوریتم حل

با توجه به معادلات به دست آمده می توان الگوریتم زیر را برای حل مسئله ی معکوس ارائه داد: [۸]

۱. ابتدا برای \vec{T}^b مقدار مناسبی حدس زده می شود؛
۲. معادله ی دیفرانسیل ۱ با شرایط ۲ حل می شود؛
۳. مقادیر دما در نقاط اندازه گیری، \vec{T}^c ، محاسبه می شوند؛
۴. ماتریس حساسیت براساس رابطه ی ۹ محاسبه می شود؛
۵. با حل رابطه ی ۱۰ مقدار $\Delta \vec{T}^b$ به دست می آید و مقدار \vec{T}^b تصحیح می شود؛
۶. با استفاده از مقادیر جدید مجدداً \vec{T}^c محاسبه می شود و به عنوان مقادیر تکرار جدید ثبت می شود؛
۷. در صورتی که یکی از روابط زیر بین مقادیر محاسبه شده از تکرار k و $k+1$ برقرار شد حل همگرا شده است؛ در غیر این صورت عملیات از گام ۴ مجدداً آغاز می شود.

$$S^k < \epsilon_1 \quad (الف. ۱۱)$$

بیان می شود. در عبارات فوق T دماست که تابعی از زمان (t) و مکان (\vec{r}) است. $f, h, q_b, T^b, c_p, \rho, k$ و T_0 مقادیر معلوم اند. مسئله در محدوده ی بسته ی Ω با مرزهای Γ_T, Γ_q و Γ_c حل می شود. در مسئله ی هدایت حرارتی با مرز متحرک، یک یا چند قسمت از این مرزها متحرک است. در این نوشتار فرض می شود مرز Γ_T دارای سرعت مشخص u_s است.

مسئله ی معکوس

در مسئله ی معکوس مقادیر یک یا چند متغیر در یک یا چند قسمت از مرز نامعلوم است و در ازای آن دما در داخل جسم اندازه گیری می شود. در مسئله ی حاضر فرض می شود که شرط مرزی (۲.الف) مجهول است. این فرض برای ادامه ی کار است و محدودیتی برای کاربرد الگوریتم در حالت های دیگر ندارد. دما در M نقطه در داخل جسم در مکان هایی با بردار مکانی $\vec{r}_m, m = 1, 2, \dots, M$ ، در زمان های مشخص t ، اندازه گیری می شود و به صورت زیر نام گذاری می شود:

$$T_m^m = T(\vec{r}_m, t) \quad (13)$$

توان m نشان دهنده ی مقدار اندازه گیری شده است. مجموعه ی مقادیر اندازه گیری شده در هر زمان بردار مقادیر اندازه گیری شده را به وجود می آورد:

$$\vec{T}^m = [T_1^m, T_2^m, \dots, T_M^m]^T \quad (14)$$

که در آن توان T نشان دهنده ی ترانهاده ی ماتریس است. هدف یافتن مقدار مناسب مقادیر مرزی است به گونه یی که اختلاف دمای اندازه گیری شده با مقادیر محاسبه شده در محل های اندازه گیری حاصل از حل مسئله ی مستقیم کمینه باشد.

روش آنالیز حساسیت در حل مسئله ی معکوس

با توجه به وجود خطا در مقادیر اندازه گیری شده ی دما، حل مسئله ی معکوس به صورت حل مسئله ی کمینه سازی جمع مربعات خطا تعریف می شود: [۶]

$$S(\vec{T}^b) = (\vec{T}^m - \vec{T}^c)^T W (\vec{T}^m - \vec{T}^c) \quad (15)$$

در این عبارت \vec{T}^b بردار مقادیر دما در نقاط مختلف Γ_b در زمان مطلوب است. همچنین توان c به معنای مقادیر محاسبه شده ی دما در نقاط متناظر اندازه گیری دما در زمان مطلوب و با فرض معلوم بودن \vec{T}^b است. بدین ترتیب مقدار S تابعی از مقدار \vec{T}^b است. W هم یک ماتریس وزنی به منظور پایین آوردن احتمال خطاست و در صورتی که مقدار انحراف معیار خطا در دماهای اندازه گیری شده مقدار معلوم σ باشد، می توان آن را به صورت زیر انتخاب کرد: [۷]

