

# تحلیل ارتعاشی صفحات چندلایه‌ی مرکب با استفاده از سوپرالمان

## و مقایسه‌ی نتایج با روش‌های متعارف در اجزاء محدود

محمد تقی احمدیان (دانشیار)

مهدی شرافتی زنگنه (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

هرچند در دهه‌ی اخیر روش اجزاء محدود خدمات ارزنده‌ی در تحلیل سازه‌های مهندسی ایفا کرده است، با بزرگ شدن سازه‌ها و بالا رفتن تعداد المان‌ها توانایی‌های این روش جامع کاهش می‌یابد. به منظور برطرف ساختن این معضل، توجه دانشمندان به طراحی المان‌های جدیدی معطوف شده است که قابلیت کاهش تعداد المان‌ها را در سازه‌های بزرگ داشته باشند. از این میان، یکی از روش‌های قدرت‌مند که در سال‌های اخیر به جامعه‌ی علمی معرفی شده است، المان خاصی از اجزاء محدود به نام سوپرالمان است. با استفاده از سوپرالمان در مراحل مقدماتی طراحی با صرف هزینه و زمان کم، می‌توان مسئله‌ی دینامیکی را به راحتی تحلیل کرد و با استفاده از نتایج به دست آمده از تحلیل، تصمیم‌گیری مناسبی برای مراحل بعد طراحی اتخاذ کرد. در این نوشتار با استفاده از سوپرالمان با تعداد المان کم، ارتعاشات آزاد صفحات مرکب تحلیل شده است. در این بررسی از معادلات حاکم بر نظریه‌ی کلاسیک صفحات نازک با در نظر گرفتن نیروهای صفحه‌ی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد مدل‌سازی با سوپرالمان، روشی ساده و کارا در پیش‌گویی رفتار ارتعاشی صفحات مرکب چندلایه است.

### مقدمه

پاسخ تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل و معادلات دینامیکی حاکم بر صفحات مرکب راه دست آورد. روش‌های تحلیلی موجود فقط قادر به تحلیل تعداد بسیار محدودی از مسائل صفحات مرکب با شرایط خاص هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی هستند. با توجه به تنوع مسائل صفحات مرکب، بهترین و جامع‌ترین روش حل آنها، روش اجزاء محدود است.

Reddy در زمینه‌ی تحلیل صفحات مرکب زحمات فراوانی متحمل شده و مقالات و کتاب‌های متعددی انتشار داده است.<sup>[۱]</sup>

Wu و Chen فرکانس طبیعی صفحات مرکب چندلایه را با روش تحلیلی به دست آوردند. میدان جابه‌جایی را یک چندجمله‌ی درجه‌ی سوم در نظر گرفتند و از روی آن با بهره‌گیری از اصل هامیلتون، فرکانس طبیعی و بارکمانش صفحه‌ی مستطیل شکل مرکب چندلایه با تکیه‌گاه ساده را به دست آوردند. آنها با استفاده از بسط سری فوریه، نتایج به دست آمده را با جواب‌های کشسانی سه‌بعدی مقایسه کردند. نتایج آنها به طور رضایت‌بخشی به جواب‌های کشسانی نزدیک بود.<sup>[۲]</sup>

Kant و Mallikarjuna با روش اجزاء محدود، ارتعاشات آزاد صفحات مرکب چندلایه‌ی متقارن را بررسی کردند. آنها از روش نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی بالا صفحه را تحلیل، و تأثیر متغیرهای مختلفی نظیر نسبت طول به عرض، طول به ضخامت، تعداد لایه‌ها و زاویه‌ی

خواص متنوع مواد مرکب سبب شده از این مواد در دامنه‌ی وسیع در صنعت، از ابزارهای دقیق الکتریکی تا سازه‌های مکانیکی بزرگ بهره‌برداری شود و این امر موجب جلب توجه دانشمندان و محققان شده و دامنه‌ی وسیعی از تحقیقات را به خود اختصاص داده است. از مزایای سازه‌های مرکب می‌توان نسبت استحکام به وزن، طول عمر زیاد در برابر خستگی، خاصیت میرایی ذاتی، مقاومت در برابر خوردگی و عایق حرارتی و صوتی مناسب را برشمرد. چنین خواص مطلوبی از مواد مرکب باعث توسعه‌ی این مواد در صنایع گوناگون شده است. امروزه از صفحات مرکب در صنایع مختلف نظیر صنایع خودروسازی، هواپیما سازی و صنایع فضایی و کشتی‌سازی استفاده می‌شود.

