

به کارگیری روش گالرکین بدون المان در فرمول‌بندی مسائل مکانیک شکست

محمد حسین کارگر نوین (دانشیار)
حمید اختراعی طوسی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

روش گالرکین بدون المان (EFGM) روشی عددی است که مانند روش اجزاء محدود متکی بر شکل تغییراتی معادلات حاکم بر یک سیستم است. این روش نیازی به المان‌بندی ندارد و فقط لازم است تعدادی نقطه به‌عنوان گره در ناحیه‌ی حل در نظر گرفته شود. این روش که طی کمتر از یک دهه‌ی اخیر توسعه یافته، عمدتاً در حل مسائلی کاربرد دارد که در تحلیل وضعیتی خاص وجود دارد. به‌طور مثال در مسائل مکانیک شکست چنین وضعیتی در اطراف نوک ترک پدید می‌آید.

در این مقاله ضمن مرور تحولات ایجاد شده در این روش در طول یک دوره‌ی شش‌ساله از زمان نام‌گذاری تحت عنوان EFGM تاکنون، جزئیات آن شامل فرمول‌بندی، نقاط قوت و ضعف، دقت و موارد کاربرد آن بررسی شده است.

مقدمه

اختصاص داده شده است. سپس شکل تغییراتی معادلات تعادل را جداسازی می‌کنیم. در یک بخش مجزا، نحوه‌ی پرداختن به شرایط مرزی اجباری مورد بحث قرار می‌گیرد. بیشترین مقالات منتشر شده در زمینه‌ی EFGM مربوط به مکانیک شکست است. به‌طور مثال برخی از مقالات نمونه‌هایی از کاربرد EFGM در مکانیک شکست را ارائه کرده‌اند. [۴-۹] دلیل این امر، علاوه بر بی‌نیازی به شبکه‌بندی و دقت روش، سهولت مدل‌سازی ترک در EFGM است. لذا بخشی را به بررسی این موضوع اختصاص داده‌ایم.

تابع شکل در روش EFGM

ممکن است تفاوت اصلی میان EFGM و FEM ناشی از تفاوت بین مفاهیم تقریب و میان‌یابی باشد. تابعی را در نظر بگیرید که انتظار می‌رود یک توزیع پیوسته داشته باشد. فرض کنید تنها در تعداد کمی از نقاط به نام «نقطه‌ی پایه»، مقدار این تابع داده شده باشد. در این صورت به کمک ریاضیات می‌توان این ناپیوستگی را با تولید تابعی مناسب رفع کرد. اگر قید شده باشد که تابع تولید شده از مقادیر پایه بگذرد، نتیجه را یک «میان‌یابی» می‌گویند؛ و اگر تولید یک تابع هنجار در میان مقادیر پایه مورد نظر باشد، غالباً نتیجه را «تقریب» می‌نامند.

در روش اجزاء محدود، ناحیه‌ی حل را به قطعاتی با هندسه‌ی ساده‌تر تفکیک می‌کنیم. در هر منطقه در تعدادی از نقاط پایه مقادیری

روش اجزاء محدود برای حل مسائل مختلف علوم و مهندسی گسترش فراوان یافته است. براساس این روش صدها برنامه‌ی جامع برای پرداختن به موضوعات مختلف طراحی شده است. با این وجود این روش از نقاط ضعفی برخوردار است. یکی از نقاط ضعف این روش، لزوم شبکه‌بندی میدان تحلیل است که در هندسه‌های پیچیده این روش را کاملاً ناتوان می‌سازد. ضعف دیگر روش اجزاء محدود در مواردی است که در حوزه‌ی تحلیل، نقاط منفردی نمایان می‌شود که در آنها تغییرات شدیدی در پاسخ‌ها ایجاد می‌شود. نمونه‌ی برجسته‌ی این وضعیت، تحلیل ترک در مکانیک جامدات است. روش گالرکین بدون المان (EFGM)، با قابلیت‌هایی که تشریح خواهد شد، بر این دو مشکل فائق آمده است.