معادلات خطی به علت وجود جمله‌ی جابه‌جایی در معادله‌ی اصلی می‌تواند ماتریس ضرایب غیر متقارن و حتی نامثبت معینی داشته باشد. به همین دلیل برای حل این دستگاه باید از روش‌های مناسب استفاده کرد. به عنوان مثال روش تغییرات مزدوج عادی در برخی از مسئله‌ها پاسخگو نیست. به همین منظور از روش تجزیه‌ی بالامثلثی و پایین‌مثلثی استفاده شده است که بسیار کارآمد و دقیق است.^[۱۳] همچنین باید توجه کرد که این دستگاه در طول حل مسئله بارها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به همین منظور برای ذخیره‌سازی اطلاعات در هر گام، از ساختار تنک ماتریس ضرایب استفاده شده است.^[۱۴]

بدین ترتیب مجموعه‌ی الگوریتم و اطلاعات مربوط به گسسته‌سازی و حل معادلات خطی برآیند کامل است و مسئله نیز کاملاً قابل حل است. براساس این الگوریتم کد کامپیوتری آماده شده است.

نحوه‌ی تأیید الگوریتم

در مسائل انتقال حرارت هدایتی معکوس با استفاده از روش شبیه‌سازی می‌توان صحت عملکرد و بازدهی آن را مورد بررسی قرار داد.^[۱۵] در این روش ابتدا مدل مسئله‌ی واقعی مورد بررسی را با بیان ریاضی ارائه می‌کنند. با حل معادلات حاکم در مسئله‌ی مستقیم، دما در نقاط دلخواه که به عنوان نقاط اندازه‌گیری در نظر گرفته می‌شود، محاسبه و به صورت $T_m^m, exact$, $m = 1, 2, \dots, M$ ذخیره می‌شود. با فرض این که دماسنج‌ها دارای خطایی با انحراف معیار σ و توزیع احتمالی نرمال‌اند، دمای نقاط اندازه‌گیری با استفاده از معادله‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$T_m^m = T_m^m, exact + \omega \quad (۱۶)$$

که در آن ω یک عدد کتره‌یی با انحراف معیار ۱ و میانگین صفر است و از الگوریتم GASDEV برای این منظور استفاده شده است.^[۱۶] این عدد کتره‌یی به گونه‌یی انتخاب می‌شود که احتمال بروز آن در محدوده ۰.۹۹٪ باشد. بدین ترتیب شرایط یک آزمایش واقعی شبیه‌سازی می‌شود و روش حل مسئله‌ی معکوس بر روی آن اعمال می‌شود. با بررسی نتایج استفاده از روش حل مسئله‌ی معکوس در مرز مجهول و مقدار واقعی مورد استفاده در شبیه‌سازی در همان مرز می‌توان به نتیجه‌ی مطلوب رسید. با این روش به علت سادگی دسترسی به راحتی می‌توان متغیرهای مهم مسئله را پیش‌بینی کرد، و در نهایت برای استفاده از الگوریتم در عمل آزمایش‌های مناسبی را طراحی کرد.

مطالعه‌ی موردی

در مسئله‌ی اصلی، اندازه‌گیری دمای سطح سوخت موشکی

$$\left| S^{k+1} - S^k \right| / S^k < \varepsilon_4 \quad (۱۱.ب)$$

$$\left\| \Delta \vec{T}^b \right\| < \varepsilon_3 \quad (۱۱.ج)$$

در عبارت‌های فوق ε_1 ، ε_2 و ε_3 مقادیر دلخواه کوچکی هستند که با توجه به دقت‌های مورد نیاز تعیین می‌شوند و نمی‌توانند از خطای اندازه‌گیری کم‌تر باشند.^[۹]