توسعه‌ی کاربرد این صفحات در صنایع مختلف به وضوح نشان‌گر اهمیت روزافزون تحقیقات کاربردی این شاخه از علم است و نیاز به پیدایش نظریه‌های جدید، دقیق، کارا و مطمئن را برای پیش‌بینی عملکرد چنین سازه‌هایی در وظایف مختلف بیش از پیش نشان می‌دهد. برای دستیابی به هدف فوق باید بتوان صفحات مرکب با هندسه و خواص مکانیکی گوناگون، تحت بارگذاری و شرایط مرزی متنوع را تحلیل کرد و پاسخ مناسبی به دست آورد.

با توجه به تحقیقات وسیع انجام‌شده در این زمینه هنوز نمی‌توان

(a طول صفحه، b عرض صفحه،  $\xi = \frac{x}{a}$ ،  $\eta = \frac{y}{b}$ )

$$u = \sum_{i=1}^9 N_i^u u_i + \sin(\gamma\pi\xi) \begin{Bmatrix} L_1(\eta) \\ L_2(\eta) \\ L_3(\eta) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} + \sin(\gamma\pi\xi) \begin{Bmatrix} L_1(\eta) \\ L_2(\eta) \\ L_3(\eta) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \end{Bmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^9 N_i^v v_i + \sin(\gamma\pi\eta) \begin{Bmatrix} L_1(\xi) \\ L_2(\xi) \\ L_3(\xi) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{Bmatrix} + \sin(\gamma\pi\eta) \begin{Bmatrix} L_1(\xi) \\ L_2(\xi) \\ L_3(\xi) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{Bmatrix}$$

$$w = \sum_{j=1}^{16} N_j^w \psi_j + \phi(\xi) \begin{Bmatrix} H_1(\eta) \\ H_2(\eta) \\ H_3(\eta) \\ H_4(\eta) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} w_5 \\ w_{y5} \\ w_6 \\ w_{y6} \end{Bmatrix} + \phi(\eta) \begin{Bmatrix} H_1(\xi) \\ H_2(\xi) \\ H_3(\xi) \\ H_4(\xi) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} w_8 \\ w_{x8} \\ w_6 \\ w_{x6} \end{Bmatrix} + \phi(\xi)\phi(\eta)w_9 \quad (1)$$

که در آن  $u, v, w$  به ترتیب جابه‌جایی در جهات  $x, y, z$  تابع تقریب لاگرانژ درجه دوم و  $H_i$  چندجمله‌یی هرمیتین درجه سوم و  $\phi$  حالت اول ارتعاش تیر دوسرگیردار است.  $N_i^u$  و  $N_i^v$  توابع شکل  $(u, v)$  بوده و از حاصل ضرب چندجمله‌یی لاگرانژ به دست می‌آید.  $N_j^w$  تابع شکل  $w$  بوده و از حاصل ضرب چندجمله‌یی هرمیت به دست می‌آید. توابع شکل استفاده شده در پایان مقاله آمده است.  $\psi_j$  بیانگر جابه‌جایی و مشتقات آن در جهت  $Z$  است،  $u_i, v_i$  بیانگر جابه‌جایی گره‌ها در جهت  $x$  و  $y$  است که یک سری نقاط اضافی  $u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}$  و  $v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$  به منظور به‌کارگیری توابع مثلثاتی (توابع سینوسی) در میدان جابه‌جایی رابطه‌ی ۱ برای مدنظر داشتن تأثیر جابه‌جایی‌های صفحه‌یی آورده شده‌اند. جملات سینوسی جابه‌جایی  $\sin(\gamma\pi\xi)$ ،  $\sin(\gamma\pi\eta)$  مناسب برای تکیه‌گاه ساده و جملات  $\sin(\gamma\pi\xi)$

