

تعیین سطوح تسلیم متوالی با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی همگرد

برای تغییر شکل‌های بزرگ مواد خمیری سخت‌شونده

رضا نقدآبادی (استادیار)

مهدی یگانه (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

علیرضا سعیدی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار سطوح تسلیم متوالی برای تغییر شکل بزرگ مواد خمیری سخت‌شونده تعیین می‌شود. با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی همگرد ارائه شده توسط مؤلفان، تانسور تنش زمینه^۱ محاسبه می‌شود و سپس بر پایه‌ی معیار تسلیم فون میسز^۲، سطح تسلیم برای مواد با سخت‌شوندگی سینماتیک و سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد در هر مرحله از تغییر شکل به‌دست می‌آید. مشاهده می‌شود که با استفاده از این معادله‌ی مشخصه، سطح تسلیم به‌دست آمده در مسئله‌ی برش ساده مستقل از انتخاب نرخ همگرد^۳ است. در حالت سخت‌شوندگی سینماتیک در مسئله‌ی برش ساده، جهت حرکت مرکز سطح تسلیم در جهت بردار نرخ تنش است. همچنین در حالت سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد، جهت حرکت مرکز سطح تسلیم، با افزایش تغییر شکل بر جهت بردار نرخ تنش منطبق می‌شود.

مقدمه

در نیم قرن گذشته برای بررسی رفتار تسلیم مواد خمیری سخت‌شونده، نظریه‌هایی متعدد با توانایی‌ها و پیچیدگی‌های متنوع، ارائه شده است. اغلب این نظریه‌ها، کار سختی ماده را با استفاده از دو ایده‌ی اصلی تعریف می‌کنند، یکی سخت‌شوندگی همسانگرد و دیگری سخت‌شوندگی سینماتیک.^[۱] در سخت‌شوندگی همسانگرد فرض می‌شود که سطح تسلیم به‌طور یکنواخت در فضای تنش‌ها انبساط پیدا می‌کند. سخت‌شوندگی همسانگرد که اولین بار توسط هیل معرفی شد، قادر به در نظر گرفتن اثر باوشینگر در تعیین سطوح تسلیم متوالی نیست. به‌منظور در نظر گرفتن اثر باوشینگر در تعیین سطح تسلیم، پراگر مفهوم انتقال سطح تسلیم بدون چرخش در فضای تنش‌ها را در قالب مدلی معروف به سخت‌شوندگی سینماتیک، ارائه داد.^[۲]

در تعریف مدل سخت‌شوندگی سینماتیک، لازم است جهت حرکت مرکز سطح تسلیم معین باشد. پراگر حرکت مرکز سطح تسلیم را در جهت قائم بر سطح تسلیم در نقطه‌ی تنش جاری تعیین کرد. زیگلر حرکت مرکز سطح تسلیم را در جهت بردار واصل مرکز سطح تسلیم و نقطه‌ی تنش جاری تعیین کرد. فیلیپس و لی با انجام آزمایش‌هایی، عدم تطابق مدل زیگلر با واقعیت را نشان دادند.^[۳] آنها

با بررسی نتایج حاصل از آزمایش قطعاتی که تحت بارگذاری ترکیبی کشش و پیچش بودند، استنتاج کردند که جهت حرکت مرکز سطح تسلیم بین بردار قائم بر سطح تسلیم و بردار نرخ تنش است. برای یافتن سطوح تسلیم متوالی در تغییر شکل‌های بزرگ، لازم است جهت حرکت مرکز سطح تسلیم با استفاده از معادلات مشخصه‌ی مناسب تعیین شود. از آنجا که در تغییر شکل‌های بزرگ عموماً چرخش‌های صلب‌گونه به وجود می‌آید، برای تعیین رفتار ماده به‌طور مستقل از این چرخش‌ها، لازم است به هنگام استفاده از معادلات مشخصه‌ی مورد نظر، از نرخ‌های همگرد استفاده شود.^[۴] بنابراین استفاده از معادلات مشخصه‌ی همگرد در جامدات، به ویژه در تغییر شکل خمیری مواد از اهمیت بالایی برخوردار است. در تغییر شکل‌های بزرگ خمیری که عموماً روابط بین نرخ‌های تنش و نرخ‌های کرنش است، استفاده از معادلات مشخصه‌ی نرخی عمومیت دارد. در مکانیک جامدات نرخ‌های همگرد مختلفی برای استفاده در این معادلات وجود دارد.

معادله‌ی مشخصه‌ی ارائه شده توسط ننگتال و دجنگ^[۵] نرخ همگرد جاومن تانسور تنش زمینه، α ، که متناظر با چرخش مادی^۴، W ، است را به تانسور نرخ کرنش^۵، D ، ارتباط می‌دهد. با استفاده از این معادله‌ی مشخصه، ننگتال و دجنگ نشان دادند که در تغییر شکل

مختلفی برای رفتار ماده به دست می‌آید که از نظر فیزیکی غیر قابل قبول است. لذا برای ارضاء اصل استقلال رفتار ماده از انتخاب مختصات مرجع، لازم است برای یک مسئله‌ی معین، در صورت استفاده از نرخ‌های همگرد متفاوت جواب یکسان حاصل شود.