روش گسسته‌سازی مکانی و زمانی

جهت حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم که بارها در الگوریتم استفاده می‌شود نیاز به گسسته‌سازی معادله در مکان و زمان است. همان‌طور که در مقدمه اشاره شد روش اجزاء محدود متحرک با روش احجام محدود ترکیب شده است و به منظور گسسته‌سازی مکانی مورد استفاده قرار گرفته است. در روش اجزاء محدود متحرک، معادله‌ی دیفرانسیل ۱ را با در نظر گرفتن یک شبکه‌ی مناسب با J گره و توابع وزنی متناظر N_j , $j = 1, 2, \dots, J$ ، به صورت مجموعه‌یی از معادلات انتگرالی زیر حل می‌کنیم:

$$\int_{\Omega} N_j \left[\nabla \cdot (k \nabla T) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \rho c_p \vec{V} \cdot \nabla T \right] d\Omega = 0 \quad (۱۲)$$

که در آن \vec{V} سرعت هر نقطه از شبکه است.^[۱۰] با استفاده از یک سری عملیات ریاضی می‌توان معادلات فوق را به صورت احجام محدود زیر نشان داد:^[۱۱]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum C_{i,j} T_{i,j} \right] + \sum \vec{H}_{i,j} \vec{n}_{i,j} = 0 \quad (۱۳)$$

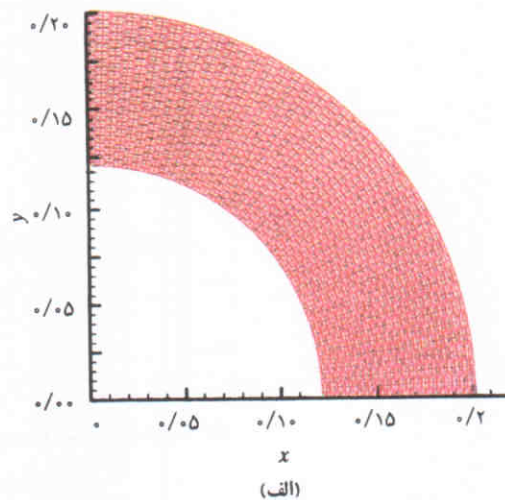
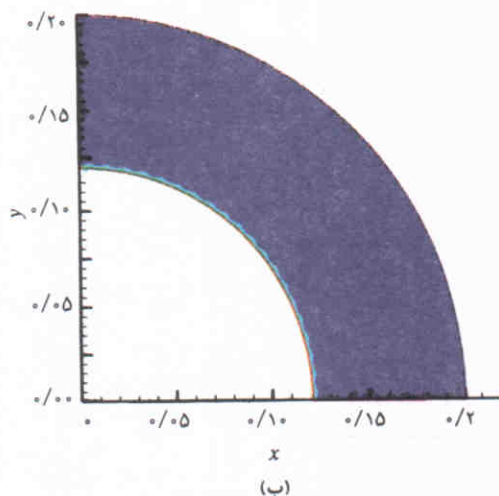
که در آن جمع روی تمام گره‌های همسایه‌ی گره زام است. جمله‌ی دوم مجموعه‌ی شارهای عبوری از سطوح اطراف حجم کنترل محیط بر گره است. جمله‌ی اول مشتق زمانی ظرفیت حرارتی معادل است. به منظور گسسته‌سازی زمانی این جمله از روش کرنک نیکلسون که دارای دقت از درجه‌ی دوم است و نیز خواص پایداری مناسبی دارد،^[۱۲] استفاده شده است:

$$\rho c_p \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \frac{1}{4} \nabla \cdot (k \nabla T)^{n+1} + \frac{1}{4} \nabla \cdot (k \nabla T)^n \quad (۱۴)$$

که در آن n نشان‌دهنده‌ی گام زمانی است. بدین ترتیب با استفاده از رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ می‌توان به یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر رسید:

$$\vec{A} \vec{T} = \vec{b} \quad (۱۵)$$

که در آن \vec{A} ماتریس ضرایب، و \vec{b} بردار حرارت است. این دستگاه



شکل ۱. الف) شبکه‌ی ۴۱×۴۱ در میدان حل؛ ب) میدان دما در مسئله‌ی مستقیم (۲s = t).