الیاف را بررسی کردند. نتایج به‌دست‌آمده با جواب‌های کشسانی سه‌بعدی انطباق خوبی دارد. [۴]

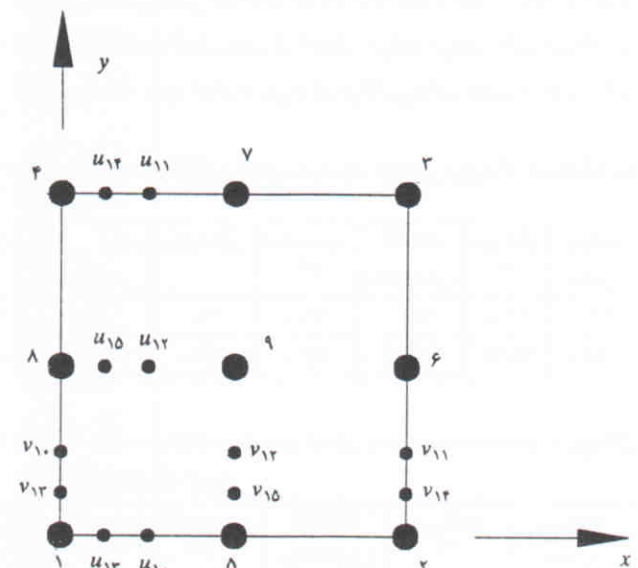
Qian و Hao, Xiao با نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی بالا تحلیل ارتعاشی صفحات مرکب چندلایه‌ی مستطیلی را به‌روش اجزاء محدود بررسی و نتایج خوبی به دست آوردند. مقایسه‌ی آنها در جداول مختلف و متنوع گویای کار خوب و دقت نظرشان است. استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل کوچک در تحلیل، ضعف این تحقیق است. [۵]

Chang و Chorg Shiau تأثیر نیروهای برشی در ارتعاش صفحات چند لایه به روش اجزاء محدود را بررسی کردند. از آنجا که آنها از اثر ماند (اینرسی) دورانی در معادلات صرف‌نظر کرده بودند، جواب‌های به دست آمده برای صفحات ضخیم به‌میزان  $2/89$  درصد با جواب‌های دقیق اختلاف داشت. این اختلاف با افزایش ضخامت صفحه و بالا رفتن حالت‌های ارتعاشی افزایش می‌یابد. هرچند روش آنها از دقت خوبی برخوردار نبود، اما زمان کمی برای تحلیل نیاز داشت. [۶]

Jiang, Koko و Olson نیز در تحلیل دینامیکی و غیرخطی صفحات تقویتی با سوپرالمان زحمت فراوانی متحمل شدند و اساس سوپرالمان را مطرح کردند. [۷-۱۰]

### مدل‌سازی صفحات توسط سوپرالمان

اساس سوپرالمان و مدل‌سازی المان توسط Olson و Koko ارائه شده است. [۸-۹] شکل ۱ سوپرالمان صفحه را نشان می‌دهد. میدان جابه‌جایی المان صفحه با ۵۵ درجه‌ی آزادی (۵۵DOF) چنین است: [۸]



شکل ۱. سوپرالمان صفحه. [۸]

که از حل مقادیر ویژه‌ی آن، فرکانس طبیعی صفحه به دست می‌آید.

### مثال‌های عددی

در این قسمت با استفاده از روش سوپرالمان فرکانس طبیعی ارتعاش صفحات همسانگرد (ایزوتروپیک)<sup>۱</sup>، دوسانگرد (ارتوتروپیک)<sup>۲</sup> و مرکب<sup>۳</sup> چندلایه به دست می‌آید و با جواب‌های تحلیلی و نرم‌افزار ANSYS مقایسه می‌شوند. در تحلیل با سوپرالمان تنها از یک سوپرالمان استفاده شده است. تحلیل در نرم‌افزار ANSYS با المان SHELL۶۳ انجام شده است.

تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مربع‌شکل همسانگرد با تکیه‌گاه ساده با استفاده از یک سوپرالمان صفحه‌ی مربع‌شکل همسانگرد با تکیه‌گاه ساده مدل‌سازی شده و نتایج برحسب فرکانس طبیعی بدون بعد به دست آمده است.<sup>[۷]</sup>

$$\lambda = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D \pi^4}$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی صفحه،  $a$  طول ضلع مربع و  $D$  سختی خمشی صفحه‌ی  $[12(1-\nu^2) / Eh^3]$  و  $\nu$  ضریب پواسون است. در جدول ۱ مقایسه‌ی این روش‌های مختلف آمده است.

تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مربع‌شکل همسانگرد با تکیه‌گاه گیردار مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بی‌بعد با استفاده از سوپرالمان، اجزاء محدود و نرم‌افزار ANSYS در جدول ۲ آمده است.

استفاده از یک المان در تحلیل می‌تواند جواب‌های خوبی از فرکانس طبیعی اصلی صفحه‌ی گیردار ارائه دهد و تنها ۷ درجه آزادی از ۵۵ درجه آزادی المان پس از اعمال شرایط مرزی باقی می‌ماند. با افزایش تعداد سوپرالمان‌ها می‌توان فرکانس‌های بعدی ارتعاش را به

جدول ۱. مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه‌ی مربع‌شکل همسانگرد با تکیه‌گاه ساده.

| روش         | روشن تحلیلی | اجزاء محدود | ANSYS           | سوپرالمان | سوپرالمان |
|-------------|-------------|-------------|-----------------|-----------|-----------|
| مُد ارتعاشی | [۷]         | [۷]         | (با ۱۶۲۵ المان) | [۷]       | (حاضر)    |
| مُد اول     | ۴/۰         | ۴/۰۰        | ۴/۰۰            | ۴/۰۰      | ۴/۰۰      |
| مُد دوم     | ۲۵/۰۰       | ۲۵/۰۰       | ۲۴/۹۶           | ۲۵/۳۸     | ۲۵/۳۸     |

جدول ۲. مقایسه‌ی فرکانس طبیعی اصلی بدون بعد صفحه‌ی مربع‌شکل همسانگرد با تکیه‌گاه گیردار.

| روش   | اجزاء محدود | ANSYS           | سوپرالمان | سوپرالمان |
|-------|-------------|-----------------|-----------|-----------|
| [۷]   | [۷]         | (با ۱۶۲۵ المان) | [۷]       | (حاضر)    |
| ۱۳/۴۰ | ۱۳/۲۶       | ۱۳/۲۷           | ۱۳/۲۹     | ۱۳/۲۹     |

و  $\sin(4\pi n)$  مناسب برای تکیه‌گاه گیردار است.<sup>[۸]</sup>

جابه‌جایی‌های صفحه‌ی  $(u, v)$  از نوع  $C$  و جابه‌جایی خمشی  $w$  از نوع  $C^1$  است. معادله‌ی جابه‌جایی  $u$  دارای ۱۵ درجه آزادی، معادله‌ی جابه‌جایی  $v$  دارای ۱۵ درجه آزادی و معادله‌ی جابه‌جایی  $w$  دارای ۲۵ درجه آزادی است که برای سوپرالمان جمعاً ۵۵ درجه آزادی به دست می‌آید.

### معادلات انرژی

انرژی کرنشی صفحات مرکب متقارن (cross-ply) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [A_{11} u_{,x}^2 + 2A_{12} u_{,x} v_{,y} + A_{22} v_{,y}^2 + A_{66} (u_{,y} + v_{,x})^2 + D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4D_{66} w_{,xy}^2] dx dy = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} \quad (2)$$

که در آن  $x$ ،  $y$  (مشتق جزئی نسبت به  $x$  است و ضرایب مربوط به لایه‌ها عبارت است از:<sup>[۱]</sup>) درایه‌های ماتریس کششی

$$A_{ij} = A_{ji} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

$$D_{ij} = D_{ji} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

درایه‌های ماتریس خمشی

که در آن  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  ماتریس سختی انتقال یافته‌ی لایه‌ی  $k$ ام،  $N$  تعداد لایه‌ها،  $z_k$  فاصله‌ی لایه‌ی  $k$ ام تا سطح میانی صفحه است.  $\{q\}$  بردار جابه‌جایی درجات آزادی است و  $[k]$  ماتریس سختی سوپرالمان است. انرژی جنبشی صفحه را به صورت زیر می‌نویسند:<sup>[۷]</sup>