کرنش لگاریتمی معرفی شده به وسیله‌ی هنکی یک معیار مطلوب برای کرنش در مسائل مومسانی است.^[۲] با استفاده از نرخ‌های همگرد تانسور کرنش لگاریتمی، معادله‌ی مشخصه‌ی زیر برای مواد خمیری سخت‌شونده معرفی شده است:^[۶]

$$\alpha^{\circ} = \frac{2}{3} h_{\alpha} (\ln V)^{\circ} \quad (2)$$

در رابطه‌ی ۲، α° نشان‌دهنده‌ی نرخ همگرد تانسور تنش زمینه است که چنین تعریف می‌شود:

$$\alpha^{\circ} = \dot{\alpha} - \Lambda \alpha + \alpha \Lambda \quad (3)$$

در رابطه‌ی ۳، Λ تانسور چرخش است که ممکن است جایگزین چرخش مادی (W)، چرخش جسمی (Ω) و یا هر تانسور چرخش دیگری شود. با جایگذاری W به جای Λ رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$\alpha^J = \dot{\alpha} - W\alpha + \alpha W \quad (4)$$

α^J نرخ جاومن تانسور α نامیده می‌شود. $\dot{\alpha}$ مشتق زمانی تانسور α است که بیانگر نرخ زمانی α نسبت به دستگاه مختصات ثابت است. α^J نرخ زمانی از دید ناظر متصل به دستگاه مختصات با چرخش W (J-frame) است.

همچنین می‌توان از دستگاه مختصات دیگری با چرخش متفاوت، برای ساختن نرخ همگرد بهره جست. در یک دستگاه مختصات با چرخش Ω ، نرخ زمانی تانسور تنش زمینه‌ی α را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\alpha^{\Omega} = \dot{\alpha} - \Omega \alpha + \alpha \Omega \quad (5)$$

α^{Ω} نرخ زارمبای تانسور α تعریف می‌شود.^[۸] با استفاده از چرخش اوپلری، Ω^E ، که چرخش جهات اصلی تانسور کشیدگی چپ کوشی می‌باشد، و با استفاده از رابطه‌ی ۳، نرخ همگرد اوپلری تانسور تنش زمینه چنین به دست می‌آید:

$$\alpha^E = \dot{\alpha} - \Omega^E \alpha + \alpha \Omega^E \quad (6)$$

در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، $(\ln V)^{\circ}$ نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی است که به صورت رابطه‌ی ۷ معرفی می‌شود:

$$(\ln V)^{\circ} = (\ln V)^{\cdot} - \Lambda (\ln V) + (\ln V) \Lambda \quad (7)$$

با جایگذاری چرخش جسمی (Ω)، چرخش مادی، W ، یا چرخش اوپلری، Ω^E ، به جای Λ در رابطه‌ی ۷، به ترتیب، نرخ‌های همگرد زارمبا، جاومن و اوپلری تانسور کرنش لگاریتمی به دست

بزرگ مسئله‌ی برش ساده با استفاده از مدل سخت‌شوندگی سینماتیک پراگر-زیگلر، در صورت افزایش کرنش، جوابی نوسانی برای تنش به دست می‌آید.

به منظور تشریح اثر نرخ همگرد در تغییر شکل‌های بزرگ، دافالیاس^[۴] مسئله‌ی برش ساده را با استفاده از دو نرخ همگرد مختلف، برای مواد صلب - خمیری سخت‌شونده^۶ و با استفاده از معیار تسلیم فون میسز در دو حالت سخت‌شوندگی سینماتیک و ترکیبی سینماتیک و همسانگرد حل کرد. معادله‌ی مشخصه‌ی دافالیاس نرخ همگرد زارمبای تانسور تنش زمینه که متناظر با چرخش جسمی^۷، Ω ، است را به تانسور نرخ کرنش ارتباط می‌دهد. با استفاده از این معادله‌ی مشخصه، دافالیاس در مسئله‌ی برش ساده برای تنش، یک جواب غیر نوسانی به دست آورد.

طبق اصل استقلال رفتار ماده از انتخاب مختصات مرجع^۸، مشاهده‌ی ماده از مراجع متفاوت نباید منجر به پیشگویی‌های مختلف برای رفتار آن شود. برای ساختن نرخ همگرد تانسورها، هر یک از تانسورهای چرخش ذکر شده را می‌توان مورد استفاده قرار داد. بنابراین برای ارضاء اصل استقلال رفتار ماده از انتخاب مختصات مرجع، لازم است معادله‌ی مشخصه‌ی نرخ رفتار ماده را به‌طور مستقل از انتخاب نرخ همگرد نشان دهد.