در نوشتارهای متعدد می‌توان اقدامات اولیه به‌منظور نام‌گذاری و معرفی روش گالرکین بدون المان [۱]، تعمیم این روش [۲] و نوآوری‌هایی در بخش اصلی آن [۳] را مشاهده کرد. در این نوشتارها کاربرد توابع حداقل مربعات متحرک (MLS) در تولید سطح بررسی شده است. EFGM از زمان انتشار نخستین مقاله همچنان در حال توسعه بوده است. در بخش‌های بعدی ضمن تشریح ساختار این روش، به تحولات آن نیز اشاره می‌شود.

در این مقاله ابتدا ساختار تابع شکل در روش‌های EFGM و FEM مقایسه می‌شود. به‌دلیل اهمیت توابع وزن، بخشی نیز به این موضوع

می‌شود که $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ است.

$$A(X)a(X) = B(X)U \quad (9)$$

در رابطه‌ی ۹، $A(X)$ و $B(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(X) = \sum_{I=1}^n w(X-X_I)P(X_I)P^T(X_I) \quad (10)$$

$$B(X) = [b_1(X), b_2(X), \dots, b_n(X)] \quad (11)$$

که n نماینده‌ی تعداد گره‌هاست و $b_1(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b_1(X) = w(X-X_I)P(X_I) \quad (12)$$

حال اگر $a(X)$ را از رابطه‌ی ۹ استخراج کنیم و در رابطه‌ی ۵ قرار

دهیم تابع تقریب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U^h(X) = \sum_{I=1}^n \phi_I(X)u_I \quad (13)$$

که در آن رابطه داریم:

$$\phi_I(X) = P^T(X)A^{-1}(X)b_I(X) \quad (14)$$

$\phi_I(X)$ مانند روش اجزاء محدود تابع شکل نامیده می‌شود. u_I ها

مقادیر گره‌یی در نقاط X_I هستند. هنگام قرار دادن تابع تقریب در یک

اصل تغییراتی، غالباً لازم است عملیات مشتق‌گیری انجام شود.

مشتق‌گیری از تابع شکل نیز با استفاده از رابطه‌ی ۱۵ آسان‌تر شده

است: [۱]

$$A_i^{-1} = -A^{-1}A_iA^{-1} \quad (15)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ی بالا می‌توان همزمان از طرفین

معادله‌ی $A^{-1} = A^{-1}AA^{-1}$ مشتق‌گیری کرد. به منظور اجتناب از انجام

این محاسبات طولانی، در ادامه به روش دیگری اشاره خواهد شد.

تابع وزن

تابع وزن که از طریق رابطه‌ی ۶ وارد فرمول‌بندی مسئله شده است،

تأثیر تعیین‌کننده‌یی در پاسخ‌های مسئله دارد. به طوری که در بعضی

موارد حتی با اندکی تغییر در دامنه‌ی تأثیر و یا شکل تابع وزن کاملاً از

مسیر جواب منحرف می‌شویم. در واقع می‌توان از این خصوصیت

به عنوان یکی از نقاط ضعف روش نام برد. با توجه به این که خاصیت

پیوستگی تابع وزن عیناً به تابع شکل و از آن نیز به تابع تقریب (پاسخ

عددی) منتقل می‌شود، تابع وزن حتی الامکان باید از مرتبه‌ی پیوستگی

بالاتری برخوردار باشد. در زیر دو نمونه از رایج‌ترین توابع وزن که در

مقالات مختلف به کار رفته معرفی شده است.

تابع وزن نمایی

این تابع در برخی از مقالات به عنوان تابع وزن به کار رفته و در فاصله‌ی

را به عنوان مجهولات اصلی در نظر می‌گیریم و در فاصله‌ی میان نقاط

پایه با انتخاب یک روش مناسب اقدام به ایجاد تابع میان‌یابی می‌کنیم.

با افزایش تعداد نقاط پایه، تابع میان‌یابی پیچیده‌تر می‌شود.

