

# بهبود فرمان‌پذیری خودرو با استفاده از

## کنترل بهینه‌ی گشتاور ترمز

بهزاد صمدی (کارشناس ارشد)  
سیدکمال‌الدین نیکروش (استاد)  
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

در این نوشتار یک روش جدید برای بهبود فرمان‌پذیری خودرو ارائه شده است. در این روش سرعت جانبی و سرعت زاویه‌ی چرخش<sup>۱</sup> خودرو، با استفاده از گشتاور ترمز چرخ‌ها کنترل می‌شود. در طراحی کنترل‌کننده، با هدف کاهش اثر نویز اندازه‌گیری، از روش شکل‌دهی متناوب LQR<sup>۲</sup> استفاده شده است. کارایی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی با شبیه‌سازی یک مانور شامل تغییر خط مضاعف<sup>۳</sup> نشان داده شده است. در این شبیه‌سازی، برای خودرو از یک مدل چهارده درجه آزادی، برای محرک‌های ترمز از یک مدل غیر خطی و برای تایرها از یک مدل تحلیلی استفاده شده است.

### مقدمه

کنترل‌کننده‌ی ABS باید بین کوتاه کردن فاصله‌ی توقف و حفظ قابلیت هدایت و پایداری جانبی تعادل برقرار کند.<sup>[۱]</sup> با توجه به افزایش استفاده از ABS در خودروهای جدید، یک برتری سیستم پیشنهادی در این نوشتار نسبت به سیستم‌های چهار چرخ فرمان و کنترل فرمان چرخ‌های جلو، سادگی پیاده‌سازی آن در خودرو مجهز به ABS است.

در بخش ۲ یک مدل دینامیکی برای رفتار جانبی خودرو توصیف شده است. مراحل طراحی کنترل‌کننده با استفاده از روش شکل‌دهی متناوب LQR (FSLQR) در بخش ۳ شرح داده شده است. بخش ۴ شامل نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی است.

### مدل رفتار جانبی خودرو

یک مدل چهار چرخ برای خودرو در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مدل سه درجه آزادی برای بدنه‌ی خودرو در نظر گرفته شده است. بردار حالت خودرو  $x = [v_x \ v_y \ r \ \omega_{fl} \ \omega_{fr} \ \omega_{rl} \ \omega_{rl}]^T$  شامل سرعت طولی، سرعت جانبی، سرعت زاویه‌ی چرخش هر یک از چرخ‌هاست. معادلات خودرو به صورت زیر است:<sup>[۴]</sup>

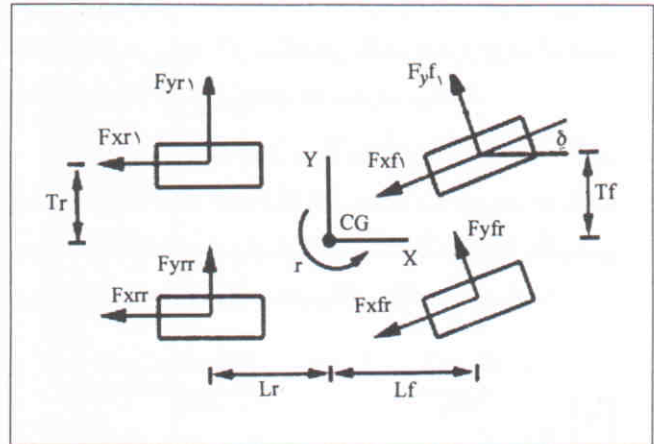
$$\dot{v}_x = v_y r - \frac{1}{m} [(F_{xfl} + F_{xfr}) \cos(\delta) + (F_{yfl} + F_{yfr}) \sin(\delta) + F_{xrl} + F_{xrr}] \quad (۱)$$

امروزه در خودروهای پیشرفته، برای افزایش ایمنی و راحتی مسافران از سیستم‌های کنترلی استفاده می‌شود. برخی از این سیستم‌ها، مانند سیستم چهار چرخ فرمان (۴WS) یا سیستم کنترل فرمان چرخ‌های جلو، با هدف بهبود فرمان‌پذیری خودرو به وجود آمده‌اند.<sup>[۱،۲]</sup> فرمان‌پذیری خودرو به ویژه در جاده‌های لغزنده اهمیت زیادی دارد. در این جاده‌ها با تغییر ناگهانی زاویه‌ی فرمان، احتمال این که خودرو منحرف شود یا به دور خود بچرخد، زیاد است. در این نوشتار به منظور بهبود فرمان‌پذیری خودرو روشی ارائه شده است که در آن با اعمال گشتاورهای متفاوت به چرخ‌های دو طرف خودرو، سرعت جانبی و سرعت زاویه‌ی چرخش خودرو به گونه‌ی کنترل می‌شود که رفتار جانبی خودرو به رفتار مطلوب نزدیک‌تر شود. رفتار جانبی خودرو باید طوری کنترل شود که تا جای ممکن بر سرعت طولی خودرو تاثیر نگذارد.