در این نوشتار به منظور یافتن سطوح تسلیم متوالی براساس معیار تسلیم فون میسز، برای مواد خمیری سخت‌شونده از معادله‌ی مشخصه‌ی ارائه شده توسط مؤلفان^[۶] استفاده شده است. معادله‌ی مشخصه‌ی مذکور به‌طور مستقل از مختصات مرجع، نرخ همگرد تانسور تنش زمینه را به نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی مرتبط می‌سازد. سطوح تسلیم متوالی به دست آمده در این روش برای مسئله‌ی برش ساده مستقل از نرخ همگرد است و برای تمام نرخ‌های همگرد، جواب یکسانی به دست می‌آید.

معادله‌ی مشخصه‌ی همگرد

دافالیاس برای بررسی رفتار مواد خمیری سخت‌شونده در تغییر شکل‌های بزرگ براساس معیار تسلیم فون میسز معادله‌ی مشخصه‌ی زیر را ارائه کرد:^[۴]

$$\alpha^{\circ} = \frac{2}{3} h_{\alpha} D \quad (1)$$

α تانسور تنش زمینه، h_{α} ضریب سخت‌شوندگی سینماتیک و نماد $(^{\circ})$ نمایانگر نرخ همگرد است.

معادلات مشخصه‌ی تغییر شکل‌های بزرگ خمیری معمولاً برپایه‌ی ارتباط تانسور نرخ کرنش (D) و تانسور تنش یا تنش زمینه استوارند.^[۷،۴] با تغییر نرخ همگرد در این مدل‌ها، جواب‌های

به وسیله ی رابطه ی $n_i = \Omega^E n_i$ با چرخش اویلری در ارتباط اند. با استفاده از رابطه ی ۱۴، مؤلفه های تانسور کشیدگی چپ کوشی چنین به دست می آیند:

$$V_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} \begin{bmatrix} \gamma^2 + 2 & \gamma \\ \gamma & 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

کشیدگی های اصلی λ_1 و λ_2 با استفاده از رابطه ی ۱۵ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\lambda_1 \text{ و } \lambda_2 = \frac{1}{\gamma} (\sqrt{\gamma^2 + 4} \pm \gamma) \quad (16)$$

با فرض مشتق پذیر بودن تانسور F، تانسور گرادیان سرعت با رابطه ی ۱۷ بیان می شود:

$$L = \dot{F} F^{-1} = D + W \quad (17)$$

تانسور نرخ کرنش (D) و تانسور چرخش مادی (W)، به ترتیب، بخش های متقارن و پادمتقارن تانسور گرادیان سرعت، L هستند. با استفاده از قاعده ی مشتق گیری زنجیری برای مؤلفه های گرادیان تغییر شکل و همچنین با توجه به رابطه ی ۱۷، مؤلفه های غیر صفر تانسور نرخ کرنش به صورت زیر به دست می آیند:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \quad (18)$$

همچنین مؤلفه های غیر صفر تانسور چرخش مادی به صورت زیر به دست می آیند:

$$W_{12} = -W_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \quad (19)$$

با توجه به ارتباط تانسور چرخش جسمی، Ω ، و تانسور دوران متعامد، R، به صورت $\Omega = \dot{R} R^T$ ، مؤلفه های غیر صفر تانسور چرخش جسمی چنین است:

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2 + 4} \quad (20)$$

با مشتق گیری از مؤلفه های چرخش متناظر با زاویه ی جهات اصلی، مؤلفه های غیر صفر تانسور چرخش اویلری مطابق رابطه ی ۲۱ به دست می آیند:

$$\Omega_{12}^E = -\Omega_{21}^E = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2 + 4} \quad (21)$$

تانسور کرنش لگاریتمی را می توان در مختصات اصلی به صورت رابطه ی ۲۲ بیان کرد:

$$\ln V = \sum_i \ln \lambda_i n_i \otimes n_i \quad (22)$$

این شکل، نمایش طیفی^{۱۱} نامیده می شود. در رابطه ی ۲۲، λ_i ها کشیدگی های اصلی اند. با استفاده از تعریف تانسور کرنش لگاریتمی و تانسور V، مؤلفه های اصلی تانسور کرنش لگاریتمی به دست

می آید. لازم به ذکر است که در معادله مشخصه ی ۲ نرخ همگرد تانسور تنش زمینه، α مشابه نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی است.

تابع تسلیم

تابع تسلیم فون میسز به شکل زیر نشان داده می شود:

$$f = \frac{\gamma}{\gamma} (s - \alpha) : (s - \alpha) - k^2 = 0 \quad (8)$$

s نمایانگر تانسور تنش انحرافی کوشی^۹، k اندازه ی سطح تسلیم، و نماد (:): نمایانگر ضرب داخلی تانسوری است. با استفاده از قانون سخت شونده گی همسانگرد غیر خطی، k چنین تعریف می شود:^[۴]

$$k = 1 + (k_s - 1) [1 - \exp(-c\bar{\epsilon})] \quad (9)$$

c و k ضرایب سخت شونده گی همسانگرد، و $\bar{\epsilon}$ با انتگرال گیری از $\dot{\epsilon}$ که به صورت رابطه ی ۱۰ تعریف می شود، تعیین می شود:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} D : D} \quad (10)$$

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \dot{\epsilon} dt \quad (11)$$

سینماتیک مسئله ی برش ساده

به عنوان یک کاربرد از معادله ی مشخصه ی ۲، برش ساده ی یک المان مربع به ابعاد واحد در نظر گرفته شده است. این تغییر شکل را می توان به صورت حرکت ذرات از مختصات اولیه، X_i ، به مختصات جاری، x_i ، در قالب رابطه ی ۱۲ بیان کرد:

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \quad x_2 = X_2 \quad (12)$$

در رابطه ی ۱۲، γ تغییر مکان برشی المان است.