سازوکار غالب، موج ناشی از جابه‌جایی است. به‌علت کندی پاسخ میدان حل نسبت به تغییرات در سطح، حساسیت مسئله بسیار ضعیف است و در نتیجه ماتریس‌های حساسیت که در رابطه‌ی ۱۰ مورد استفاده قرار گرفته است، دترمینانی در حدود صفر دارند، به‌همین علت وضعیت معادله‌ی مورد بررسی بسیار بد است.

در شکل ۲ الف مقادیر پیش‌بینی شده با مقادیر واقعی به‌ازای انحراف معیار ۰/۱ درجه سانتی‌گراد در دماسنج‌ها مقایسه شده است. همچنین دمای نقاط اندازه‌گیری در هر لحظه و دمای همان نقاط توسط محاسبات به‌دست آمده‌اند در شکل ۲ ب و تعداد نقاط اندازه‌گیری مفید در داخل جسم در شکل ۲ ج نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود دمای محاسبه شده ناگهان در پایان ثانیه‌ی اول از مقدار واقعی دور می‌شود. این موضوع در مقایسه با تعداد و اندازه‌ی دمای اندازه‌گیری شده با دماسنج‌ها قابل تفسیر است. در این لحظه دومین دماسنج از محیط خارج می‌شود و در نقطه‌ی مقابل، دماسنج بعدی به اندازه‌ی مناسبی حرکت نکرده است. به‌همین سبب حساسیت مسئله نسبت به تغییرات در سطح بسیار پایین است و مسئله در وضعیت بسیار بدی است. در این حالت محاسبات به نقطه‌ی خوبی همگرا نمی‌شود. این مورد حتی تا چند گام بعدی، که حساسیت مناسب می‌شود، نیز ادامه دارد.

علت این پدیده آن است که تخمین نادرست دما، منجر به انحراف میدان به سمت نادرست می‌شود. به‌همین علت در گام بعدی باید دما به سمت مخالف انحراف قبلی برود تا این انحراف را جبران کند. بدین لحاظ نوساناتی حول دمای واقعی به وجود می‌آید. با وجود این انحرافات در یک محدوده، دوباره مسئله به پاسخ مطلوب همگرا می‌شود.

برای بررسی محدوده‌ی همگرایی روش حل، مقدار انحراف معیار

سوخت جامد مورد نظر است. سوخت‌های جامد از موادی با خواص هدایتی بسیار پایین تهیه می‌شوند و به‌همین سبب نفوذ حرارتی به‌کندی در ماده رخ می‌دهد. خواص مورد نیاز برای سوخت نمونه عبارتند از: [۱۷]

$$k = 0.418 \text{ W/m}^\circ\text{K}$$

$$\rho = 1750 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 1260 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$$

همچنین سرعت سوختن به‌گونه‌ی است که سرعت سطح بین ۱ تا ۲۰ میلی‌متر در ثانیه تغییر می‌کند. برای بررسی چنین مسئله‌ی، شرایط مرزی برای یک سوخت متقارن استوانه‌ی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$T = 1000 \quad \text{در } 0 < \theta < 90^\circ \text{ و } r = 0/1 \text{ و } t > 0 \quad (17 \text{ الف})$$

