شکل‌دهی میدان‌های مغناطیسی دوبعدی

محمدباقر ملائک (دانشیار)
جواد پرستاری (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار، به‌لحاظ ماهیت کنش از راه دور و اهمیت زیاد نیروهای مغناطیسی، به بررسی مسئله‌ی کنترل حرکت یک جسم در صفحه از طریق کنترل میدان مغناطیسی پرداخته‌ایم. بدین منظور ابتدا با بررسی فیزیک مغناطیس، معادلات حرکت یک جسم مغناطیسی در میدان مغناطیسی مدل‌سازی ریاضی شده است. با استفاده از نظریه‌ی کنترل بهینه، مسئله‌ی کنترل حرکت در حالات مختلف تعریف شده و روش حل آن مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌طور خلاصه می‌توان اذعان داشت که به‌دلیل ماهیت غیرخطی و فرم خاص تأثیر کنترل‌ها در دینامیک سیستم، مطالعه بسیار پیچیده است اما مسلماً کنترل حرکت کاملاً امکان‌پذیر خواهد بود.

مقدمه

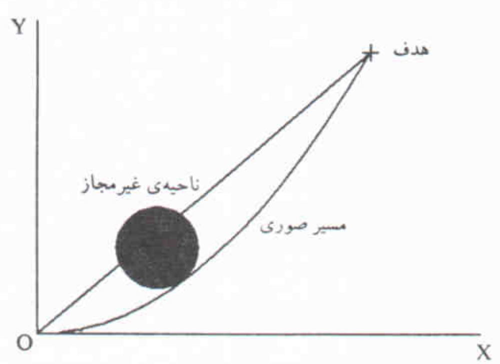
از دیرباز استفاده از میدان‌های مغناطیسی، به‌علت کنش از راه دور و قابلیت بهره‌گیری از نیروهای مغناطیسی بدون تماس فیزیکی، در مسائل مهندسی و فیزیکی مورد توجه بوده است. از جمله کاربردهای مهم این پدیده در کنترل وضعیت ماهواره، کنترل حرکت روبات‌ها، ریل‌های مغناطیسی برای حرکت قطار و یا ترمزهای مغناطیسی را می‌توان برشمرد. اما نکته‌ی مهم در این مبحث این است که اعمال کنترل دقیق بر دینامیک سیستم تحت کنترل به‌علت ماهیت کاملاً غیرخطی میدان‌های مغناطیسی واقعاً دشوار است و نیازمند مهارت و تجربه‌ی کافی است.

در این پژوهش مسئله‌ی کنترل حرکت جسم متحرک در صفحه مورد توجه قرار گرفته است که خصوصاً کاربردهای نتایج حاصله در فناوری روباتیک می‌تواند بسیار جالب باشد. با توجه به این که مسئله‌ی کنترل حرکت، مورد نظر است لذا باید نیروهای مغناطیسی مهار شوند برای این منظور دو شیوه‌ی عمده مورد توجه قرار می‌گیرد. در روش اول شدت میدان مغناطیسی کنترل می‌شود و برای این منظور به‌عنوان مثال کنترل شدت جریانی که باعث ایجاد این میدان شده، مورد نظر است. روش دوم هیچ‌گونه کنترلی بر روی میدان مغناطیسی وجود ندارد بلکه شدت جریان عبوری از جسم متحرک تحت کنترل مورد نظر است. روش اول در کنترل حرکت اجسام بدون تماس فیزیکی بسیار جالب است که در این پژوهش به آن پرداخته شده است. روش دوم خصوصاً در کنترل وضعیت ماهواره در مدار به کار گرفته شده است.

تعریف مسئله‌ی کنترل حرکت در صفحه توسط کنترل میدان مغناطیسی

در این پژوهش مسئله‌ی کنترل حرکت یک جسم متحرک در فضای دو بعدی (داخل صفحه) مورد توجه قرار گرفته است و برای مهار حرکت، کنترل میدان مغناطیسی در فضای دو بعدی به‌عنوان ابزاری لازم به کار گرفته می‌شود. با توجه به پیچیدگی شکل میدان‌های مغناطیسی، ساختار میدان به گونه‌یی بنا می‌شود که میدان‌های مغناطیسی در هر یک از دو بعد به‌طور مستقل از هم کنترل شوند. این موضوع بدون این که از کلیت مسئله بکاهد تنها فرایند کنترلی را تسهیل خواهد کرد.