در روش EFGM تمام میدان حل یک المان محسوب می‌شود. اما

چون تعداد نقاط پایه خیلی زیادند، با انتخاب معیاری مناسب تابع

تقریب از میان مقادیر پایه‌یی عبور داده می‌شود. در روش حداقل

مربعات، معیار بهترین تخمین به حداقل رسیدن مربعات خطای تابع

تقریب در نقاط پایه است. اکنون روش استخراج تابع شکل بر پایه‌ی

حداقل‌سازی خطا تشریح می‌شود:

فرض می‌کنیم $p_j(x)$ تعداد m یک جمله‌یی در مختصات فضایی

$X^T = (x, y)$ باشد، به طوری که این مینا کامل محسوب شود. مثلاً در

حالت یک بعدی داشته باشیم:

$$p^T(X) = (1, x, x^2, \dots, x^m) \quad (1)$$

و در حالت دوبعدی:

$$p^T(X) = (1, x, y) \quad (2) \text{ پایه‌ی خطی:}$$

$$p^T(X) = (1, x, y, x^2, xy, y^2) \quad (3) \text{ پایه‌ی مربعی:}$$

$$p^T(X) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3) \quad (4) \text{ پایه‌ی مکعبی:}$$

در روش MLS تابع $U^h(X)$ به عنوان تقریبی از $U(X)$ به صورت زیر

داده شده است:

$$U^h(X) = \sum_j^m p_j(X)\alpha_j(X) \equiv P^T(X)a(X) \quad (5)$$

در این رابطه $P(X)$ برداری شامل توابع پایه‌یی و $a(X)$ نیز برداری

از ضرایب مجهول و تابع X است. تفاوت روش حداقل مربعات و روش

حداقل مربعات متحرک، در همین ثابت یا متغیر بودن ضرایب $a(X)$

است. این ضرایب با به حداقل رساندن یک معیار غیر پیوسته، به صورت

زیر — شامل تابع وزن نیز هست — به دست می‌آید:

$$J = \sum_I^n w(X-X_I)[P^T(X_I)a(X) - u_I]^2 \quad (6)$$

در این نوشتار، زیرنمایی (اندیس) با حروف بزرگ نمایان‌گر

شمارش نقاط پایه یا گره‌هاست. در رابطه‌ی بالا n تعداد نقاط واقع در

Ω_I است و Ω_I منطقه یا دایره‌ی نفوذ تابع وزن گره I ام است. در منطقه‌ی

Ω_I داریم:

$$w_I(X) = w(X - X_I) \neq 0 \quad (7)$$

همچنین در معادله‌ی ۶، u_I مقدار گره‌یی در $X = X_I$ است و داریم:

$$U^h(X_I) = u_I \quad (8)$$

اعمال روش‌های تغییراتی روی رابطه‌ی ۶ و تحمیل وضعیت

ماندگار برای I ، موجب به دست آمدن رابطه‌ی خطی زیر بین U و $a(X)$

جداسازی

از آنجا که هدف اصلی این نوشتار پرداختن به مسائل محیط جامد متعادل است، شکل ضعیف معادله انتگرالی را برای چنین محیطی، از معادله تعادل نظیرش استخراج می‌کنیم.

روی میدان Ω معادله تعادل به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (23)$$

که در این رابطه \mathbf{b} نیروی حجمی، ∇ علامت گرادیان و σ همان تانسور تنش است. به همراه این معادله شرایط زیر نیز معلوم فرض می‌شود:

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (24)$$

روی مرزی که جابه‌جایی معلوم است.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ و $\bar{\mathbf{t}}$ مقادیر معلوم کشش و جابه‌جایی روی مرزند. اگر به جای مسئله تعادل با مسئله‌ی از نوع دینامیکی سروکار داشتیم آنگاه رابطه‌ی ۲۳ به رابطه‌ی $\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$ تبدیل می‌شد که در آن چگالی و \mathbf{a} شتاب است. در این حالت لازم است شرایط اولیه نیز مشخص شود، مثلاً:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) \quad (26)$$

اگر بخواهیم از روش گالرکین به انتگرال وزین شده برسیم باید ابتدا رابطه‌ی ۲۴ را در یک تابع آزمایش ضرب کنیم و سپس تابع تقریب را از رابطه‌ی ۱۳ در آن جایگزین کنیم. به این ترتیب برای ایجاد انتگرال وزین شده به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{w} \, d\Omega = \mathbf{0} \quad (27)$$