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx dy = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\} \quad (3)$$

که در آن  $h$  ضخامت صفحه،  $\rho$  چگالی و  $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$  سرعت در جهت‌های  $(x, y, z)$  است.  $\{\dot{q}\}$  بردار سرعت درجات آزادی و  $[m]$  ماتریس جرم سوپرالمان است. با استفاده از ماتریس سختی و ماتریس جرم به دست آمده معادله‌ی حاکم بر ارتعاش آزاد صفحه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[m] \{\ddot{q}\} + [k] \{q\} = 0 \quad (4)$$

از آنجا که سیستم بدون میرایی است می‌توان پاسخ آن را به صورت هماهنگ (هارمونیک) در نظر گرفت و رابطه‌ی زیر را به دست آورد:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{q\} = 0 \quad (5)$$



جدول ۴. مقایسه‌ی روش‌های مختلف برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد اصلی به دست آمده از روش‌های مختلف برای صفحه‌ی مستطیل شکل دوسانگرد با تکیه‌گاه گیردار.

| سوپرالمان<br>(یک‌المان) | ANSYS<br>(با ۴۰۰ المان) | تفاضل محدود <sup>[۱۱]</sup> | روش<br>نسبت a/b |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------|
| ۳/۳۳                    | ۳/۳۰                    | ۳/۰۴                        | ۲/۵             |
| ۵/۹۸                    | ۵/۹۳                    | ۵/۴۳                        | ۱/۵             |
| ۱۵/۹۵                   | ۱۵/۹۷                   | ۱۴/۵۱                       | ۱               |
| ۶۱/۵۹                   | ۶۱/۰۵                   | ۵۶/۲۶                       | ۲/۳             |
| ۳۸۸/۸۲                  | ۳۸۰/۳۹                  | ۳۸۸/۵۵                      | ۰/۴             |

فرکانس طبیعی بدون بعد، تابعی از ابعاد صفحه‌ی  $b/a$  و خواص مکانیکی است که می‌توان آن را چنین نمایش داد:

$$\lambda = f_1 \left[ \frac{b}{a}, \frac{D_{22}}{D}, \frac{D_{11}}{D} \right]$$

مقایسه‌ی بین فرکانس طبیعی بدون بعد در جدول ۴ آمده است. لازم به ذکر است که در مقاله‌ی Chen<sup>[۱۱]</sup> با استفاده از یک شبکه‌ی  $10 \times 10$  جواب‌های تفاضل محدود به دست آمده است.

تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مربع شکل مرکب با تکیه‌گاه ساده صفحه‌ی مربع شکل مرکب متقارن "Cross Ply" سه‌لایه  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  با ضخامت یکسان لایه‌ها را در نظر بگیرید. مشخصات مکانیکی ماده‌ی سازنده‌ی صفحه به صورت زیر است:

ماده‌ی ۱

$$E_1 = 25E_2$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$$

$$G_{23} = 0.2E_2$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

تکیه‌گاه صفحه ساده و از نوع SS-۱ است. فرکانس طبیعی به صورت زیر بی‌بعد شده است:<sup>[۱]</sup>

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_n a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

که در آن  $\bar{\omega}$  فرکانس طبیعی بدون بعد و  $\omega$  فرکانس طبیعی صفحه است. نسبت ضلع صفحه‌ی مربع به ضخامت آن  $a/h = 100$  در نظر گرفته شده است. در جدول ۵ مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد این صفحه با روش‌های مختلف ارائه شده است.

تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مرکب مربع شکل با تکیه‌گاه ساده صفحه‌ی مربع شکل مرکب ده‌لایه‌ی  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  را در نظر

جدول ۳. مقایسه‌ی روش‌های مختلف برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه‌ی مربع شکل گیردار.