در صفحه‌ی دو بعدی xoy، یک قاب مربعی هم‌مرکز با دستگاه مختصات را در نظر بگیرید. با عبور جریان از سیم‌پیچ‌هایی که حول این قاب قرار داده شده‌اند یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود که به هر جسم مغناطیسی که در داخل صفحه در حال حرکت باشد نیروهای مغناطیسی در دو جهت x و y وارد می‌کند (شکل ۱). با صرف‌نظر کردن



شکل ۱. طرح‌واره‌ی صفحه‌ی حرکت.

از اصطکاک بین جسم و صفحه، معادلات حرکت به شکل زیر نوشته می‌شوند:[1]

$$\ddot{x}=f(x(t)).I_{1}(t) \quad (1)$$

$$\ddot{y}=f(y(t)).I_{2}(t) \quad (2)$$

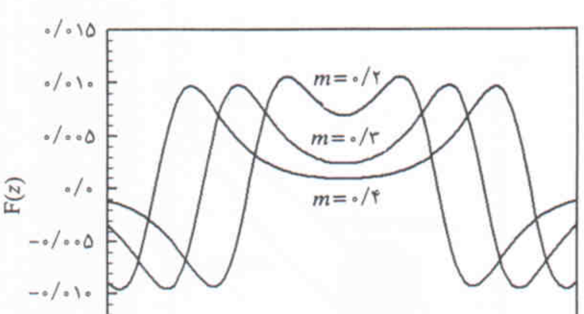
در روابط ذکر شده x و y موقعیت جسم متحرک در دو بعد صفحه xoy است و براساس متر سنجیده می‌شوند و I_1 و I_2 شدت جریان‌های عبوری از اضلاع قاب مغناطیسی‌اند که به‌عنوان کنترل‌های مسئله‌ی مورد نظرند و براساس آمپر سنجیده می‌شوند. همچنین شتاب مغناطیسی وارد بر جسم در واحد شدت جریان طبق رابطه‌ی ۳ محاسبه می‌شود:[1]

$$f(z)=k.\left[\frac{z+m}{\left[(z+m)^{2}+l^{2}\right]^{\frac{5}{2}}}-\frac{z-m}{\left[(z-m)^{2}+l^{2}\right]^{\frac{5}{2}}}\right] \quad (3)$$

در رابطه‌ی فوق z متغیر مجازی است که به جای x و y به کار گرفته شده است. همچنین f شتاب مغناطیسی در واحد شدت جریان مغناطیسی است. متغیر m بستگی به طول ضلع قاب مربعی دارد و در حقیقت نصف طول ضلع مربع است. متغیر l نیز بستگی به قطر سیم‌پیچ دارد و همچنین متغیر k ضریب نفوذ مغناطیسی است که بستگی به جنس سیم‌پیچ و جنس هسته‌ی مغناطیسی به کار رفته در سیم‌پیچ دارد. براساس یک مدل آزمایشگاهی ساخته شده مقادیر متغیرها این‌گونه‌اند:

$$k=1/7\times10^{-5}\ ,\quad l=0/15\ ,\quad m=0/3 \quad (4)$$

البته باید توجه داشت که متغیر m که معرف اندازه‌ی قاب مربعی است، به‌علت شکلِ غیرخطیِ میدان‌های مغناطیسی بر شتاب مغناطیسی به دست آمده تأثیر می‌گذارد. در شکل ۲ چگونگی این تأثیرات نشان داده شده است. در ادامه، به‌منظور بررسی دقیق‌تر مسئله مسائل خاصی تعریف می‌شوند که هر کدام از آنها هدف خاصی را در



شکل ۲. شتاب میدان مغناطیسی در واحد شدت جریان.

کنترل حرکت دنبال می‌کند. اما از آنجا که کنترل حرکت در دو بعد مستقل از هم صورت می‌گیرد، برای شناخت مسئله ابتدا مسئله‌ی کنترل حرکت را در یک بعد بررسی می‌کنیم. سپس با استفاده از نتایج و دیدگاه‌های به‌دست آمده مسئله‌ی کنترل حرکت دوبعدی مطالعه خواهد شد.

مطالعه‌ی موردی کنترل حرکت یک‌بعدی از طریق کنترل میدان مغناطیسی

با توجه به معادلات ۱، ۳ و ۴ دینامیک سیستم قابل بیان است، اما اهداف کنترلی مسئله ممکن است جنبه‌های متفاوتی را شامل شود که در ادامه به بررسی آنها خواهیم پرداخت. برای ایجاد یک مسئله‌ی قابل بررسی ــ بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود ــ فرض می‌کنیم که جسم مغناطیسی در لحظه‌ی صفر در مبدأ مختصات ساکن است و هدف انتقال جسم به نقطه‌ی $x = a$ است به‌گونه‌یی که جسم در مقصد ساکن باشد.