بر اساس قضیه‌ی گرین می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{w} : \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (28)$$

Γ_f بخشی از مرز محیط است که در آن کشش سطحی مشخص شده است. به این ترتیب رابطه‌ی ۲۸ به رابطه‌ی ۲۹ تبدیل می‌شود:

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{w} : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \mathbf{0} \quad (29)$$

در این رابطه ∇_s بخش متقارن گرادیان است و ضرب دو نقطه بین دو تانسور مرتبه‌ی دو به صورت مجموع حاصل ضرب عناصر متناظر تعریف شده است. مثلاً \mathbf{u} چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon \quad (30)$$

در این مرحله، ابتدا در رابطه‌ی ۳۰، σ را به \mathbf{u} مربوط می‌کنیم. برای

شعاعی و بی‌بعد ρ از گره به صورت زیر تعریف شده است: [۸، ۶، ۵]

$$W(\rho) = \frac{e^{-(\beta \cdot \rho)^T} - e^{-\beta^T}}{1 - e^{-\beta^T}} \quad (16)$$

که در این رابطه ρ شعاع عمل نسبی به صورت $\rho = \frac{r}{r_m}$ است. r فاصله‌ی شعاعی و r_m شعاع اثر تابع وزن است. β نیز متغیری است که شکل زنگوله‌یی تابع وزن را تنظیم می‌کند و مثلاً در بعضی از مقالات مقدار آن را برابر ۴ در نظر گرفته‌اند. [۹]

تابع اتصال (spline)

بر اساس این تابع وزن که در برخی از مقالات استفاده شده است، [۱۰، ۷] در فاصله‌ی شعاعی ρ از یک گره چنین داریم:

$$w(\rho) = 1 - 6\rho^2 + 8\rho^3 - 3\rho^4 \quad (17)$$

که در این رابطه، مانند رابطه‌ی ۱۶، ρ شعاع عمل نسبی است.

فاصله‌ی شعاعی r تعبیری نظیر شعاع در مختصات قطبی دارد، اما می‌توان شعاع را به صورت فاصله‌ی در راستای یکی از محورهای دکارتی، و تابع وزن کلی را به صورت ضرب توابع وزن در امتداد هر یک از این محورها در نظر گرفت.

به طور کلی برای محاسبه‌ی ϕ_I و مشتقات آن (یعنی $\phi_{I,i}$) از طریق روابط ۱۴ و ۱۵، باید عملیات ریاضی زیادی انجام داد. روش زیر حجم عملیات را کاهش می‌دهد. [۱۱] با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ داریم:

$$\phi_I(X) = \gamma^T(X) b_I(X) \quad (18)$$

که در آن

$$\gamma^T(X) = P^T(X) A^{-1}(X) \quad (19)$$

و بنابراین

$$A(X) \gamma(X) = P(X) \quad (20)$$

با تجزیه‌ی ماتریس A به اجزاء بالامثلثی U و پائین مثلثی L طی عملیات کوتاه‌تری می‌توان بردار مجهول $\gamma(X)$ را محاسبه کرد. در این صورت با قراردادن $\gamma(X)$ به دست آمده از این عملیات در رابطه‌ی ۱۸ تابع شکل به دست خواهد آمد. برای محاسبه‌ی مشتقات تابع شکل، ابتدا از طرفین رابطه‌ی ۲۰ مشتق می‌گیریم:

$$A_{,i}(X) \gamma(X) + A(X) \gamma_{,i}(X) = P_{,i}(X) \quad (21)$$

و بنابراین

$$A(X) \gamma_{,i}(X) = P_{,i}(X) - A_{,i}(X) \gamma(X) \quad (22)$$

تنها مجهول موجود در این رابطه نیز $\gamma_{,i}(X)$ خواهد بود که با استفاده از ماتریس تجزیه شده‌ی $A = LU$ با تعداد عملیات کمتری می‌توان آن را محاسبه کرد.