مؤلفه های گرادیان تغییر شکل، F_{ij} ، از رابطه ی ۱۳ به دست می آیند:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (13)$$

با توجه به اینکه در یک تغییر شکل واقعی، دترمینان ماتریس گرادیان تغییر شکل مثبت است ($\det F > 0$)، از قضیه ی تجزیه ی قطبی^{۱۰} داریم:

$$F_{ij} = V_{ik} R_{kj} \quad (14)$$

V_{ik} ، مؤلفه های تانسور کشیدگی چپ کوشی (V) و R_{kj} ، مؤلفه های تانسور دوران متعامد (R) هستند. V تانسوری متقارن و مثبت معین است و دارای مقادیر ویژه ی λ_i است، که بیانگر کشیدگی های اصلی اند. جهات اصلی V با بردارهای یکه $\{n_i\}$ نشان داده می شوند که

با استفاده از مؤلفه‌های تانسور نرخ کرنش، رابطه‌ی ۱۸، و نیز با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۱ داریم:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \quad (30)$$

برای بررسی اثر انتخاب نرخ‌های همگرد مرتبط با چرخش‌های مادی، جسمی و اوپلری، به ترتیب، نرخ‌های همگرد، جاومن، زارمبا و اوپلری، در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲ برای حل مسئله‌ی برش ساده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کاربرد مدل ارائه شده در مسئله‌ی برش ساده

با استفاده از نرخ همگرد جاومن در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، و استفاده از رابطه‌ی ۴، داریم:

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} h_{\alpha} (\ln V)^J + W\alpha - \alpha W \quad (31)$$

برای تغییر شکل ۱۲، با قرار دادن مؤلفه‌های نرخ همگرد جاومن تانسور کرنش لگاریتمی رابطه‌ی ۲۸، در رابطه‌ی ۳۱، با فرض صفر بودن تنش در حالت اولیه، معادلات ۳۲ و ۳۳ نتیجه می‌شوند:

$$\alpha'_{11} = \frac{2}{3} \frac{h_a}{e_1^2} [\gamma e_2 - 2e_1(e_2^2 - 2)] + \alpha_{12} = -\alpha'_{22} \quad (32)$$

$$\alpha'_{12} = \frac{2}{3} \frac{h_a}{e_1^2} [2e_2 + \gamma e_1(e_2^2 - 2)] - \alpha_{11} \quad (33)$$

در روابط ۳۲ و ۳۳ از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$\alpha'_{11} = \frac{1}{\gamma} \dot{\alpha}_{11}, \quad \alpha'_{12} = \frac{1}{\gamma} \dot{\alpha}_{12} \quad (34)$$

با حل معادلات ۳۲ و ۳۳، مؤلفه‌های تانسور تنش زمینه با استفاده از نرخ همگرد جاومن به دست می‌آیند.

با به کارگیری نرخ همگرد زارمبا در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، و استفاده از رابطه‌ی ۵، داریم:

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} h_{\alpha} (\ln V)^Z + \Omega \alpha - \alpha \Omega \quad (35)$$

از قرار دادن رابطه‌ی ۲۹ در رابطه‌ی ۳۵، برای تغییر شکل ۱۲ با فرض صفر بودن تنش اولیه، معادلات ۳۶ و ۳۷ حاصل می‌شود:

$$\alpha'_{11} = \frac{2}{3} \frac{h_a}{e_1^2} [\gamma e_2 - 4e_1] + \frac{4}{e_1^2} \alpha_{12} = -\alpha'_{22} \quad (36)$$

$$\alpha'_{12} = \frac{2}{3} \frac{h_a}{e_1^2} [2e_2 + 2\gamma e_1] - \frac{4}{e_1^2} \alpha_{11} \quad (37)$$

با حل معادلات ۳۶ و ۳۷، مؤلفه‌های تانسور تنش زمینه با استفاده از نرخ همگرد زارمبا به دست می‌آیند.

می‌آیند. با انتقال مؤلفه‌های اصلی تانسور کرنش لگاریتمی به مختصات مرجع ثابت، مؤلفه‌های تانسور کرنش لگاریتمی چنین به دست می‌آیند:

$$(\ln V)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} \begin{bmatrix} \lambda_1 \ln \lambda_1 + \lambda_2 \ln \lambda_2 & \ln(\lambda_1/\lambda_2) \\ \ln(\lambda_1/\lambda_2) & \lambda_2 \ln \lambda_1 + \lambda_1 \ln \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه‌ی تانسور کشیدگی چپ کوشی هستند که در رابطه‌ی ۱۶ تعریف شده‌اند.