مسئله‌ی کم‌ترین زمان حرکت

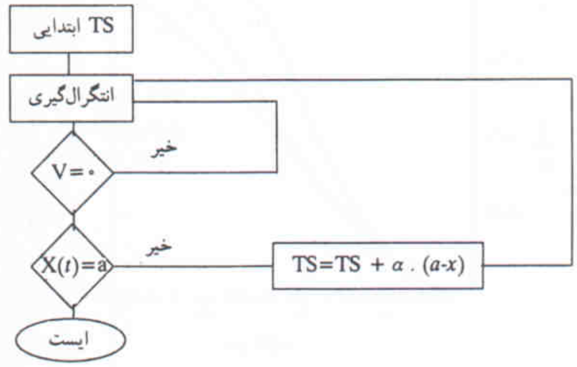
در این مسئله هدف اعمال فرامین کنترل است، به‌گونه‌یی که هدف کنترلی مسئله در کم‌ترین زمان ممکن حاصل شود. با توجه به معادله‌ی ۱ پیداست که هر قدر شدت جریان I_1 افزایش یابد زمان حرکت کاهش خواهد یافت. بنابراین برای دستیابی به پاسخ معقول و ممکنِ مسئله، باید محدودیت فیزیکی اعمالی بر شدت جریان را در نظر گرفت. فرض کنید که این محدودیت به‌صورت زیر بیان شده باشد:

$$\left|I_{1}(t)\right|\leq 1/0 \quad (5)$$

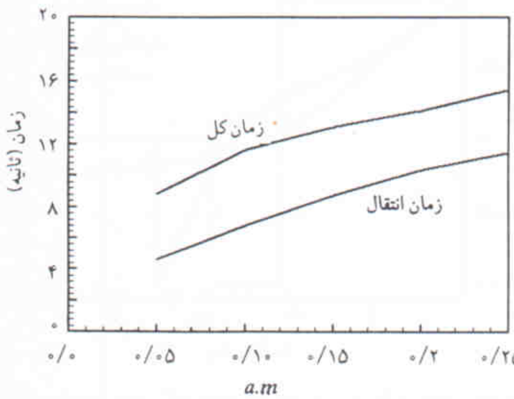
با کاربرد تئوری کنترل بهینه و تشکیل تابع‌ها میلتونی، براساس «اصل پونتری آگین»[2]، شکل پاسخ کنترل مسئله به‌صورت بنگ ـ بنگ خواهد بود. این بدان معنی است که $I_1(t)$ در تمام زمان‌های کنترل مقادیر ±1 را اختیار خواهد کرد. از طرفی با توجه به شکل ۲ روشن است که اگر $m = 0/3$ باشد، برای مقادیر $|x| \leq 0/3$ شتاب میدان مغناطیسی مثبت است و تغییر علامت نمی‌دهد. لذا براساس درک فیزیکی مسئله پاسخ کنترلی این‌گونه خواهد بود (به‌شرط $a<m$):

$$I_{1}(t)=\begin{cases}+1 & if \quad 0\leq t<T_{s}\\ -1 & if \quad T_{s}\leq t<T\\ 0 & if \quad T\leq t\end{cases} \quad (6)$$

T_S زمان انتقال و T زمان کل حرکت است که هر دو مجهول‌اند و باید محاسبه شوند. متأسفانه تاکنون هیچ روش کلی برای حل مسائل بنگ ـ بنگ ارائه نشده است، بلکه این مسائل تنها در موارد خاص بررسی شده و بعضاً حل تحلیلی برای آنها به دست آمده است. در این



شکل ۳. الگوریتم حل مسئله‌ی کم‌ترین زمان.



شکل ۴. زمان حرکت و انتقال در کنترل بنگ ـ بنگ مسئله‌ی کم‌ترین زمان.

مسئله با الهام از روش نیوتن ـ رافسون[۳] یک روش ابتکاری ارائه شده است که با اجرای آن در قالب برنامه‌ی رایانه‌یی مسئله‌ی مورد نظر حل شده است. الگوریتم این روش در شکل ۳ نشان داده شده است. برای مقادیر مختلف a این الگوریتم اجرا شده و نتایج به‌صورت منحنی در شکل ۴ رسم شده‌اند. مثلاً برای $a = 0/2$ مقدار T مساوی $14/15\ sec$ است.

مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی

در این مسئله هدف اعمال فرامین کنترل به گونه‌یی است که هدف کنترل مسئله برآورده شود و در ضمن معیار عملکردی زیر کمینه شود:

$$J = \int_0^T I_1(t)^2 dt \qquad (۷)$$

برای بررسی دقیق‌تر مسئله لازم است ابتدا مسئله در فضای حالت بازنویسی شود، آنگاه با تشکیل تابع‌ها میلتونی، معادلات بهینه‌گری و شبه حالت به دست می‌آیند.[۲] نتایج حاصله را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\dot x_1(t) = x_2(t) \qquad (۸)$$

$$\dot x_2(t) = f\left[x_1(t)\right] . I_1(t) \qquad (۹)$$

$$\dot p_1(t) = \frac{p_2^2(t)}{2} . f(x_1(t)) . \frac{d}{dx_1}\left(f(x_1(t))\right) \qquad (۱۰)$$

$$\dot p_2(t) = -p_1(t) \qquad (۱۱)$$

$$I_1(t) = -\frac{p_2(t)}{2} . f(x_1(t)) \qquad (۱۲)$$

در روابط فوق P_1 و P_2 متغیرهای شبه حالت نامیده می‌شوند. همچنین شرایط مرزی به‌صورت زیر خواهند بود:

$$x_1(0) = 0 ,\ x_1(T) = a \qquad (۱۳)$$

$$x_2(0) = 0 ,\ x_2(T) = 0 \qquad (۱۴)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود متأسفانه شرایط مرزی نه در زمان ابتدایی و نه در زمان انتهایی به‌طور کامل بیان نشده‌اند. این‌گونه مسائل به‌نام مسائل معادلات دیفرانسیل دومقداره ($2PBVP$) شناخته می‌شوند[۴،۲]، که برای حل آنها روش‌های مختلف عددی ارائه شده‌اند. اما اکثر این روش‌ها متکی بر یک الگوریتم تکراری جهت دستیابی به پاسخ‌اند و حدس مقدار اولیه برای این الگوریتم‌ها بسیار مهم است، چرا که اگر این مهم به‌خوبی صورت نگیرد، الگوریتم‌ها به سمت پاسخ همگرا نخواهند شد.

در این پژوهش با الهام از روش «تغییرات حدود»[۲]، و با اصلاح این روش، رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} P_1^{i+1}(0) \\ p_2^{i+1}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^{i}(0) \\ p_2^{i}(0) \end{Bmatrix} - \alpha . \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(T)}{\partial p_1(0)} & \frac{\partial x_2(T)}{\partial p_1(0)} \\ \frac{\partial x_1(T)}{\partial p_2(0)} & \frac{\partial x_2(T)}{\partial p_2(0)} \end{bmatrix}_i^{-1} . \begin{Bmatrix} x_1^{i}(T) - a \\ x_2^{i}(T) \end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

در این رابطه متغیر i نشان‌دهنده‌ی تعداد دفعات تکرار حلقه‌ی محاسباتی، و متغیر α نیز مشخص‌کننده‌ی سرعت همگرایی است که در هر مسئله باید با سعی و خطا و به‌دقت تعیین شود. با استفاده از معادله‌ی ۵ و تخمین شرایط اولیه برای متغیرهای شبه حالت، در نهایت با تکمیل شرایط اولیه و با استفاده از یکی از روش‌های انتگرال‌گیری عددی معادلات ۸ الی ۱۲ شبیه‌سازی رایانه‌یی می‌شوند. نتایج حاصله برای $a = 0/2$ و برای مقادیر مختلف T در جدول ۱ ارائه شده است.

همان‌گونه که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود با افزایش T، مقدار $I_{max} = Max|I_1(t)|$ و نیز مقدار تابع عملکردی کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که اگر $T^* = 17/47 sec$ و $T<T^*$، آنگاه $I_{max} > 1$. این مطلب ما را به طبقه‌بندی مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی

جدول ۱. معیار عملکرد و حداکثر کنترل اعمالی در معیار کمترین تلاش کنترلی در حرکت یک‌بعدی در زمان‌های مختلف.

حداکثر تاریخچه‌ی کنترل I_{max}	معیار عملکرد (کمترین کنترل) J	زمان حرکت (ثانیه) T
۱/۵۵	۱۰/۹۴	۱۴/۱۵
۱/۳۵	۹/۱۸	۱۵/۰۰
۱/۱۹	۷/۵۶	۱۶/۰۰
۱/۰۵	۶/۳۱	۱۷/۰۰
۱/۰۰	۵/۸۲	۱۷/۴۷
۰/۹۴	۵/۳۱	۱۸/۰۰

در دو حالت زیر رهنمون می‌شود:

مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی با زمان معین

در این مسئله تنها فرض ما معلوم‌بودن زمان کل حرکت (T) است که برای هرمقدار T پاسخ‌ها به‌همان صورت بیان شده به دست می‌آیند.

مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی با محدودیت فیزیکی تابع کنترلی در کم‌ترین زمان ممکن

این مسئله همان حالت خاص مسئله‌ی کلی قبل است که منجربه زمان $T^* = ۱۷/۴۷\ sec$ شد. نکته‌ی قابل توجه در این مسئله صرفه‌جویی معادل ۵۹٪ در میزان مصرف انرژی نسبت به مسئله‌ی کم‌ترین زمان است، در حالی که افزایش زمان حرکت تنها ۲۳٪ بوده است.

مسئله‌ی تعقیب مسیر یک‌بعدی

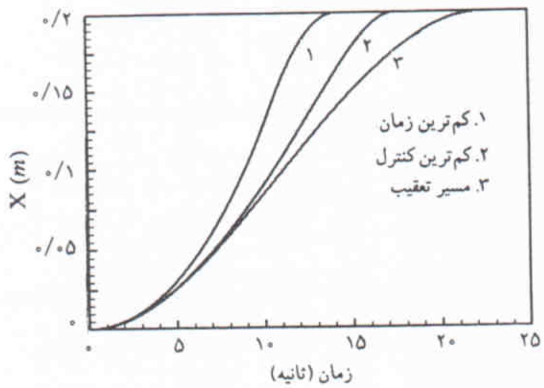
در این مسئله هدف محاسبه کنترل $I_۱$ است به‌گونه‌یی که متحرک مسیر $x_d(t)$ را بپیماید. در این صورت از معادله‌ی ۱ داریم:

$$I_۱(t) = \frac{\ddot{x}_d(t)}{f(x_d(t))} \qquad (۱۶)$$

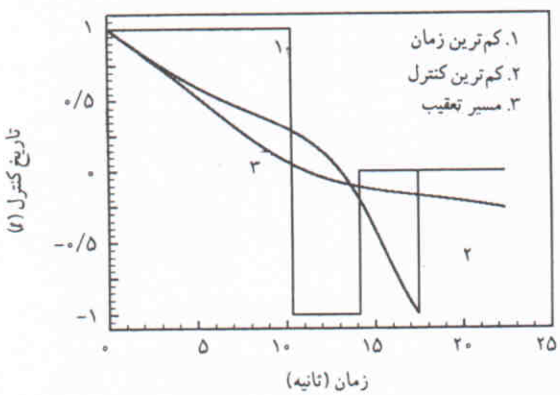
فرض کنید که هدف انتقال جسم ساکن در مبدأ مختصات به نقطه‌ی $x = a$ به‌گونه‌یی باشد که جسم در مقصد ساکن باشد و زمان کل حرکت T باشد. واضح است که مسیرهای بسیار زیادی برای این انتقال می‌توان در نظر گرفت. اگر مسیر دلخواه یک چندجمله‌یی برحسب زمان با کم‌ترین درجه‌ی ممکن باشد، در این صورت:

$$x_d(t) = -۲a.(t/T)^۳ + ۳a.(t/T)^۲ \qquad (۱۷)$$

با توجه به روابط ۱۶ و ۱۷ کنترل مطلوب قابل دسترسی است. اگر $a = ۰/۲$ فرض شود، در این صورت برای برقراری شرط فیزیکی $|I_۱(t)| \leq ۱$ باید رابطه‌ی $T > ۲۲/۳۵\ sec$ برقرار باشد. مسیرهای حرکت و تاریخچه‌ی زمانی کنترل برای مسائل نمونه‌یی کم‌ترین زمان حرکت، کم‌ترین تلاش کنترلی با رعایت قید فیزیکی در کم‌ترین زمان ممکن و تعقیب مسیر نمونه‌یی در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵. مقایسه‌ی مسیر حرکت یک‌بعدی.



شکل ۶. تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌های اعمالی در سه حالت مختلف کنترل، برای مسیرهای نشان داده شده در شکل ۵.

مطالعه‌ی موردی کنترل حرکت دوبعدی از طریق کنترل میدان مغناطیسی

با توجه به معادلات ۱ و ۲ دینامیک سیستم بیان می‌شود. لذا فرض کنید که جسم در مبدأ مختصات ساکن است و هدف انتقال آن به نقطه‌ی $x = a$ و $y = b$ است به‌گونه‌یی که جسم در مقصد ساکن شود. در ادامه چگونگی انجام این کار و محاسبه کنترل‌های $I_۱$ و $I_۲$ بررسی می‌شوند.