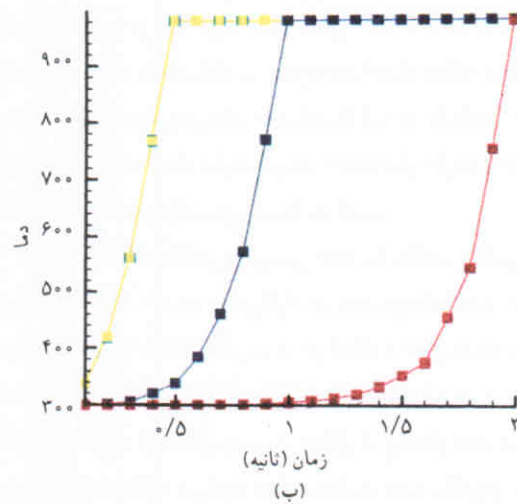
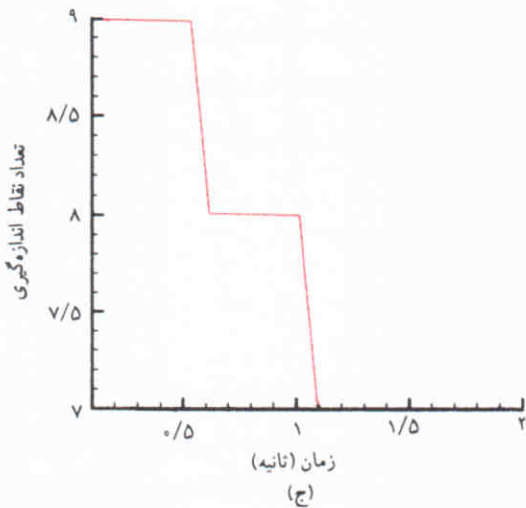
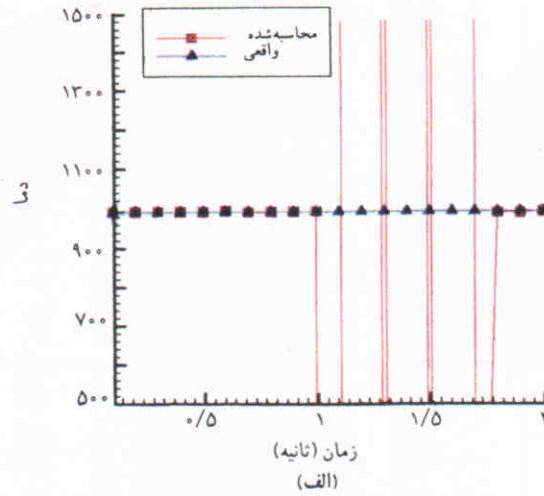
$$T = 300 \quad \text{در } 0 < \theta < 90^\circ \text{ و } r = 0/2 \text{ و } t > 0 \quad (17 \text{ ب})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{در } 0 < \theta < 90^\circ \text{ و } r = 0/2 \text{ و } t > 0 \quad (17 \text{ ج})$$

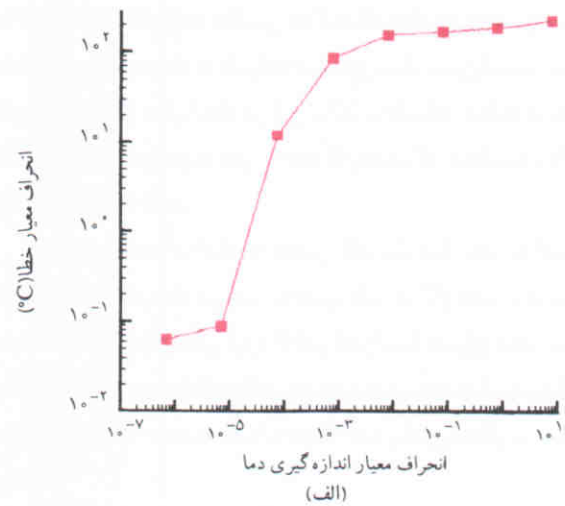
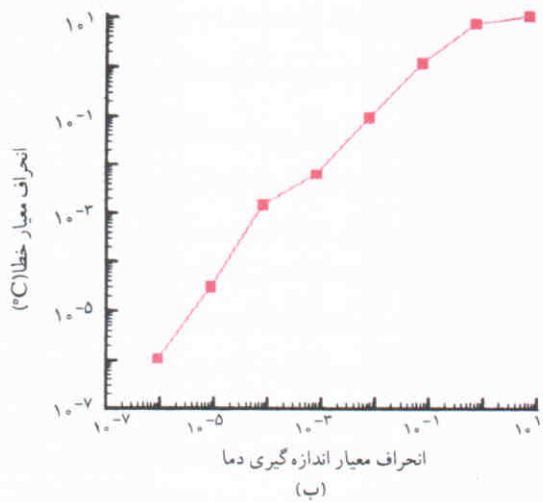
$$T = 300 \quad \text{در } 0 < \theta < 90^\circ \text{ و } r = 0/2 \text{ و } t = 0 \quad (17 \text{ د})$$