با استفاده از نرخ زمانی تانسور کرنش لگاریتمی، $(\ln V)^{\cdot}$ ، که به صورت رابطه‌ی ۲۴ است: [۶]

$$(\ln V)^{\cdot} = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] + [\Omega^E(\ln V) - (\ln V)\Omega^E] \quad (24)$$

مؤلفه‌های مشتق زمانی تانسور کرنش لگاریتمی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(\ln V)_{ij}^{\cdot} = \frac{\dot{\gamma}}{e_1^2} \begin{bmatrix} \gamma e_2 + 4e_1 & 2e_2 - 2\gamma e_1 \\ 2e_2 - 2\gamma e_1 & -\gamma e_2 - 4e_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

در رابطه‌ی ۲۵، e_1 و e_2 به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$e_1 = \ln \lambda_1 = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{\gamma^2 + 4} + \gamma) \right] \quad (26)$$

$$e_2 = \sqrt{\gamma^2 + 4} \quad (26)$$

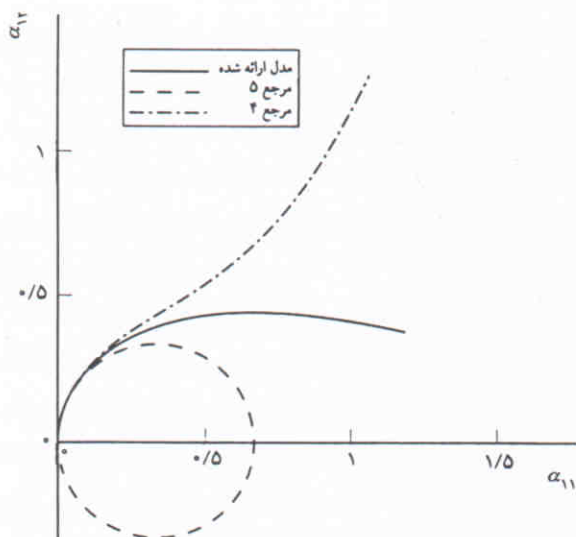
با استفاده از روابط ۷ و ۲۴ و با جایگذاری چرخش اوپلری، به جای ۸، نرخ همگرد اوپلری تانسور کرنش لگاریتمی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\ln V)^E = [D + W - \Omega^E - V(\Omega - \Omega^E)V^{-1}] \quad (27)$$

با توجه به روابط ۲۴ و ۲۷ و با جایگذاری چرخش جسمی و چرخش مادی، به جای ۸ در رابطه‌ی ۷، به ترتیب، نرخ‌های همگرد زارمبا و جاومن تانسور کرنش لگاریتمی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(\ln V)^J = [(\Omega^E - W) \ln V - \ln V (\Omega^E - W)] + (\ln V)^E \quad (28)$$

$$(\ln V)^Z = [(\Omega^E - \Omega) \ln V - \ln V (\Omega^E - \Omega)] + (\ln V)^E \quad (29)$$



شکل ۱. مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی در مسئله‌ی برش ساده.

می‌شود:

$$\vec{r}_\sigma = d\sigma_{11}\hat{i} + d\sigma_{12}\hat{j} \quad (44)$$

نتیجه‌گیری

معادلات مشخصه‌ی موجود برای تعیین رفتار مواد خمیری سخت‌شونده عموماً بر پایه‌ی ارتباط نرخ همگرد تانسور تنش زمینه و تانسور نرخ کرنش استواراند. معادله‌ی مشخصه‌ی به کار رفته در این نوشتار، رابطه‌ی ۲، رفتار مواد خمیری سخت‌شونده را از دیدگاه دیگری مدل‌سازی می‌کند. این معادله‌ی مشخصه، نرخ همگرد تانسور تنش زمینه را به نرخ همگرد تانسور کرنش لگاریتمی ارتباط می‌دهد. بر پایه‌ی این معادله‌ی مشخصه و به منظور یافتن سطوح تسلیم متوالی، مسئله‌ی برش ساده در تغییر شکل بزرگ برای مواد با سخت‌شوندگی سینماتیک و سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد حل شده است.