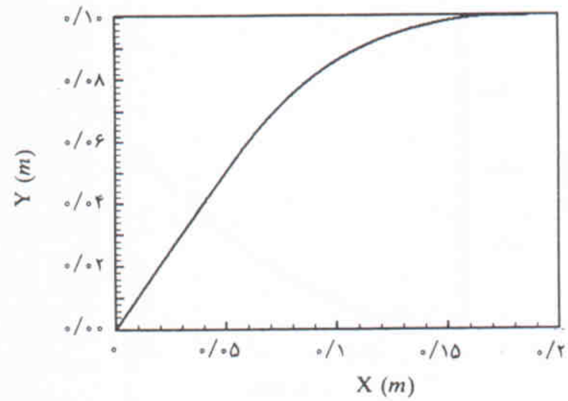
مسئله‌ی کم‌ترین زمان حرکت در صفحه

در این مسئله هدف انتقال جسم از مبدأ به مقصد در کم‌ترین زمان حرکت است. با توجه به دینامیک سیستم این مسئله در دو بعد مستقل از هم صورت می‌گیرد. به‌عنوان مثال برای $a = ۰/۲$ و $b = ۰/۱$ با توجه به مسئله‌ی کم‌ترین زمان حرکت خواهیم داشت:

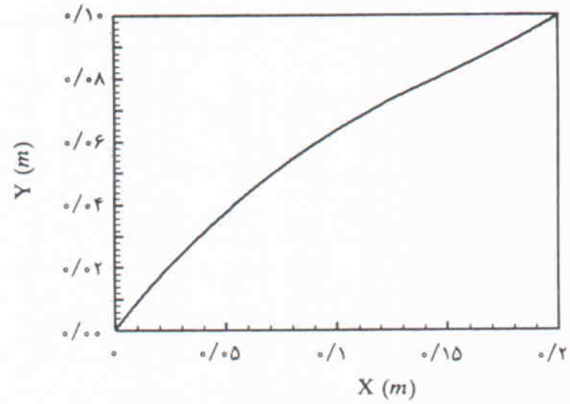
$$a = ۰/۲ \Rightarrow T_x = ۱۴/۱۵sec\ ,\ b = ۰/۱ \Rightarrow T_y = ۱۱/۶۲sec \qquad (۱۸)$$

رابطه‌ی ۱۸ بیانگر این مطلب است که متحرک موقعیت مکانی خود را در بعد y سریع‌تر از بعد x به دست می‌آورد. لذا در نهایت کم‌ترین زمان حرکت به‌صورت زیر خواهد بود:

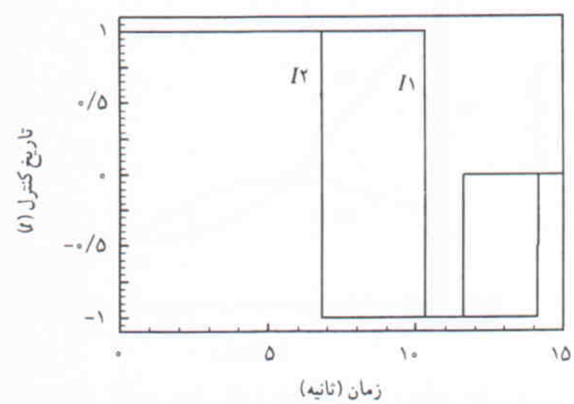
$$T_{min} = max\ (T_x\ ,\ T_y) = ۱۴/۱۵\ sec \qquad (۱۹)$$



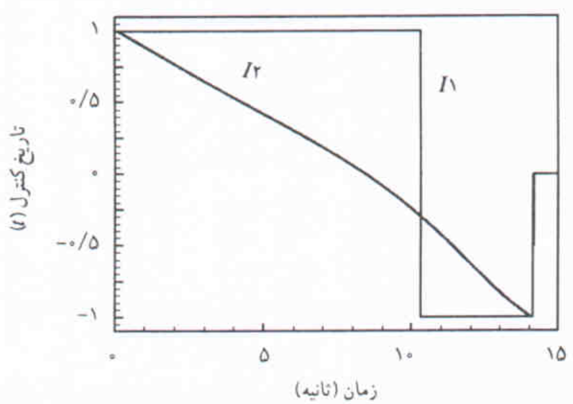
شکل ۷. مسیر حرکت در صفحه با کم‌ترین زمان در دو بعد مستقل.



شکل ۹. مسیر حرکت در صفحه با کم‌ترین زمان و تلاش کنترلی در بُعد دوم.



شکل ۸. کنترل‌های بنگ ـ بنگ برای مسیرهای نشان داده شده در شکل ۷.



شکل ۱۰. تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌های حرکت در صفحه بـا کـم‌ترین زمـان و تلاش کنترلی در بُعد دوم.