| سوپرالمان<br>(با ۴۰۰ المان) | ANSYS<br>(با ۴۰۰ المان) | سوپرالمان<br>(با ۱۱ المان) | سوپرالمان<br>(با ۲۲ المان) | سوپرالمان<br>(با ۱۱۱ المان) | روش<br>مود ارتعاشی |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------------|
| ۱۳/۳۱                       | ۱۳/۲۵                   | ۱۳/۳۹                      | ۱۳/۳۵                      | ۱۳/۳۱                       | مود اول            |
| ۵۵/۴۴                       | ۵۵/۰۱                   | ۶۶/۳*                      | ۵۵/۷۹                      | ۵۵/۴۴                       | مود دوم            |
| ۵۵/۴۴                       | ۵۵/۰۱                   | ۱۵۸/۶*                     |                            | ۵۵/۴۴                       | مود سوم            |
| ۱۲۰/۷۷                      | ۱۱۹/۰۴                  |                            |                            | ۱۲۰/۷۷                      | مود چهارم          |
| ۱۵۷/۲۹                      | ۱۵۶/۰۸                  |                            |                            | ۱۵۷/۲۹                      | مود پنجم           |
| ۱۵۷/۲۹                      | ۱۵۶/۰۸                  |                            |                            | ۱۵۷/۲۹                      | مود ششم            |
| ۱۸۷/۸۸                      | ۱۷۶/۵۵                  |                            |                            | ۱۸۷/۸۸                      | مود هفتم           |
| ۱۸۹/۱۸                      | ۱۷۸/۳۴                  |                            |                            | ۱۸۹/۱۸                      | مود هشتم           |
| ۲۲۲/۵                       | ۲۲۲/۶                   |                            |                            | ۲۲۲/۵                       | مود نهم            |

\* جواب‌های غیر قابل قبول

دست آورد. در جدول ۳ مقایسه‌ی بین فرکانس طبیعی بدون بعد صفحه‌ی مربع شکل گیردار همسان‌گرد آورده شده است. تنها در این جدول از چند سوپرالمان به منظور تحلیل استفاده شده است.

تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مستطیل شکل دوسانگرد با تکیه‌گاه گیردار

اکنون حالت خاص صفحات دوسانگرد مستطیل شکل  $D_{11}/D = 0.5$  و  $D_{22}/D = 2$  بررسی خواهد شد و جواب‌های به دست آمده از سوپرالمان با نتایج ANSYS و تفاضل محدود<sup>۴</sup> مقایسه خواهند شد. در صفحات دوسانگرد ماتریس [A] و ماتریس [D] از رابطه‌ی کلی ارائه شده به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$A_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{12} = \frac{E_2 \nu_{12} h}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

$$A_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{66} = G_{12} h$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12}$$

$$D = D_{12} + 2D_{66}$$

جدول ۵. مقایسه‌ی فرکانس طبیعی بدون بعد برای صفحه‌ی مرکب [°/۹۰°/۰°] با تکیه‌گاه ساده ۱-SS.

| سوپرالمان | ANSYS<br>(یک‌المان) | نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول با اینرسی دورانی<br>$K = 5/6^{[۱]}$ | نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول با اینرسی دورانی<br>$K = 1^{[۱]}$ | نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول با اینرسی دورانی<br>$K = 5/6^{[۱]}$ | نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول بدون اینرسی دورانی<br>$K = 1^{[۱]}$ | نظریه‌ی کلاسیک با اینرسی دورانی | نظریه‌ی کلاسیک بدون اینرسی دورانی | روش<br>مود |
|-----------|---------------------|--|--|--|--|---------------------------------|-----------------------------------|------------|
| ۱۵/۴۶۸    | ۱۵/۱۸۴              | ۱۵/۱۸۳   | ۱۵/۱۹۱   | ۱۵/۱۵۸   | ۱۵/۱۹۲   | ۱۵/۲۲۷                          | ۱۵/۲۲۸                            | اول        |
| ۲۳/۴۶     | ۲۲/۸۲۲              | ۲۲/۸۱۷   | ۲۲/۸۲۷   | ۲۲/۸۲۲   | ۲۲/۸۳۱   | ۲۲/۸۷۳                          | ۲۲/۸۷۷                            | دوم        |

k ضریب تصحیح برش است.