حال با فرض آن که ۹ عدد دماسنج به‌صورت شعاعی در فواصل ۱ سانتی‌متری از یکدیگر قرار گرفته‌اند، مسئله برای سرعت متوسط ۱۰ میلی‌متر بر ثانیه حل شده است. در شکل ۱ یک نمونه از حل مسئله‌ی مستقیم مشاهده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود موج دما پس از ۲ ثانیه کمتر از ۳ میلی‌متر نفوذ پیدا کرده است.

از آنجا که ضریب نفوذ حرارتی بسیار پایین (کمتر از $2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$) است، زمان نفوذ هم بسیار پایین خواهد بود (با تقریب جسم نیمه بی‌نهایت در دو ثانیه دمای ۳ میلی‌متری کمتر از ۰/۰۰۱ دمای سطح تغییر می‌کند). در این مسئله به‌علت وجود سرعت سطح



شکل ۲. الف) مقایسه‌ی دمای محاسبه شده سطح و دمای واقعی؛ ب) دمای اندازه‌گیری؛ ج) تعداد نقاط اندازه‌گیری.

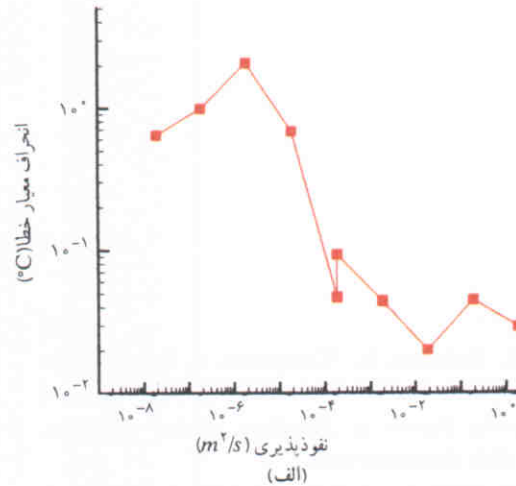
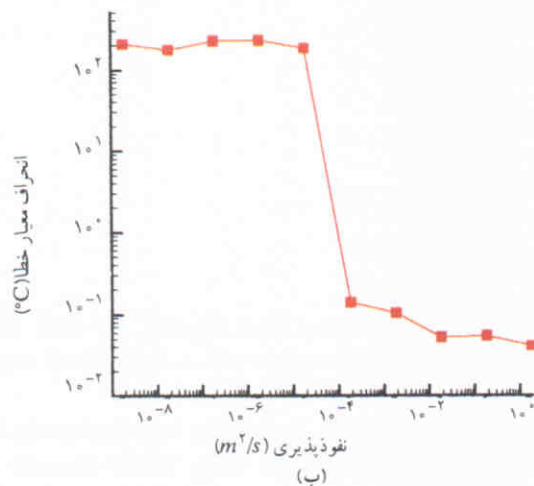


شکل ۳. انحراف معیار خطای محاسبات در یک بازه‌ی: الف) ۲ ثانیه‌یی؛ ب) ۰/۵ ثانیه‌یی در مقابل تغییرات خطای دما سنسورها.