این بدان معنی است که متحرک برای حرکت در کم‌ترین زمـان در بعد x اجباراً باید از کنترل بنگ ـ بنگ استفاده کند. در حالی که در بعد y می‌تواند هر فرایند دلخواه دیگری را طی کند مشروط بر آن که $T_y<T_x$. لذا مسئله‌ی کم‌ترین زمان حرکت در صفحه حل یکتایی نخواهد داشت، بلکه برای داشتن حل یکتا یک قید اضافی را باید در جهت y اعمال کرد.

مسئله‌ی کم‌ترین زمان در دو بعد x و y

در این حالت، در بعد x کنترل بنگ ـ بنگ خواهد بود. مسیر حـرکت و تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌ها در شکل‌های ۷ و ۸ رسم شده‌اند.

مسئله‌ی کم‌ترین زمان در بعد x و کم‌ترین تلاش کنترلی در بعد y

در این حالت، در بعد x کنترل بنگ ـ بنگ خواهد بود. در جهت y طبق مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی با زمان معین $T_y = T_x =$ ۱۴/۱۵ sec و لذا تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌ها به‌دست خواهند آمد. مسیر حرکت و تاریخچه زمانی کنترل‌ها در شکل‌های ۹ و ۱۰ رسم شده‌اند.

مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی

از آنجا که هدف در این حالت کمینه‌سازی کنترل برای حـرکت است، باید معیار عملکرد زیر کمینه شود:

$$J=\int_{0}^{T}\left(I_1(t)^2+I_2(t)^2\right).dt \qquad (20)$$

اما چون دو بعد حرکت مستقل از یکدیگرند، لذا این مسئله منجر به مسئله‌ی کم‌ترین تلاش کنترلی یک‌بعدی در هر یک از ابعاد مستقل x و y می‌شود. برای داشتن جواب منطقی اعمال قیود اضافی بر روی زمان حرکت و یا تاریخچه‌ی کنترل‌ها ضروری است. بنابراین صورت مسئله چنان اصلاح می‌شود که ضمن کمینه‌سازی تلاش کنترلی داشته باشیم:

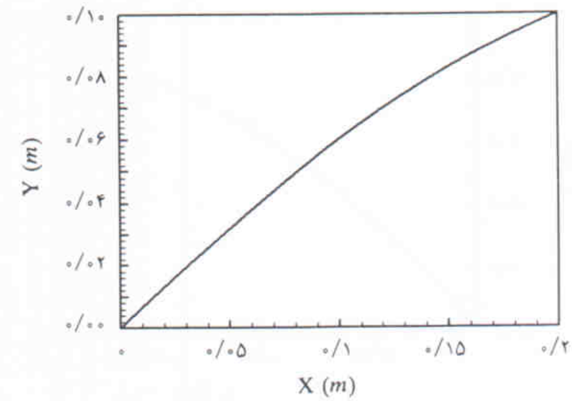
$$Max(|I_1(t)|\ ,\ |I_2(t)|) \leq 1 \qquad (21)$$

$$\exists t\in[0,T] \therefore \left|I_1(t)\right| = 1 \vee \left|I_2(t)\right| = 1 \qquad (22)$$

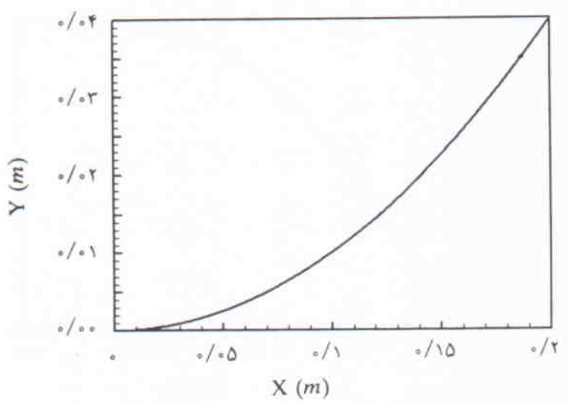
مسیر حرکت و تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌ها در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ رسم شده‌اند.

مسئله‌ی تعقیب مسیر در صفحه

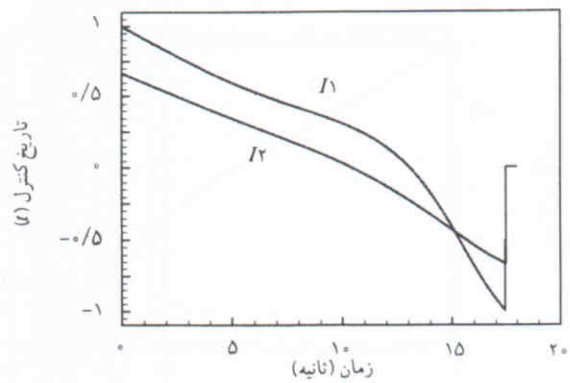
در این حالت هدف محاسبه‌ی کنترل‌هاست به‌گونه‌یی که مـتحرک در صفحه مسیر مشخصی را طی کند. بنابراین مسیر دلخـواه $F_d(x,y)=0$