آن نخواهیم داشت. به این ترتیب معادله‌ی ۲۹ به صورت زیر کامل می‌شود:

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{u}) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (36)$$

و با قراردادن شکل مجزاشده‌ی \mathbf{u} و λ در رابطه‌ی ۳۶ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (37)$$

که در آن:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T DB_J d\Omega \quad (38)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I N_k d\Gamma \quad (39)$$

$$f_I = \int_{\Gamma} \phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I b d\Omega \quad (40)$$

$$q_k = - \int_{\Gamma_u} N_k \bar{u} d\Gamma \quad (41)$$

و در این روابط:

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & \cdot \\ \cdot & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} N_k & \cdot \\ \cdot & N_k \end{bmatrix} \quad (43)$$

و D برای جسم ارتجاعی ایزوتروپ همگن در حالت تنش صفحه‌یی به صورت زیر است:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

روش اصلاح معادلات

آخرین گام تا این لحظه در گسترش نظری EFGM توجه به این نکته بوده است که λ معنای فیزیکی خاصی دارد. در واقع λ همان کشش

این منظور می‌دانیم:

$$\sigma = \mathbf{D} : \varepsilon \quad (31)$$

$$\varepsilon = \nabla_s \mathbf{u} \quad (32)$$

که در آن \mathbf{D} ماتریس خواص ماده‌ی جامد، σ تنش، ε کرنش و \mathbf{u} تغییر مکان است. سپس با فرض آن که $\delta \mathbf{w} = \delta \mathbf{u}$ و قراردادن شکل مجزاشده‌ی \mathbf{u} در این روابط، شکل ماتریسی معادلات ایجاد می‌شود. اما چنین معادلاتی نمی‌توانند به تنهایی به پاسخ مسئله رهنمون شوند. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، تابع تقریب U^h در روش EFGM تخمینی بین متغیرهای گره‌یی است و بنابراین مقدار آن در هر گره الزاماً برابر با متغیر مربوط به آن گره نخواهد بود. لذا در نقاط مرزی که تابع تقریب باید مقدار مشخصی داشته باشد، یعنی در مرزهایی که شرایط ضروری حاکم است، بدون داشتن ارتباط بین مقادیر تابع تقریب و متغیرهای گره‌یی، اعمال شرط مرزی اجباری میسر نیست.

برای اعمال شرایط مرزی اجباری در این روش چندین ابتکار مختلف به کار رفته است. مثلاً در مواردی، شرایط مرزی به صورت یک دسته معادلات انتگرال وزین شده‌ی اضافه ارائه شده است.^[۴] چگونگی تلفیق روش FEM در روی مرز با روش EFGM در برخی از منابع تشریح شده است،^[۱۲] اما دو روش ضرایب لاگرانژ^[۸،۵،۳] و اصلاح معادلات تغییراتی^[۱۱،۵] که در زیر به معرفی آنها می‌پردازیم - با اقبال بیشتری مواجه شده‌اند.

روش ضرایب لاگرانژ

در این روش پس از استخراج تابع ارائه شده در رابطه‌ی ۲۹، بخش دیگری بدان ضمیمه می‌شود که شرایطی اجباری به صورت $\delta \mathbf{w}_u(\mathbf{u}, \nabla_s \lambda)$ را به مسئله القا خواهد کرد و در آن:

$$\mathbf{w}_u(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (33)$$

و بنابراین

$$\delta \mathbf{w}_u(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \lambda d\Gamma \quad (34)$$

Γ_u بخشی از مرز محیط جامد است که در آن تغییر مکان معلوم است. در مرحله‌ی مجزاسازی نیز λ به نوبه‌ی خود به صورت زیر جداسازی می‌شود:

$$\lambda = N_i \lambda_i \quad (35)$$

N_i (تابع شکل) از خانواده‌ی توابع شناخته شده‌ی لاگرانژی انتخاب می‌شود. بدین ترتیب متغیرهای جدیدی وارد مسئله می‌شوند و چون این اتفاق به موازات افزایش تعداد معادلات روی می‌دهد، توازن مجهولات و معادلات را بر هم نمی‌زند و اساساً نیازی به محاسبه‌ی

انرژی که ذیلاً تعریف شده‌اند، برای ارزیابی دقت روش استفاده شده است. [۱۳]
 معیار جابه‌جایی:

$$\left\{ \int_{\Omega} [u^{Num.} - u^{Exact}]^T [u^{Num.} - u^{Exact}] d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (51)$$