جدول ۶. مقایسه‌ی فرکانس طبیعی اصلی صفحه‌ی مرکب

[°/۹۰°/۰°/۹۰°/۰°]s مربع‌شکل با تکیه‌گاه گیردار برحسب مرکز.

| روش<br>(با ۹۰۰ المان) | ANSYS<br>(با ۹۰۰ المان) | پاسخ تحلیلی<br>نظریه‌ی برشی<br>مرتبه‌ی اول [۱۲] | سوپرالمان [۱۲]<br>(یک‌المان) | پاسخ نظریه‌ی<br>کلاسیک [۱۳] |
|-----------------------|-------------------------|---|------------------------------|-----------------------------|
| فرکانس<br>طبیعی (Hz)  | ۳۰۲/۸                   | ۳۰۲/۶۹۸   | ۳۰۳/۱۱۶                      | ۳۰۳/۰۸                      |

بگیرید. طول هر ضلع مربع ۰/۲ متر و ضخامت کل ۰/۰۰۲۶۹ متر است. ضخامت هر ده لایه با هم برابر است. صفحه از ماده‌ی CFRP ۳۰۰/۹۳۴/T با خواص مکانیکی زیر ساخته شده است:

#### ماده‌ی ۲

$$E_1 = 120 \text{ Gpa}$$

$$E_2 = 7/9 \text{ Gpa}$$

$$G_{12} = 5/5 \text{ Gpa}$$

$$\nu_{12} = 0/33$$

$$\rho = 1580 \text{ kg/m}^3$$

لازم به توضیح است که پاسخ تحلیلی این مسئله با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول و استفاده از سوپرالمان با اصل کار مجازی قابل دسترسی است. [۱۲، ۱۳] در جدول ۶ مقایسه‌ی فرکانس‌های اصلی با روش‌های مختلف ارائه شده است.

جدول فوق مقایسه‌ی خوبی بین روش‌های مختلف فرکانس طبیعی اصلی را ارائه می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود جواب‌های نظریه‌ی کلاسیک به کاررفته در تحلیل ارتعاشی به کمک سوپرالمان بیشتر از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول است و این موضوع از آنجا نشأت می‌گیرد که در نظریه‌ی کلاسیک از تنش برشی صرف‌نظر می‌شود. جواب‌های به دست آمده این موضوع را به وضوح نشان می‌دهد.

#### نتیجه‌گیری

در این نوشتار مدل‌سازی اجزاء محدود سوپرالمان برای تحلیل ارتعاشی صفحات مربع‌شکل و مستطیل‌شکل همسان‌گرد، دوسانگرد و

مرکب به دست آمد. در این تحلیل از مدل‌سازی کلاسیک صفحات استفاده شد. مقایسه‌ی جواب‌های به دست آمده از روش اجزاء محدود نشان می‌دهد که روش سوپرالمان روشی قوی در تحلیل دینامیکی صفحات مرکب است.

تحلیل ارتعاشی صفحات به کمک سوپرالمان برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی اصلی در ۱/۳ زمان محاسبه‌ی فرکانس با استفاده از نرم‌افزار ANSYS (که به‌عنوان روش اجزاء محدود قوی با استفاده از المان‌های متعارف اجزاء محدود است) به دست آمده که نشانگر توانایی مدل‌سازی توسط سوپرالمان است.

تنها استفاده از یک سوپرالمان قادر است پاسخ‌های قابل قبولی از فرکانس طبیعی اصلی صفحات مرکب با تکیه‌گاه‌های مختلف ارائه کند و این بیانگر قابلیت روش سوپرالمان در تحلیل سازه‌ها در مراحل مقدماتی طراحی است که کاهش محاسبات و تکرار محاسبات از اصول طراحی بهینه در مراحل طراحی است.

#### پانوشته‌ها

1. isotropic
2. orthotropic
3. composites
4. finite difference

#### منابع

1. J.N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis", CRC Press (1997).
2. O.O. Ochoa, J.N. Reddy, "Finite Element Analysis of Composite Laminates", Kluwer Academic Publishers (1992).
3. C.P. WU, W.Y. Chen, "Vibration and Stability of Laminated Plates Based on a Local High Order Theory", Journal of Sound and Vibration, 177(4), pp. 503-520 (1994).
4. Mallikariuna, T. Kant, "Free Vibration of Symmetrically Laminated Plates Using a Higher-Order Theory With Finite Element Technique", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, pp. 1875-1889 (1989).
5. G.L.Qian, S.V. Hoa, X. Xiao, "A New Rectangular Plate Element for Vibration Analysis of Laminated Composites", Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 120, pp. 80-85 (1998).
6. Le-Chung Shiau, Jing-Tang Chang, "Transverse Shear Effects on Vibration of Laminated Plate Using Higher Order Plate Element", Computers & Structures, 39(6), pp. 735-740 (1991).