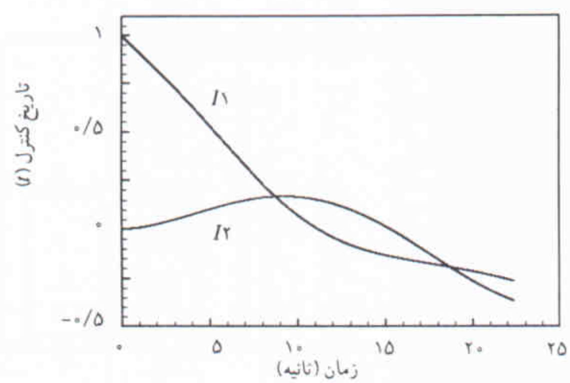
شکل ۱۱. مسیر حرکت در صفحه با کم‌ترین تلاش کنترلی.



شکل ۱۳. مسیر حرکت در صفحه در مسئله‌ی تعقیب مسیر.



شکل ۱۲. تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌های حرکت در صفحه با کم‌ترین تلاش کنترلی.



شکل ۱۴. تاریخچه‌ی زمانی کنترل‌های اعمالی در مسئله‌ی تعقیب مسیر.

موجود است و هدف تعقیب این مسیر است. با توجه به این که کنترل حرکت در دو بعد مستقل x و y صورت می‌گیرد، بنابراین مسئله‌ی تعقیب مسیر معادل با یافتن $x_d(t)$ و $y_d(t)$ است به گونه‌یی که:

$$\forall t\in[0,T]: F(x_d(t),y_d(t))=0 \quad (۲۳)$$

واضح است که مسئله‌ی تعقیب مسیر در صفحه نیز می‌تواند پاسخ یکتا نداشته باشد، زیرا انتخاب $x_d(t)$ و $y_d(t)$ می‌تواند یکتا نباشد. بنابراین اعمال قیود اضافی به‌لحاظ بهینه‌سازی زمان و انرژی و نیز به‌خاطر رعایت محدودیت‌های فیزیکی مسئله لازم است.

یکی از کاربردهای مهم تعقیب مسیر، گذر از کنار موانع احتمالی در صفحه و رسیدن به مقصد است و به همین دلیل طراحی مسیر با درنظر گرفتن تمام محدودیت‌ها انجام می‌شود. مثلاً اگر $y_d(t) = (x_d(t))^2$ مسیر دلخواه باشد و $x_d(t)$ مطابق رابطه‌ی ۱۷ در نظر گرفته شود، با استفاده از رابطه‌ی ۱۶ هر یک از ابعاد کنترل قابل محاسبه خواهند بود. (مسیر حرکت و کنترل‌ها در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ رسم شده‌اند.)

نتیجه گیری

کنترل حرکت با استفاده از کنترل میدان مغناطیسی در صفحه به‌علت ماهیت غیرخطی بودن آن دشوار است، و حل کلی برای مسئله وجود ندارد. لذا باید هدف کنترلی مسئله دقیقاً مشخص باشد تا بتوان متناسب با آن نسبت به انتخاب راه حل اقدام کرد. در ضمن با توجه به این که استفاده از روش کنترل بهینه منجر به مسائل $2PBVP$ می‌شود، استفاده از روش‌های خاص به‌منظور حل معادلات حاصله ضروری است.

ضمناً باید به خاطر داشت که اکثر این روش‌ها ذاتاً واگرا هستند و بسیار وابسته به انتخاب یا حدس مقادیر اولیه‌اند. آنچه که به‌عنوان مسیرهای آتی جهت پیگیری این پروژه پیش رو قرار دارد مسئله‌ی کنترل حرکت در فضای سه‌بعدی است که با پیچیدگی‌های بسیاری همراه است. اما با بررسی نتایج حاصله در این پژوهش، محقق است که کنترل حرکت در صفحه توسط میدان مغناطیسی کاملاً میسر است و این مسئله خصوصاً در فناوری روباتیک می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

۱. محمدباقر ملانک و احمد مشاعی، کنترل نیرو در میدان مغناطیسی، گزارش دستاوردهای پژوهشی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۸.

2. Kirk, D.E. **Optimal Control Theory**, Prentice-Hall, Inc., (1970).

3. Kreyszig, E. **Advanced Engineering Mathematics**, Jhon-Wiley & Sons, Inc. (1999).

4. Frank, L., Vassilisl. L.S. **Optimal Control**, Jhon-Wiley & Sons, Inc. (1995).