معیار انرژی:

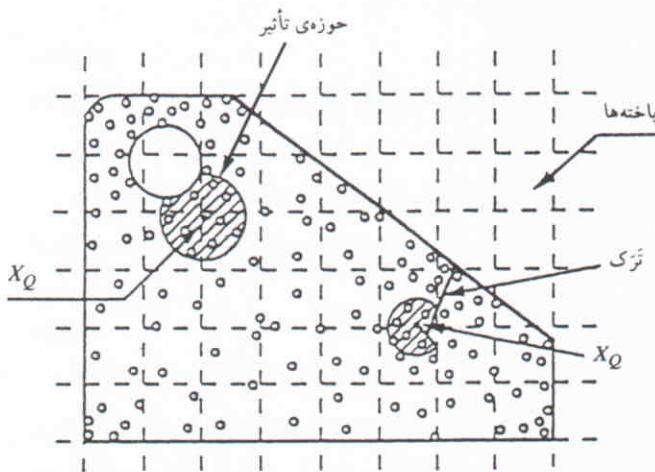
$$\left\{ \int_{\Omega} [\epsilon^{Num.} - \epsilon^{Exact}]^T D [\epsilon^{Num.} - \epsilon^{Exact}] d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

که در این روابط u معرف جابه‌جایی، ϵ کرنش و D ماتریس خواص است.

مسائل مکانیک شکست

بیشترین کاربرد روش EFGM در مسائل مکانیک شکست است [۴-۹] و دلیل آن سهولت مدل‌سازی ترک در این روش است. به منظور بررسی نحوه‌ی مدل‌سازی ترک، ابتدا حوزه‌ی اثر یک تابع وزن تعریف می‌شود.

شعاع عمل تابع وزن در هر گره محدودده‌ی مشخصی از میدان حل است که تابع وزن گره در آن محدوده غیر صفر است. بدیهی است که شعاع عمل یک گره نمی‌تواند تا فراسوی مرزهای جسم ادامه یابد. بنابراین می‌توانیم بگوییم میدان نفوذ تابع وزن توسط مرز بریده می‌شود. این وضعیت در مجاورت یک ترک نیز اتفاق می‌افتد. یعنی در گره‌های مجاور ترک حوزه‌ی عمل به مرز ترک ختم می‌شوند. به این ترتیب اگر در مرحله‌ی برپایی ماتریس‌های A و B در روابط ۱۰ و ۱۱ به حوزه‌ی تأثیر توابع وزن توجه کنیم، وجود ترک در معادلات لحاظ



شکل ۱. حوزه‌ی اثر تابع وزن در دو نقطه‌ی مختلف. [۵]

سطحی روی مرز (\bar{t}) است و چون \bar{t} مانند σ از جنس تنش است می‌توان آن را جداسازی کرد. در این صورت به جای رابطه‌ی ۳۸ رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{u} : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (45)$$

با جایگذاری مقدار مناسب σ و \mathbf{t} برحسب \mathbf{u} به کمک روابط ۳۲ و ۳۳، و سپس جداسازی \mathbf{u} به کمک رابطه‌ی ۱۳ دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$[K]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (46)$$

که مقدار عناصر K و \mathbf{f} به شرح زیر است:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega - \int_{\Gamma_u} \phi_I S N D B_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} B_I^T D^T N^T S \phi_J d\Gamma \quad (47)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_u} B_I^T D^T N^T S \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (48)$$

که در این روابط B و D نظیر روابط ۴۳ و ۴۵ هستند و N و S به صورت زیر خواهند بود:

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (50)$$

مؤلفه‌های ماتریس N بردارهای عمود بر سطح در جهات x و y هستند و مؤلفه‌های ماتریس S به صورت زیر هستند:

— اگر u_x روی Γ_u داده شده باشد: $s_x = 1$ و اگر u_x روی Γ_u داده نشده باشد: $s_x = 0$

— اگر u_y روی Γ_u داده شده باشد: $s_y = 1$ و اگر u_y روی Γ_u داده نشده باشد: $s_y = 0$

هنگام ارزیابی یک روش عددی که خروجی‌های متعددی دارد، مقایسه‌ی برخی از مقادیر خاص و محاسبه شده با مقادیر دقیق نظیرشان نمی‌تواند مبنای داوری باشد. به همین منظور برخی از مؤلفین از روش‌های جامع‌نگر استفاده کرده‌اند. مثلاً از موازن جابه‌جایی و

که در آن r و θ معرف مختصات قطبی نقطه نسبت به رأس ترک هستند.