7. T.S. Koko, M.D. Olson, "Vibration Analysis of Stiffened Plates by Super Elements", *Journal of Sound and Vibration*, **158**(1), pp. 149-167 (1992).

8. T.S. Koko, M.D. Olson, "Non-Linear Analysis of Stiffened Plates Using Super Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, pp. 319-343 (1991).

9. T.S. Koko, M.D. Olson, "Non-Linear Transient Response of Stiffened Plates to Air Blast Loading by Super Element Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **90**, pp. 737-760 (1991).

10. J. Jiang, M.D. Olson, "A Super Element Method for Non-Linear Analysis of Stiffened Box Structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, pp. 2203-2217 (1993).

11. Y.Z. Chen, "Evaluation of Fundamental Vibration Frequency of an Orthotropic Bending Plate by Using an Iterative Approach", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **161**, pp. 289-296 (1998).

12. R. Vaziri, X. Quan, M.D. Olson, "Impact Analysis of Laminated Composite Plates and Shells by Super Finite Element", *International Journal of Impact Engineering*, **18**(7-8), pp. 765-782 (1996).

13. J. Whitney, "Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates", TECHNOMIC Publishing, CO., Inc, (1987).

### پیوست

$$N_{\nu}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\lambda}^u = L_{\lambda}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\alpha}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\alpha}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{11}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta),$$

$$N_{1\gamma}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta),$$

$$N_{1\gamma}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{1\delta}^u = \sin(\gamma\pi\xi)L_{\nu}(\eta),$$

$$N_i^v = N_i^u \quad \text{for } i \leq 9$$

$$N_{1\alpha}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta), \quad N_{11}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta),$$

$$N_{1\gamma}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta), \quad N_{1\gamma}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta),$$

$$N_{1\gamma}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta), \quad N_{1\delta}^v = L_{\nu}(\xi)\sin(\gamma\pi\eta),$$

$$N_{11}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\delta}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\alpha}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{11}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\delta}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = \phi(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\delta}^w = \phi(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\alpha}^w = H_{\nu}(\xi)\phi(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)\phi(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = \phi(\xi)H_{\nu}(\eta)$$

$$N_{1\gamma}^w = \phi(\xi)H_{\nu}(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)\phi(\eta), \quad N_{1\gamma}^w = H_{\nu}(\xi)\phi(\eta)$$

$$N_{1\gamma}^w = \phi(\xi)\phi(\eta)$$

● چندجمله‌یی‌های لاگرانژ درجه دوم:

$$L_{\nu}(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$$

$$L_{\nu}(\xi) = 2\xi^2 - \xi$$

$$L_{\nu}(\xi) = 2(\xi - \xi^2)$$

● چندجمله‌یی‌های هرmites درجه سوم:

$$H_{\nu}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$H_{\nu}(\xi) = a(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$$

$$H_{\nu}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$H_{\nu}(\xi) = a(-\xi^2 + \xi^3)$$

● مود ارتعاشی تیر دوسرگیردار:

$$\phi(\xi) = [\alpha(\sin h\beta\xi - \sin \beta\xi) + (\cos h\beta\xi - \cos \beta\xi)] / A$$

$$\beta = 4/\sqrt{3} \cdot 0.4 \cdot 0.7448$$

$$A = \alpha(\sinh \cdot / \Delta\beta - \sin \cdot / \Delta\beta) + (\cosh \cdot / \Delta\beta - \cos \cdot / \Delta\beta)$$

$$\alpha = \frac{\cos \beta - \cos h\beta}{\sin h\beta - \sin \beta}$$

● توابع شکل:

$$N_{\nu}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\nu}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\nu}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta)$$

$$N_{\nu}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\delta}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta), \quad N_{\gamma}^u = L_{\nu}(\xi)L_{\nu}(\eta)$$