سیستم ترمز ضد قفل (ABS) یکی دیگر از سیستم‌های کنترلی خودرو است. وظیفه‌ی کنترل‌کننده‌ی این سیستم، کم کردن فاصله‌ی توقف خودرو در ترمزهای شدید، با حفظ قابلیت هدایت و پایداری جانبی است. باید توجه داشت که حالتی وجود ندارد که ABS و سیستم پیشنهادی در این نوشتار، با هم کار کنند. چون در طراحی کنترل‌کننده‌ی سیستم پیشنهادی، فرض بر این است که گشتاور ترمز چرخ‌های خودرو کوچک باشد. در واقع این سیستم هنگام ترمزهای شدید، کنترل ترمزها را به ABS می‌سپارد و در این حالت،

جدول ۱. پارامترهای مدل.

مقدار	پارامتر
$m = 1300 \text{ kg}$	جرم خودرو
$I_z = 1627 \text{ kgm}^2$	ممان اینرسی حول محور Z
$L_f = 1.0 \text{ m}$	فاصله مرکز ثقل از محور جلو
$L_r = 1.45 \text{ m}$	فاصله مرکز ثقل از محور عقب
$T_f = 0.78 \text{ m}$	نصف طول محور جلو
$T_r = 0.77 \text{ m}$	نصف طول محور عقب
$I_w = 4.07 \text{ kgm}^2$	ممان اینرسی چرخ
$R_w = 0.33 \text{ m}$	شعاع تایر



شکل ۱. مدل خودرو.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -v_x r + \frac{1}{m} [-(F_{xfl} + F_{xfr})\delta + (F_{yfl} + F_{yfr}) + \\ &\quad F_{yrl} + F_{yrr}] \\ \dot{r} &= \frac{1}{I_z} [-L_f(F_{xfl} + F_{xfr})\delta + L_f(F_{yfl} + F_{yfr}) - \\ &\quad L_r(F_{yrl} + F_{yrr}) + T_f(F_{xfl} - F_{xfr}) + T_f(F_{yfl} - F_{yfr})\delta + \\ &\quad T_r(F_{xrl} - F_{xrr})] \end{aligned} \quad (2)$$

با چشم‌پوشی از عبارت  $\delta(F_{xfl} + F_{xfr})$  و با فرض  $F_{yfl} \cong F_{yfr}$  و  $F_{yrl} \cong F_{yrr}$ ،  $F_{yf} = F_{yfl} + F_{yfr}$ ،  $F_{yr} = F_{yrl} + F_{yrr}$  داریم:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -v_x r + \frac{1}{m} [F_{yf} + F_{yr}] \\ \dot{r} &= \frac{1}{I_z} [L_f F_{yf} - L_r F_{yr} + T_f(F_{xfl} - F_{xfr}) + \\ &\quad T_r(F_{xrl} - F_{xrr})] \end{aligned} \quad (3)$$

با فرض این که به هنگام کار سیستم، سرعت چرخش چرخ‌ها تقریباً ثابت باشد، می‌توان از تقریب  $F_x \cong \frac{T_b}{R_w}$  استفاده کرد. همچنین فرض می‌کنیم:  $T_f \cong T_r$  بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -v_x r + \frac{1}{m} [F_{yf} + F_{yr}] \\ \dot{r} &= \frac{1}{I_z} \left[ L_f F_{yf} - L_r F_{yr} + \frac{T_f}{R_w} T_{BS} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $T_{BS} = T_{bfl} + T_{brl} - (T_{bfr} + T_{brr})$  تفاضل گشتاور ترمز چرخ‌های سمت چپ و راست خودرو است. همان‌طور که پیش از این اشاره شد، در ترمزگیری‌های شدید که فرضیات بالا برقرار نیست، کنترل سیستم ترمز به عهده سیستم ABS است.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -v_x r + \frac{1}{m} [-(F_{xfl} + F_{xfr}) \sin(\delta) + (F_{yfl} + F_{yfr}) \\ &\quad \cos(\delta) + F_{yxl} + F_{yrr}] \\ \dot{r} &= \frac{1}{I_z} [-L_f(F_{xfl} + F_{xfr}) \sin(\delta) + L_f(F_{yfl} + F_{yfr}) \\ &\quad \cos(\delta) - L_r(F_{yrl} + F_{yrr}) + T_f(F_{xfl} - F_{xfr}) \\ &\quad \cos(\delta) + T_f(F_{yfl} - F_{yfr}) \sin(\delta) + T_r(F_{xrl} - F_{xrr})] \\ \dot{\omega}_{fl} &= \frac{1}{I_w} (R_w F_{xfl} - T_{bfl}) \\ \dot{\omega}_{fr} &= \frac{1}{I_w} (R_w F_{xfr} - T_{bfr}) \\ \dot{\omega}_{rl} &= \frac{1}{I_w} (R_w F_{xrl} - T_{brl}) \\ \dot{\omega}_{rr} &= \frac{1}{I_w} (R_w F_{xrr} - T_{brr}) \end{aligned}$$