شکل ۱ مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم به دست آمده با استفاده از نرخ‌های همگرد جاومن، زارمبا و اوپلری در معادله‌ی مشخصه‌ی ارائه شده را نشان می‌دهد. به منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج دیگر مدل‌های موجود، ضریب سخت‌شوندگی سینماتیک ماده‌ی مفروض در این مثال، $h_\alpha = 1$ در نظر گرفته شده است. همچنین مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم برای این مسئله در صورت استفاده از مدل‌های ارائه شده توسط نکتگال و دجنگ، و دافالیاس [۵۴] محاسبه شده و در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ارائه شده توسط نکتگال و دجنگ در تعیین سطوح تسلیم متوالی، جوابی نوسانی با دوره‌ی تناوب 2π نسبت به تغییر مکان برشی به دست

با استفاده از نرخ همگرد اوپلری در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، و استفاده از رابطه‌ی ۶، داریم:

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} h_\alpha (\ln V)^E + \Omega^E \alpha - \alpha \Omega^E \quad (38)$$

برای تغییر شکل ۱۲، با توجه به روابط ۲۷ و ۳۸، با فرض صفر بودن تنش در حالت اولیه، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha'_{11} = \frac{2}{3} h_\alpha \frac{\gamma}{e_\gamma} + \frac{2}{3} \alpha_{12} = -\alpha'_{22} \quad (39)$$

$$\alpha'_{12} = \frac{4}{3} h_\alpha \frac{1}{e_\gamma} - \frac{2}{3} \alpha_{11} \quad (40)$$

با حل معادلات ۳۹ و ۴۰، مؤلفه‌های تانسور تنش زمینه با استفاده از نرخ همگرد اوپلری به دست می‌آیند.

یافتن سطوح تسلیم متوالی

برای یافتن سطوح تسلیم متوالی لازم است با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، مؤلفه‌های تانسور تنش زمینه در هر گام زمانی به دست آیند. با جایگذاری مؤلفه‌های تانسور تنش زمینه در تابع تسلیم (رابطه‌ی ۸)، مؤلفه‌های تانسور تنش انحرافی به دست می‌آیند. به سبب عدم وجود تنش هیدروستاتیک در برش ساده، تنش کوشی برابر با تنش انحرافی است. همچنین با توجه به رابطه‌ی $s_{ii} = \alpha_{ii} = 0$ در این تغییر شکل، روابط $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ و $s_{11} = -s_{22}$ برقراراند. لذا در این تغییر شکل، با حذف پارامتر زمان بین مؤلفه‌های قائم و برشی تنش کوشی می‌توان سطح تسلیم در فضای دوبعدی σ_{11} و σ_{12} ، در هر مرحله از تغییر شکل ترسیم کرد. جهت حرکت مرکز سطح تسلیم در فضای σ_{11} و σ_{12} با بردار \vec{r}_α چنین نشان داده می‌شود:

$$\vec{r}_\alpha = d\alpha_{11}\hat{i} + d\alpha_{12}\hat{j} \quad (41)$$

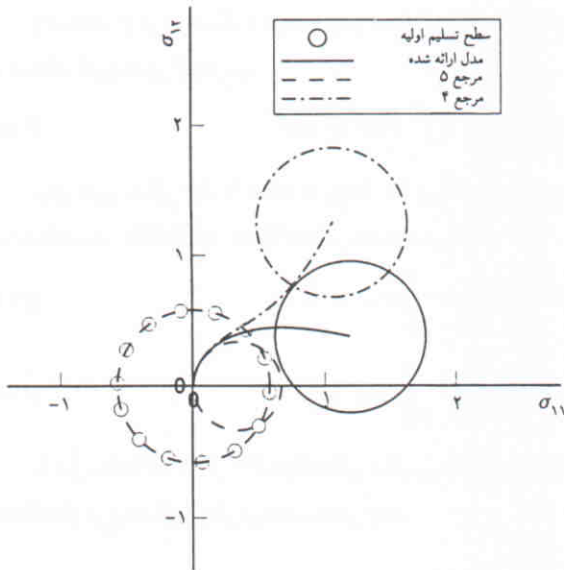
زاویه‌ی بین این بردار (جهت حرکت مرکز سطح تسلیم) و محور افقی، برابر است با:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{d\alpha_{12}}{d\alpha_{11}} \quad (42)$$

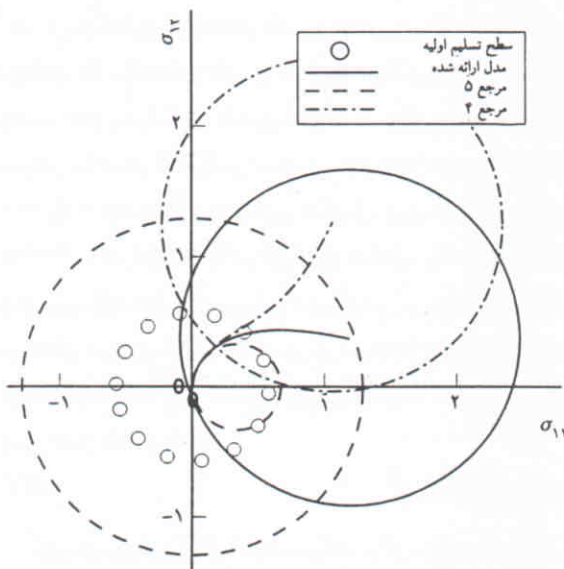
در مسئله‌ی برش ساده با استفاده از روابط ۲ و ۲۳، رابطه‌ی ۴۲ به صورت رابطه‌ی ۴۳ به دست می‌آید:

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\gamma \ln(\lambda_2/\lambda_1) + 2e_\gamma}{2 \ln(\lambda_1/\lambda_2) + \gamma e_\gamma} \right] \quad (43)$$

به منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج تجربی فیلیپس و لی، لازم است بردار نرخ تنش نیز محاسبه شود. در نقطه‌ی تنش جاری، در فضای σ_{11} و σ_{12} ، بردار نرخ تنش (\vec{r}_σ) چنین بیان



شکل ۲. مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی و سطوح تسلیم در ابتدا و انتهای تغییر شکل در مسئله‌ی برش ساده (سخت‌شوندگی سینماتیک).