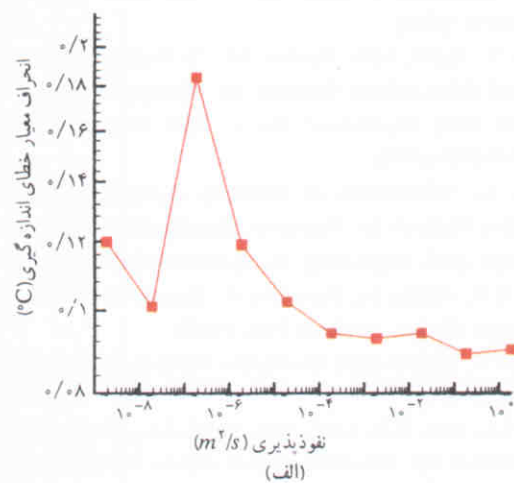
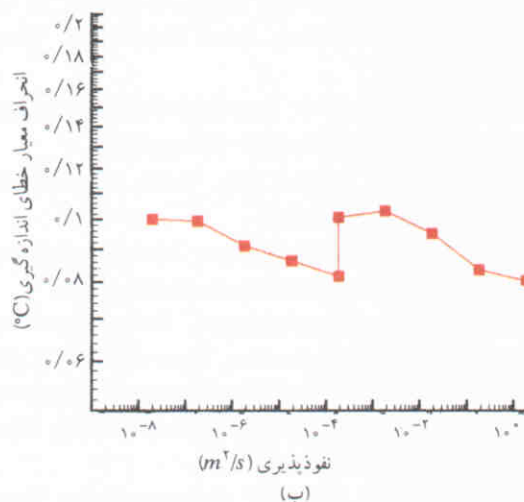
است. البته براساس نمودار فوق می توان نتیجه گرفت که برای رسیدن به دقت ۱ درجه در سطح، دماسنج هایی با دقت ۰/۱ درجه سانتی گراد مورد نیاز است. در بررسی های بیشتر، مسئله برای ضرایب نفوذ حرارتی متفاوت نیز مورد بررسی واقع شد که نتایج در شکل های ۴ و ۵ ارائه شده اند.

در شکل ۴ انحراف معیار خطای محاسبه ی دمای سطح در مقابل ضریب نفوذ، در دو بازه ی زمانی ۰/۵ و ۲ ثانیه ارائه شده است. این مقادیر به ازای خطای ۰/۱ درجه سانتی گراد برای دماسنج ها به دست آمده است. همان طور که در شکل مشاهده می شود در ضریب نفوذهای بالای $10^{-5} m^2/s$ اختلاف قابل توجهی بین نتایج وجود ندارد ولی در ضرایب نفوذ پایین مجدداً مشکل عدم حساسیت باعث اختلاف قابل توجه بین نتایج در دو بازه می شود. نتیجه یی که می توان از این نمودارها گرفت این است که با پایین رفتن شدید ضریب نفوذ، نتایج به شدت

اختلاف دمای محاسبه شده در سطح و مقدار دمای واقعی سطح (خطا) در مقابل تغییرات خطای دماسنج ها مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن در شکل ۳ مشاهده می شود. همان طور که در این شکل مشاهده می شود هنگامی که این انحراف معیار در یک بازه ی ۰/۵ ثانیه یی محاسبه شود تفاوت مشخصی با همان مقدار در بازه ی ۲ ثانیه یی دارد. علت این مسئله همان تغییر تعداد دماسنج و حساسیت کم مسئله به تغییرات است که در شکل قبل به طور موردی مورد بررسی قرار گرفت. نکته یی مهم در هر دو نمودار این است که با بالا رفتن خطای اندازه گیری دما، به سرعت دمای خطای محاسبه در سطح بالا می رود. البته روش مورد بررسی با استفاده از دماسنج های معمولی نوع K که با هزینه ی ارزان موجود است و در دمای مورد نظر دارای خطایی از درجه ی اول هستند، دمای سطح را با دقت در حدود ۱۰ درجه به دست می دهند. بدین ترتیب روش مورد بررسی در محدوده ی کاربرد مناسب



شکل ۴. انحراف معیار خطای محاسبات در یک بازه ی: الف) ۲ ثانیه یی، ب) ۰/۵ ثانیه یی در مقابل تغییرات ضریب نفوذ حرارتی.



شکل ۵. انحراف معیار خطای دمای نقاط اندازه گیری در یک بازه ی: الف) ۲ ثانیه یی، ب) ۰/۵ ثانیه یی در مقابل تغییرات ضریب نفوذ حرارتی.

نوسان می‌یابند.