$\delta$  زاویه فرمان،  $T_b$  گشتاور ترمز،  $F_x$  نیروی اصطکاک طولی و  $F_y$  نیروی اصطکاک جانبی تایر است. پارامترهای مدل در جدول ۱ آمده است. [5]

دینامیک سرعت جانبی و سرعت زاویه‌ی چرخش مهم‌ترین نقش را در رفتار جانبی خودرو دارد. به همین دلیل برای طراحی کنترل کننده، تنها این بخش از معادلات حرکت خودرو مورد توجه قرار می‌گیرد. برای ساده‌تر شدن مسئله، با فرض این که زاویه فرمان کوچک باشد ( $\sin(\delta) \cong \delta$ ،  $\cos(\delta) \cong 1$ )، و با استفاده از معادلات ۱ می‌توان نوشت:

است. اگر  $K_{US}$  مثبت باشد، خودرو کند فرمان است. یعنی در پیچ‌های تند به سختی می‌پیچد. اگر  $K_{US}$  منفی باشد، خودرو تیز فرمان است. یعنی انتهای خودرو در پیچ‌های تند منحرف می‌شود.

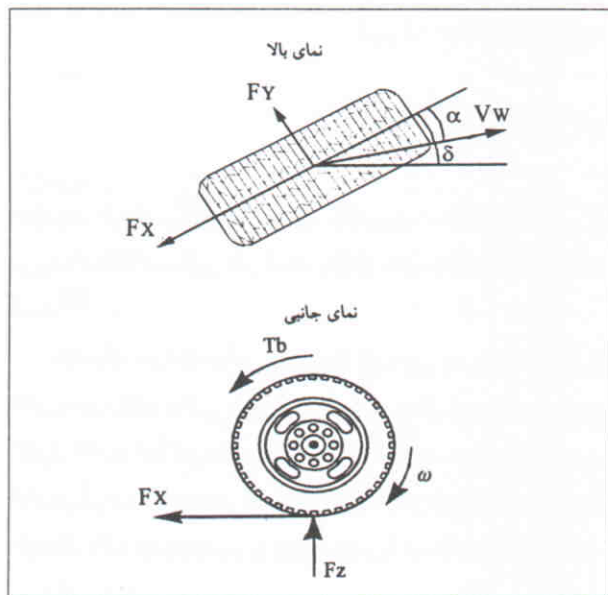
یک روش حل برای تعیین  $T_{BS}$  به طوری که  $v_y$  و  $r$  مقادیر مطلوب خود را دنبال کنند، شکل‌دهی مسئله به صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی LQR است. برای این کار معادلات سیستم را به گونه‌ی می‌نویسیم که بردار حالت سیستم بیانگر خطای تعقیب باشد:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_f+C_r}{mv_x} & \frac{L_r C_r - L_f C_f}{mv_x} - v_x \\ \frac{L_r C_r - L_f C_f}{I_z v_x} & -\frac{L_f C_f + L_r C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_f}{I_z R_w} \end{bmatrix} T_{BS} + d(t) \quad (9)$$

در این معادله  $d(t)$  اغتشاشی است برابر با:

$$d(t) = \begin{bmatrix} \frac{C_f}{m} \delta \\ \frac{L_f C_f}{I_z} \delta + \frac{L_f C_f + L_r C_r}{I_z v_x} r_{des} - \dot{r}_{des} \end{bmatrix} \quad (10)$$

چون از قبل اطلاعی از مقدار یا دینامیک  $d(t)$  در دسترس نیست، در طراحی کنترل‌کننده‌ی بهینه از آن چشم‌پوشی می‌کنیم. با چشم‌پوشی



شکل ۲. مدل چرخ.