شکل ۳. مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی و سطوح تسلیم در ابتدا و انتهای تغییر شکل در مسئله‌ی برش ساده. (سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد).

همسانگرد با ضرایب سخت‌شوندگی $h_{\alpha} = 1$ و $k_s = 2/25$ و $c = 2/57$ ، و سطوح تسلیم در ابتدا و انتهای این تغییر شکل را در صورت استفاده از مدل‌های مذکور، نشان می‌دهد. با مقایسه‌ی شکل‌های ۲ و ۳، تأثیر نوع سخت‌شوندگی بر تغییر اندازه‌ی سطح تسلیم مشخص می‌شود.

شکل ۴ جهت حرکت مرکز سطح تسلیم نسبت به تغییر مکان برشی را نشان می‌دهد. نمایانگر زاویه‌ی بین مماس بر جهت حرکت

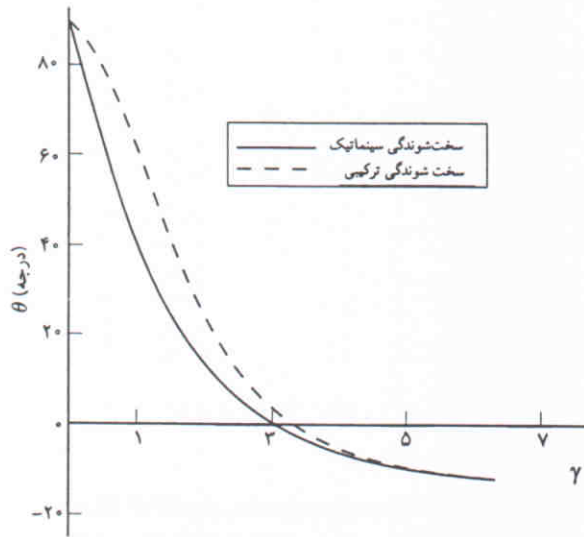
می‌آید. این بدان معنی است که مرکز سطح تسلیم به‌دست آمده در تغییر مکان برشی $\gamma + 2\pi$ ، منطبق بر مرکز سطح تسلیم در تغییر مکان برشی γ است. بنابراین جواب حاصل از این معادله‌ی مشخصه که از نرخ همگرد جاومن استفاده می‌کند از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، برای نرخ همگرد جاومن، جوابی غیر نوسانی به‌دست می‌آید.

با استفاده از نرخ همگرد زارمبا در معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، برای مسئله‌ی مورد نظر جوابی مشابه با نتیجه‌ی به‌دست آمده برای نرخ همگرد جاومن، حاصل می‌شود. این نتیجه با جواب حاصل از مدل دافالیاس، [۴] که نرخ همگرد زارمبای تانسور تنش زمینه را به تانسور نرخ کرنش ارتباط می‌دهد، متفاوت است.

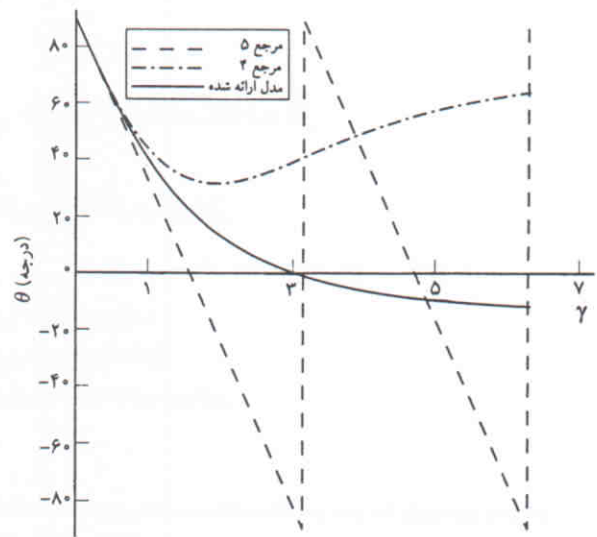
در شکل ۱ مشاهده می‌شود که در صورت استفاده از مدل دافالیاس در تعیین سطح تسلیم، هر دو مؤلفه‌ی مختصات مرکز سطح تسلیم در فضای تنش‌های σ_{11} ، σ_{12} ، توابعی صعودی از تغییر مکان برشی‌اند. جواب مسئله در صورت استفاده از نرخ همگرد اوپلری در رابطه‌ی ۲، مشابه با نتایج ناشی از کاربرد نرخ‌های همگرد جاومن و زارمبا در این رابطه است. بنابراین سطوح تسلیم تعیین شده با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، مستقل از نرخ همگرد به کار رفته است و برای تمام نرخ‌های همگرد جواب یکسانی به‌دست می‌آید.