نتیجه‌گیری

چنان‌که از نتایج روش ترکیبی ارائه شده برای حل مسئله‌ی معکوس حرارتی با مرز متحرک مشخص است، این روش به‌گونه‌ی است که به‌ازاء مقادیر مختلف خطای دماسنج‌ها قابلیت ارائه‌ی نتایج قابل قبول و اطمینان‌بخش را دارد. با روش مورد بررسی، دمای سطح متحرک با هزینه‌ی کم و دقت مناسب قابل اندازه‌گیری است. براساس این نتایج می‌توان محل مناسب استقرار دماسنج‌ها و دقت مورد انتظار از محاسبات را پیش‌بینی کرد. در گام‌های بعدی بهتر است روش‌های فیلتر کردن اطلاعات مورد بررسی قرار گیرد.

در شکل ۵ انحراف معیار اختلاف دمای اندازه‌گیری شده و دمای محاسبه شده در همان نقاط اندازه‌گیری، به‌ازای ضرایب نفوذ متفاوت ارائه شده است. این نمودار به‌منظور اطمینان از نتایج ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این انحراف معیار در حدود انحراف معیار خطای دماسنج‌هاست. هر قدر انحراف معیار خطای دماسنج‌ها بالاتر رود این مقادیر نیز بالاتر می‌روند. از آنجا که مسئله همگرا شده است این انحراف معیار در حد قابل قبول است. در حقیقت اطلاعات موجود با روش مورد بررسی نمی‌تواند به نتایج بهتری برسد.

منابع

1. Kakaee, A.H., Farhanieh, B., "Comparison of Regularization Methods for Inverse Heat Conduction Problems", *International J. of Engineering Science of ElmoSanat of Iran University*, Accepted in 2000, Publishing Soon.
2. Barth, T., "On Unstructured Grids and Solvers", *VonKarman Inst. Lect. Series in Comp. Fluid Dynamics*, 3, pp. 1-65 (1990).
3. Beck, J.V., "Non-Linear Estimation Applied to the Nonlinear Heat Conduction Problem", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13, pp.703-716 (1970).
4. Jarny, Y., Ozisik, M.N., Bardon, J.P., "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34, pp.2911-2919 (1991).
5. Anju, A., "Comparison of Sensitivity Equation and Adjoint Equation Methods for Parameter Identification Problems", *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 40, pp.1015-1024 (1997).
6. Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A., **Regularization of Inverse Problems**, Kluwer Academic Pub., (1996).
7. Beck, J.V., **Inverse Heat Conduction Problem**, John Wiley and Sons, (1987).
8. Hsu, T.R., Sum, N.S., Chen, G.G., Gong, Z.L., "Finite Element Formulation for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Analysis", *ASME J. Heat Transfer*, 114, pp. 553-557 (1992).
9. Huang, C.H., Yan, J.Y., "An Inverse Problem in Predicting Temperature Dependent Heat Capacity Per Unit Volume without Internal Measurements", *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 39, pp. 605-618, (1996).
10. Albert, M. R., O'Neil, K., "Moving Boundary-Moving, Mesh Analysis of Phase Change Using Finite Elements with Transfinite Mappings", *Int. J. Numer. Meth. Engineering*, 23, pp. 591-607, (1986).
11. Kakaee, A.H., **Solution of the Two Dimensional Navier Stokes Equations on Unstructured Triangular Meshes for Laminar Fluid Flow**, M.Sc. Thesis, Sharif University of Technology, (1995).
12. Harrier, E., Warner, G., **Solving Ordinary Differential Equations: Stiff Problems**, Springer Verlag (1991).
13. Golub, G. H., Vanloon, C.F., **Matrix Computations**, John Hopkins Univ. Press, (1989).
14. Duff, I.S., Erisman, A.M., Reid, J.K., **Direct Methods for Sparse Matrices**, Clarendon Press, Oxford, (1986).
15. Ozisik, M.N., Orlande, H.R.B., **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**, Taylor and Francis, (2000).
16. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., **Numerical Recipes in FORTRAN: Art of Scientific Computing**, Cambridge University Press, (1992).
17. Timnat, Y.M., **Advanced Chemical Rocket Propulsion**, Academic Press, (1987).