زاویه‌ی لغزش مهم‌ترین عامل مؤثر بر اندازه‌ی نیروی اصطکاک جانبی تأیر است. این زاویه که در شکل ۲ نشان داده شده است ( $\alpha$ ), زاویه‌ی بین بردار سرعت حرکت خطی چرخ و راستای طولی چرخ است. اگر چرخ‌های هر محور به صورت یک چرخ فرض شود (مدل دوچرخه)، با فرض کوچک بودن  $v_y$  و  $r$ , زاویه‌ی لغزش برای هر یک از این چرخ‌های فرضی چنین محاسبه می‌شود: [۵]

$$\alpha_f = \delta - \frac{v_y + L_f r}{v_x}$$

$$\alpha_r = -\frac{v_y - L_r r}{v_x} \quad (5)$$

بین نیروی اصطکاک جانبی یک چرخ با زاویه‌ی لغزش آن، هنگامی که زاویه‌ی لغزش کوچک باشد، رابطه‌ی خطی برقرار است. با فرض  $F_{y_r} = c_r \alpha_r$  و  $F_{y_f} = c_f \alpha_f$  می‌توان نوشت:

$$\dot{v}_y = -v_x r + \frac{1}{m} [c_f \alpha_f + c_r \alpha_r]$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_z} \left[ L_f C_f \alpha_f - L_r C_r \alpha_r + \frac{T_f}{R_w} T_{BS} \right] \quad (6)$$

استفاده از رابطه‌های ۵ و ۶ دینامیک جانبی خودرو را می‌توان به صورت سیستم خطی ۷ نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_f+C_r}{mv_x} & \frac{L_r C_r - L_f C_f}{mv_x} - v_x \\ \frac{L_r C_r - L_f C_f}{I_z v_x} & -\frac{L_f C_f + L_r C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{m} \\ \frac{L_f C_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_f}{I_z R_w} \end{bmatrix} T_{BS} \quad (7)$$

در این نوشتار برای بهبود رفتار جانبی خودرو از گشتاور ترمز چرخ‌های سمت چپ و راست خودرو ( $T_{BS}$ ) استفاده شده است. هدف کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، نزدیک کردن رفتار جانبی خودرو به رفتار مطلوب است. رفتار جانبی مطلوب این‌گونه تعریف می‌شود: [۶]

$$v_{y_{des}} = 0$$

$$r_{des} = \frac{v_x g}{g(L_f + L_r) + K_{US} v_x^2} \delta \quad (8)$$

در این رابطه  $g$  شتاب جاذبه‌ی زمین و  $K_{US}$  ضریب کند فرمانی



از  $T_{BS}, d(t)$  از حل مسئله LQR زیر به دست می آید:

فرکانس‌اند و تابع معیار به صورت زیر است:

$$T_{BS}^{opt} = \operatorname{argmin}_{T_{BS}} \int_0^{\infty} (x^T Q x + T_{BS}^T R T_{BS}) dt \quad (11)$$

$$J(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(j\omega) Q(j\omega) x(j\omega) + u^*(j\omega) R u(j\omega) d\omega \quad (16)$$

برای کاستن از حساسیت کنترل‌کننده نسبت به اغتشاشات فرکانس بالا، در این نوشتار برای طراحی کنترل‌کننده از روش FSLQR استفاده شده است. این روش در بخش بعدی شرح داده شده است.

ماتریس‌های  $Q(j\omega)$  و  $R(j\omega)$  در تمام فرکانس‌ها هرمیتی‌اند

یعنی:

$$R^*(j\omega) = R(j\omega), Q^*(j\omega) = Q(j\omega) \quad (17)$$

در ادامه فرض بر این است که درایه‌های  $Q(j\omega)$  و  $R(j\omega)$  توابع کسری از چندجمله‌بی‌هایی از  $\omega^2$  باشند و رتبه‌ی ماتریس  $Q(j\omega)$  برابر  $P$  و رتبه‌ی ماتریس  $R(j\omega)$  کامل و برابر  $m$  باشد. به این ترتیب می‌توان ماتریس‌های  $F_1(j\omega) \in R^{P \times n}$  و  $F_2(j\omega) \in R^{m \times m}$  را یافت به گونه‌ی که:

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= F_1^*(j\omega) F_1(j\omega) \\ R(j\omega) &= F_2^*(j\omega) F_2(j\omega) \end{aligned} \quad (18)$$

### طراحی کنترل‌کننده

در این بخش ابتدا مروری گذرا بر روش FSLQR آورده شده است. سپس با استفاده از این روش، کنترل‌کننده‌ی برای رفتار جانبی خودرو (رابطه‌ی ۹) طراحی شده است. [۸۷]

### روش FSLQR

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x(0) &= x \end{aligned} \quad (12)$$

در  $x \in R^{n \times 1}$  بردار حالت سیستم و  $u \in R^{m \times 1}$  بردار ورودی است. طراحی کنترل‌کننده به روش LQR با زمان نامحدود،  $u$  چنان انتخاب می‌شود که این تابع معیار کمینه شود:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (13)$$

قانون کنترل بهینه از حل یک معادله‌ی جبری ریکاتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} A^T P - PA - Q + PBR^{-1}B^T P &= 0 \\ U^{opt}(t) &= -R^{-1}B^T P x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

در روش LQR، فرض بر این است که مدل سیستم در تمام فرکانس‌ها دقیق است. در حالی که عملاً هنگام مدل‌سازی سیستم از رفتار آن در فرکانس‌های بالا چشم‌پوشی می‌شود.