برای بررسی تأثیر سخت‌شوندگی همسانگرد، همان مسئله برای یک ماده با سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد حل شده است. با توجه به این‌که در این مسئله مؤلفه‌های قائم و برشی تنش زمینه متأثر از نوع سخت‌شوندگی ماده نیست، لذا با استفاده از رابطه‌ی ۸ مشاهده می‌شود که مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی در مسئله برش ساده برای یک ماده با سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد، منطبق بر مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم برای ماده‌ی با سخت‌شوندگی سینماتیک است. تنها تفاوت ناشی از سخت‌شوندگی‌های مختلف در تعیین سطوح تسلیم متوالی در مسئله‌ی برش ساده، تأثیر نوع سخت‌شوندگی بر اندازه‌ی سطح تسلیم است.

شکل‌های ۲ و ۳، تأثیر نوع سخت‌شوندگی ماده در تعیین سطوح تسلیم متوالی را نشان می‌دهند. در شکل ۲، مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی در تغییر مکان برشی $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ و همچنین سطوح تسلیم در ابتدا و انتهای این تغییر شکل، با استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۲ و مدل‌های ارائه شده در مراجع [۴ و ۵]، برای یک ماده با سخت‌شوندگی سینماتیک نشان داده شده است. ماده‌ی مفروض در این مثال دارای ضرایب سخت‌شوندگی $h_{\alpha} = 1$ و $k = 1$ است. شکل ۳ مکان هندسی مراکز سطوح تسلیم متوالی در بازه‌ی تغییر مکان برشی $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ برای یک ماده با سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و



شکل ۵. جهت بردار نرخ تنش در مسئله‌ی برش ساده.



شکل ۴. جهت حرکت مرکز سطح تسلیم در مسئله‌ی برش ساده.

سینماتیک و همسانگرد، در صورت استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی ۲، نشان می‌دهد.

با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود که برای مسئله‌ی برش ساده در صورت استفاده از معادله‌ی مشخصه‌ی مذکور، در حالت سخت‌شوندگی سینماتیک، جهت حرکت مرکز سطح تسلیم در جهت بردار نرخ تنش است. همچنین در حالت سخت‌شوندگی ترکیبی سینماتیک و همسانگرد، جهت حرکت مرکز سطح تسلیم با افزایش تغییر شکل، بر جهت بردار نرخ تنش منطبق می‌شود.

مرکز سطح تسلیم و محور افقی است. همچنین تغییرات این زاویه نسبت به تغییر مکان برشی با استفاده از مدل دافالیاس و مدل نکتگال و دجنگ محاسبه و در این شکل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با استفاده از مدل ارائه شده توسط نکتگال و دجنگ، جهت حرکت مرکز سطح تسلیم یک تابع نوسانی با دوره‌ی تناوب 2π نسبت به تغییر مکان برشی است.

شکل ۵ جهت بردار نرخ تنش برای مسئله‌ی برش ساده (رابطه‌ی ۴۴)، را برای سخت‌شوندگی سینماتیک و سخت‌شوندگی ترکیبی

پانوشت

1. back stress tensor
2. von Mises yield criterion
3. corotational rate
4. material spin
5. strain rate tensor
6. rigid-plastic hardening material
7. body spin
8. principle of objectivity
9. deviatoric Cauchy stress tensor
10. polar decomposition theorem
11. spectral representation

منابع

1. Voyiadjis Z. G., and Foroozesh M., "Anisotropic Distortional Yield Model", *J. of Appl. Mech.*, 5, pp. 537-547, (1990).
2. Khan A. S., and Huang S., *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc, (1995).
3. Phillips A., and Lee C. W., "Yield Surfaces and Loading Surfaces, Experiments and Recommendations", *Int. J. of Solids*

and Structures, 15, pp. 715-729, (1979).

4. Dafalias Y.F., "Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations", *ASME, J. Appl. Mech.*, pp. 561-565, (1983).
5. Nagtegaal J.C., and de Jong J.E., *Some Aspects of Non-Isotropic Work-Hardening in Finite Strain Plasticity*, Proceeding of the Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain, pp. 65-102, Stanford University, (1981).
6. Naghdabadi R., Sohrabpour S., Saidi A.R., *Application of Corotational Rates in Constitutive Modeling of Rigid-Plastic Hardening Materials*, Proceedings of ASME International Conference, ESDA2000, Montreux, Switzerland, pp. 603-610, (2000).
7. Schieck B., and Stumpf H., "The Appropriate Corotational Rate, Exact Formulation for the Plastic Spin and Constitutive Model for Finite Elasto - Plasticity", *Int. J. Solids Structures*, pp. 3643-3667, (1995).
8. Reinhardt W., and Dubey R. N., "Application of Objective Rates in Mechanical Modeling of Solids", *ASME, J. Appl. Mech.*, 118, pp. 692-698, (1996).