نتیجه گیری

تحلیل عددی به روش EFG حتی در ساده ترین حالت ها مستلزم انجام محاسبات زیاد در قالب الگوریتم های پیچیده است. اعمال شرایط مرزی از نوع اجباری به دشواری انجام می شود. پاسخ ها شدیداً به نوع و جزئیات شکل تابع وزن حساس اند به طوری که بعضاً دستیابی به پاسخ ها مستلزم سعی و خطاست. با این همه، روش EFG به دلیل توانایی حل مسائل منفرد می تواند در آینده رشد فراگیری داشته باشد. در مکانیک جامدات مهم ترین حوزه برای این روش تحلیل ترک است. به دلیل پیچیدگی دامنه ی تحقیق در زمینه ی مسائل ترک در این نوشتار به معرفی روش بسنده شده است.

خواهد شد. البته برای گره هایی که مجاور نوک ترک قرار دارند تعیین حوزه ی عمل مستلزم فرضیات خاصی است. برای این منظور قاعده یی تحت عنوان معیار دید مستقیم وضع و استفاده شده است؛ به این ترتیب که برای چنین گره هایی حوزه ی عمل مطابق شکل ۱ شامل محدوده یی است که در دید مستقیم هر گره قرار می گیرد.

روش هایی برای افزایش دقت حل ترک برای مواد ارتجاعی ارائه شده است^(۱۱) که تسطیح تابع شکل در گره های مجاور لبه ی ترک و اصلاح بردار پایه ی ارائه شده در روابط ۲ و ۴ را شامل می شود.

$$P^T(X) = [1, x, y, \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{\gamma}), \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{\gamma}), \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{\gamma}) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{\gamma}) \sin(\theta)] \quad (53)$$

پانوشت ها

1. Element Free Galerkin Method
2. Moving Least Squares

منابع

1. Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, **37**, pp. 229-256 (1994).
2. Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element", *Comput. Mech.*, **10**, pp. 307-318 (1992).
3. Laneaster, P., Salkauskas, K., "Surface generated by moving least squares methods", *Math. Comput.*, **37**, pp. 141-158 (1981).
4. Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Tabbara, M., "Element-free Galerkin method for static and dynamic fracture", *Int. J. Solids struct.*, **32**, pp. 2547-2570 (1995).
5. Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., "Crack propagation by element-free Galerkin methods", *Fracture Mech.*, **95**, pp. 295-315 (1995).
6. Belytschko, T., Tabarra, M., "Dynamic fracture using element-free Galerkin methods", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, **39**, pp. 923-938 (1996).
7. Sukumar, N., Moran, B., Black, T. Belytschko, T., "An element-free Galerkin method for three dimensional fracture mechanics", *Comput. Mech.*, **20**, pp. 170-175 (1997).
8. Xu, Y., Saigal, S., "An element-free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid", *Int. J. Solids Struct.*, **154**, pp. 331-343 (1998).
9. Krysl, P. Belytschko, T., "The element free Galerkin method for Dynamics propagation of arbitrary 3-D cracks", *Int. J. Numer. Engrg.*, **44**, pp. 767-800 (1999).
10. Krysl, P., Belytschko, T., "Analysis of thin plates by element-free Galerkin method", *Comput. Mech.*, **17**, pp. 26-35 (1996).
11. Fleming, M, Chu, Y. A., Moran, B., Belytschko, T., "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, **40**, pp. 1483-1504 (1997).
12. Krongauz, T., Belytschko, T., "Enforcement of essential boundary conditions in mesh-less approximations using finite elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **131**, pp. 133-145 (1996).
13. Dolbow, J., Belytschko, T., "Volumetric locking in the element free Galerkin method", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, **46**, pp. 925-942 (1999).