در FSLQR برای کاهش اثر مودهای سریع سیستم روی تابع هزینه، یک وزن فرکانسی در نظر گرفته می‌شود. برای این کار ابتدا تابع هزینه‌ی ۱۳، با استفاده از رابطه‌ی پارسوال در حوزه‌ی فرکانس نوشته می‌شود:

$$J(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^*(j\omega) Q x(j\omega) + u^*(j\omega) R u(j\omega)) d\omega \quad (15)$$

در این رابطه  $x^*(j\omega)$  مزدوج مختلط ترانهاده<sup>۴</sup> و  $x(j\omega)$  تبدیل فوریه‌ی  $x(t)$  است. در روش FSLQR، وزن‌های  $Q$  و  $R$  تابعی از

### حل مسئله‌ی FSLQR:

برای حل مسئله‌ی FSLQR ابتدا دو متغیر کمکی  $\bar{x}$  و  $\bar{u}$  چنین تعریف می‌شوند:

$$\bar{x}(j\omega) = F_1(j\omega) x(j\omega) \quad (19)$$

$$\bar{u}(j\omega) = F_2(j\omega) u(j\omega)$$

اگر  $F_1(j\omega)$  یک تابع کسری از چندجمله‌بی‌هایی بر حسب  $\omega$  باشد و تعداد صفرهای هر درایه‌ی آن از تعداد قطب‌های آن درایه بیشتر نباشد، می‌توان یک تحقق فضای حالت برای آن به دست آورد:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_1 z_1 + B_1 x \\ \bar{x} &= C_1 z_1 + D_1 x \end{aligned} \quad (20)$$

در صورتی که شرایط گفته شده برای  $F_2(j\omega)$  هم برقرار باشد، می‌توان آن را به صورت یک سیستم خطی نشان داد:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= A_2 z_2 + B_2 u \\ \bar{u} &= C_2 z_2 + D_2 u \end{aligned} \quad (21)$$

با ترکیب رابطه‌های ۲۰، ۲۱ و ۲۲ معادلات کلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \cdot & \cdot \\ B_1 & A_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (22)$$

اکنون تابع هزینه‌ی ۱۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u^{opt}(j\omega) = [I - K_{\gamma}(j\omega I - A_{\gamma})^{-1} B_{\gamma}]^{-1} [K_{\gamma} + K_{\gamma}(j\omega I - A_{\gamma})^{-1} B_{\gamma}] x(j\omega) \quad (30)$$

### کنترل رفتار جانبی خودرو

در این بخش با استفاده از روش FSLQR، کنترل کننده‌ی برای رفتار جانبی خودرو طراحی می‌شود. رفتار جانبی خودرو (رابطه‌ی ۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (31)$$

در اینجا  $x = [y, r]^T$  بردار حالت و  $u = T_B s$  ورودی است. برای کاهش اثر اغتشاشات اندازه‌گیری  $x(t)$  در تابع هزینه ۱۶،  $Q(j\omega)$  به صورت ضریبی از  $\frac{1}{\lambda^2 \omega^2 + 1}$  در نظر گرفته می‌شود:

$$Q(j\omega) = \frac{Q}{\lambda^2 \omega^2 + 1} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

با این انتخاب معادلات سیستم کلی (رابطه‌ی ۲۲) به این صورت در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{Z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{1}{\lambda} I_{2 \times 2} & -\frac{1}{\lambda} I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (33)$$

به دلیل مزایای عملی کنترل کننده‌های دیجیتال، ادامه‌ی طراحی به صورت گسسته با زمان انجام شده است. با گسسته کردن سیستم ۳۳ دوره‌ی نمونه برداری  $T_s$  به این سیستم می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_1(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ (1 - \exp(-\frac{T_s}{\lambda})) I_{2 \times 2} & \exp(-\frac{T_s}{\lambda}) I_{2 \times 2} \end{bmatrix}}^{\phi} \begin{bmatrix} x(k) \\ z_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (34)$$

که در آن:

$$\phi = \exp(AT_s) \quad (35)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_s} \exp(A\tau) d\tau B$$

اکنون سیستم ۳۴ و تابع هزینه‌ی مربوط به آن را می‌توان چنین نوشت:

$$J(u) = \int_0^{\infty} [X^T u^T] \begin{bmatrix} D_1^T D_1 & D_1^T C_1 & \cdot & \cdot \\ C_1^T D_1 & C_1^T C_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{\gamma}^T C_{\gamma} & C_{\gamma}^T D_{\gamma} \\ \cdot & \cdot & D_{\gamma}^T C_{\gamma} & D_{\gamma}^T D_{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} dt \quad (23)$$

با تعریف:

$$Q = \begin{bmatrix} D_1^T D_1 & D_1^T C_1 & \cdot \\ C_1^T D_1 & C_1^T C_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{\gamma}^T C_{\gamma} \end{bmatrix}, R = D_{\gamma}^T D_{\gamma} \quad (24)$$

$$N = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ C_{\gamma}^T D_{\gamma} \end{bmatrix}$$

می‌توان مسئله‌ی FSLQR را به یک مسئله‌ی LQR تبدیل کرد:

$$\dot{X} = A_{\gamma} X + B_{\gamma} u \quad (25)$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} [X^T u^T] \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} dt$$

قانون کنترل بهینه از حل یک معادله‌ی جبری ریکاتی به دست می‌آید: [۸]

$$A^T P + PA - (PB + N) R^{-1} (PB + N)^T + Q = 0 \quad (26)$$

$$u^{opt}(t) = KX(t) = -R^{-1} (PB^T + N^T) X(t)$$

این قانون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u^{opt}(t) = K_{\gamma} X(t) + K_{\gamma} Z_1(t) + K_{\gamma} Z_{\gamma}(t) \quad (27)$$

از رابطه‌های ۲۰ و ۲۱ داریم:

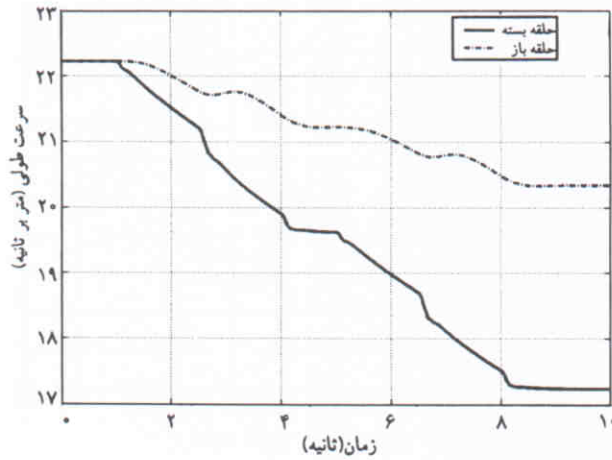
$$Z_1 = (j\omega I - A_1)^{-1} B_{\gamma} x \quad (28)$$

$$Z_{\gamma} = (j\omega I - A_{\gamma})^{-1} B_{\gamma} u$$

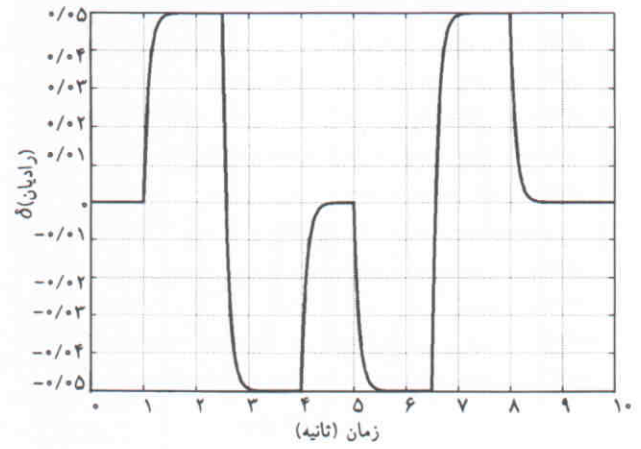
بنابراین رابطه‌ی ۲۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[I - K_{\gamma}(j\omega I - A_{\gamma})^{-1} B_{\gamma}] U^{opt}(j\omega) = [K_{\gamma} + K_{\gamma}(j\omega I - A_1)^{-1} B_{\gamma}] x(j\omega) \quad (29)$$

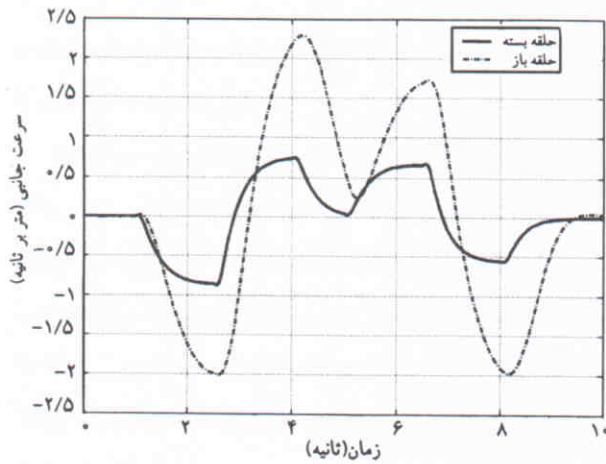
پس قانون کنترل بهینه از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:



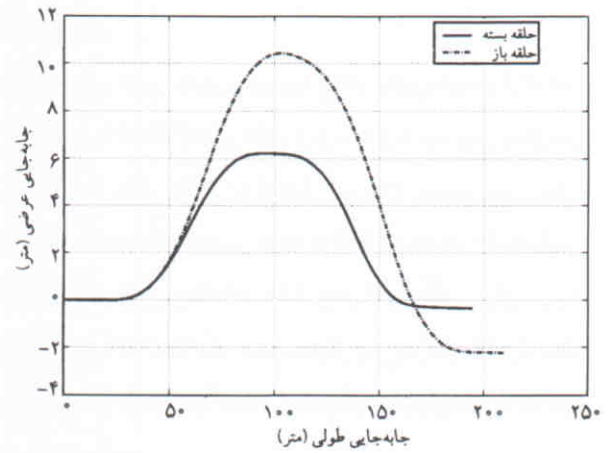
شکل ۵. تغییرات سرعت طولی.



شکل ۳. زاویه فرمان.



شکل ۶. تغییرات سرعت جانبی.



شکل ۴. مسیر حرکت خودرو.

محرک‌های ترمز<sup>[۹]</sup> و یک مدل تحلیلی برای تایرها<sup>[۱۰]</sup> استفاده شده است. ضریب اصطکاک بین تایرها و سطح جاده ۰/۵ است. راننده زاویه‌ی فرمان را مطابق شکل ۳ تعیین می‌کند. پارامترهای کنترل‌کننده در جدول ۲ نشان داده شده است. نتیجه آزمایش در دو حالت حلقه باز و حلقه بسته در شکل‌های ۴ تا ۸ نشان داده شده است. با مقایسه‌ی نتایج آزمایش در این دو حالت، ملاحظه می‌شود که کنترل‌کننده توانسته است سرعت جانبی خودرو (۶) را کاهش دهد (شکل ۶). همچنین در حالت حلقه بسته سرعت چرخش خودرو (۲)

جدول ۲. پارامترهای کنترل‌کننده

پارامتر	مقدار
$T_s$	۰/۰۱
$\lambda$	$\frac{1}{6 \cdot \pi}$
$q_1$	۱۰۰۰
$q_2$	۱۰۰۰۰۰

$$X(k+1) = \phi_t X(k) + \Gamma_t u(k) \quad (36)$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (X^T(k) Q X(k) + u^T(k) R u(k))$$

قانون کنترل از حل معادله جبری ریکاتی زیر به دست می‌آید:<sup>[۸]</sup>

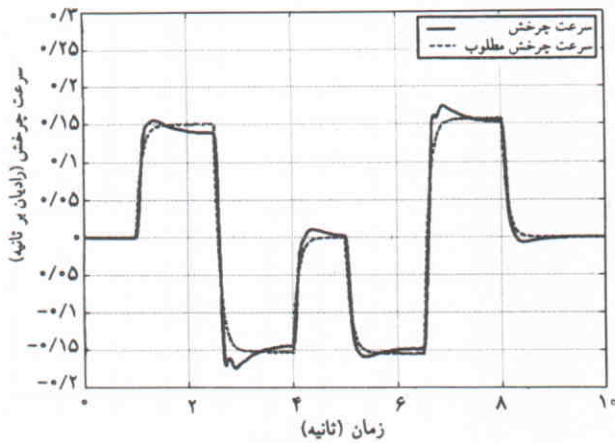
$$A^T P A - P - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q = 0$$

$$u^{opt}(k) = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A X(k) \quad (37)$$

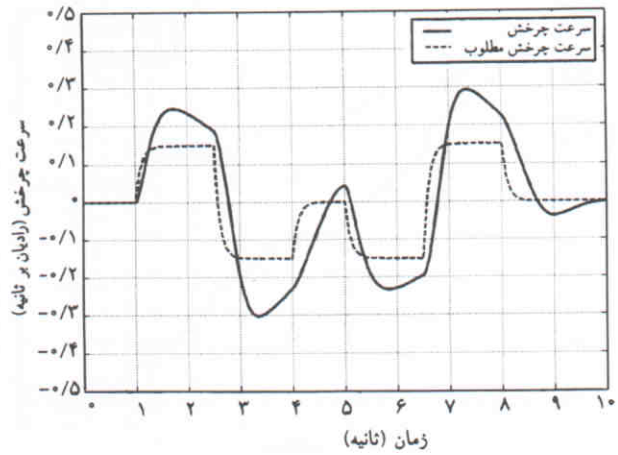
### شبیه‌سازی

برای بررسی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، یک مانور شامل تغییر خط مضاعف در نظر گرفته شده است. در شبیه‌سازی این مانور از یک مدل ۱۴ درجه آزادی برای خودرو،<sup>[۴]</sup> یک مدل غیر خطی برای





شکل ۸. تغییرات و مقدار مطلوب آن، حلقه بسته.



شکل ۷. تغییرات و مقدار مطلوب آن، حلقه باز.

### نتیجه گیری

در این نوشتار روشی جدید برای بهبود رفتار جانبی خودرو ارائه شد. در این روش با اعمال گشتاورهای ترمز متفاوت به چرخ‌های دو طرف خودرو، رفتار جانبی آن کنترل می‌شود. حسن این روش پیاده‌سازی آن در یک خودرو مجهز به ABS است. در ادامه این تحقیق می‌توان روش پیشنهادی را با روش‌های دیگر برای بهبود فرمان‌پذیری مانند استفاده از سیستم چهار چرخ فرمان یا کنترل فعال چرخ‌های جلو مقایسه کرد و یا از ترکیب آنها به روش‌هایی با کارایی بالاتر دست یافت.

### پانویس

1. yaw rate
2. frequency shaping LQR (FSLQR)
3. double lane change
4. complex conjugate transpose

### منابع

1. Ro, I. & Kim, H. "Improvement of high speed 4WS vehicle handling performance by sliding mode," *Proc. 1994 amer. contr. conf.*, Baltimore, MD, pp. 1974-1978, (June 1994).
2. Ackermann, J. "Robust control prevents car skidding," 1996 Bode Prize Lecture, *IEEE Control Syst. Mag.*, 17, (3), pp. 23-31, (June 1997).
3. صمدی، بهزاد و نیکروش، سید کمال‌الدین. «کنترل کننده لغزشی برای کنترل لغزش چرخ‌های خودرو»، هفتمین کنفرانس مهندسی برق ایران، مرکز تحقیقات مخابرات ایران، (اردیبهشت ۱۳۷۸).
4. صمدی، بهزاد. «تشخیص و شناسایی عیب و تطابق با آن در سیستم ترمز ضد قفل (ABS) با استفاده از روش‌های مبتنی بر مدل»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، (بهمن ۱۳۷۷).
5. Ray, L. R. "Nonlinear state and tire force estimation

به مقدار مطلوب آن نزدیک‌تر است (شکل ۸). مقدار مطلوب  $r_{des}$  از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که کنترل‌کننده پیشنهادی رفتار جانبی خودرو را به رفتار مطلوب نزدیک‌تر کرده است. ولی چون کنترل‌کننده برای این کار از ترمزها استفاده می‌کند، بدیهی است که سرعت طولی خودرو ( $v_x$ ) کاهش بیشتری می‌یابد (شکل ۵). از آنجا که کاهش بیش از حد سرعت خودرو مطلوب نیست، در طراحی کنترل‌کننده باید تعادل بین بهبود رفتار جانبی و عدم کاهش سرعت طولی را در نظر گرفت.

- for advanced vehicle control," *IEEE Tran. contr. Syst. Technol.*, 3, (1), pp. 117-124, (March 1995).
6. Williams, D. E. & Haddad, W. M. "Nonlinear control of roll moment distribution to influence vehicle yaw characteristics," *IEEE Tran. Contr. Syst. Technol.*, 3, (1), pp. 110-116, (March 1995).
7. Gupta, N. "Frequency-shaped cost functionals: extension of linear-quadratic- gaussian design methods," *AIAA J. of Guidance and control*, 3, (6), pp. 529-535, (Nov.-dec. 1980).
8. Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. **Optimal Control: Linear Quadratic Methods**, Prentice Hall, (1990).
9. Drakunov, S. et al, "ABS control using optimum search via sliding modes," *IEEE Tran. Contr. Syst. Technol.*, 3, (1), pp. 79-85, (March 1995).
10. Szostak, H. T., Allen, R. W. & Rosenthal, T. J. "Analytical modeling of a driver response in crash avoidance maneuvering, vol. II: An interactive tire model for driver/vehicle simulation," U. S. Department of Transportation, report no. DOT HS 807-271, (April 1988).