

استفاده از شبکه‌ی بی‌سازمان سه‌بعدی به منظور

تحلیل معادلات اویلر

کریم مظاهری (استاد)

شهرام بداغ آبادی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

تولید شبکه‌ی سه‌بعدی بی‌سازمان^۱ حول اجسام با هندسه‌ی ساده و حل معادلات دایمی اویلر در این میدان مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم کارایی برای تولید شبکه‌ی سه‌بعدی براساس مثلث‌بندی دلانی ارائه شده که شامل تولید نقاط مرزی، تعیین تابع فاصله، تولید نقطه در میدان و افزودن تک تک نقاط به شبکه و اصلاح موضعی آن است. برطرف کردن حالات منحنی با دقت خاصی صورت گرفته و راه‌های مناسبی ارائه شده است. صحت الگوریتم با تولید شبکه‌های متعددی بررسی و کیفیت شبکه‌های تولید شده با معیارهای مناسبی بررسی شده است. در حل معادلات اویلر سه‌بعدی از گسسته‌سازی حجم محدود در یک روش سلول مرکزی استفاده شده است. مقادیر میانگین رو برای گسسته‌سازی شارها روی سطوح حجم معیار به کار رفته‌اند. چند مثال در جریان‌های مافوق صوت برای بررسی صحت برنامه حل شده است.

مقدمه

شبکه‌های باسازمان^۲ مدت‌هاست که برای حل معادلات جریان استفاده شده‌اند. روش‌های تولید شبکه‌ی باسازمان روز به روز بهتر شده و الگوریتم‌های گوناگون متناسب آنها به‌خوبی شناخته شده‌اند. این شبکه‌ها ساختار اطلاعاتی کوچک‌تری دارند و حافظه‌ی کمتری در واحد المان اشغال می‌کنند. همچنین روش‌های تولید شبکه‌ی باسازمان ساده‌تر از روش‌های بی‌سازمان است. با وجود این هنوز تولید شبکه در هندسه‌های پیچیده با شبکه‌های باسازمان، به‌ویژه خودکار کردن آن دشوار است. شبکه‌های بی‌سازمان در پوشش میدان‌های پیچیده بسیار قوی‌ترند، خودکار کردن فرایند تولید آنها ساده‌تر است، تغییر اندازه‌ی سلول‌ها در میدان به راحتی امکان‌پذیر است، به‌خوبی بر مرزها منطبق می‌شوند و بالاخره اینکه فرایند تطبیق در آنها ساده‌تر است. در برابر این مزایا ساختار اطلاعاتی شبکه‌های بی‌سازمان به‌مراتب پیچیده‌تر از شبکه‌های باسازمان است و انجام بهینه‌ی فرایند تولید شبکه در آنها منطقی پیچیده‌تر و کار بیشتری نیاز دارد.

کردن و رفع اشکالات آنها ارائه شده است. فری^[۴] الگوریتمی برای تولید نقاط داخلی در دو بعد براساس مراکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث‌ها ارائه کرد که با الگوریتم مثلث‌بندی دلانی ارائه شده توسط واتسون همراه شده بود. شرودر و شفارد^[۵] نیز از الگوریتم واتسون در سه بعد برای شبکه‌بندی استفاده کردند. این محققین برای رفع مشکل عدم حفظ مرزها در الگوریتم مثلث‌بندی دلانی، روشی براساس دسته‌بندی توپولوژیکی به کار گرفتند که در نهایت شبکه‌ی سازگار با هندسه‌ی تعریف شده حاصل شود. مولر و همکاران^[۶] با ترکیب روش الگوریتم مثلث‌بندی دلانی و ایده‌ی تولید نقطه در روش جبهه‌ی پیش‌رونده، روش قدرتمندی برای تولید خودکار شبکه در دو بعد ارائه کردند. در زمینه‌ی تولید خودکار شبکه‌ی سه‌بعدی می‌توان به کارهای انجام شده توسط ویتربیل و حسن^[۷] گلیاس و سایبوکیس^[۸]، مکرام و ویتربیل^[۹] و زنگ و همکاران^[۱۰] نیز اشاره کرد.

روش تولید شبکه

روش‌های گوناگونی برای مثلث‌بندی دلانی وجود دارد.^[۱۱] این روش‌ها ابتدا برای مسائل دوبعدی توسعه یافتند و سپس برخی به سه بعد نیز تعمیم داده شده است. اساس روش به کار گرفته شده در اینجا، کار انجام شده توسط دیگران^[۱۱] بوده، لذا از توضیح اصول اولیه‌ی روش اجتناب می‌کنیم. در این تحقیق تأکید بر اصلاحات انجام شده روی روش مذکور به منظور اصلاح کیفیت شبکه‌ی تولیدی

روش‌های متنوعی برای تولید شبکه‌ی بی‌سازمان ارائه شده است. پایه‌ی بسیاری از روش‌های ارائه شده را باید دو الگوریتم معروف به الگوریتم مثلث‌بندی دلانی^۳ و جبهه‌ی پیش‌رونده^۴ دانست. روش‌های تولید شبکه‌ی دلانی برای استفاده در دینامیک سیالات محاسباتی توسط لائسون، گرین و سیبسون^[۱] بویر^[۲] و واتسون^[۱۲] ارائه شده‌اند. در سال‌های اخیر نیز روش‌هایی برای بهینه

فضای متغیری آن سطح است. برای سطوح منحنی ساده می‌توان از روش‌های جبری نیز استفاده کرد.

میدان محدب

میدان محدب ناحیه‌ی ساده و به‌اندازه‌ی کافی بزرگ است به‌طوری که دربرگیرنده‌ی تمامی نقاطی است که در شبکه تولید می‌شوند. در این تحقیق از یک چندوجهی توپر استفاده شده است. در این هندسه یک بیست وجهی (شامل ۱۲ نقطه) با یک نقطه در مرکز شبکه‌بندی شده است. بدین ترتیب بیست هرم تولید می‌شوند که همگی مرکزی مشترک دارند.

افزودن نقطه

الگوریتم افزودن نقطه را که در واقع همان الگوریتم واتسون^[۳] است، می‌توان چنین بیان کرد که به‌طور بازگشتی تمامی همسایه‌های المان دربرگیرنده‌ی نقطه‌ی جدید که دوایر محیطی آنها شامل این نقطه باشند در فهرست المان‌های محذوف قرار می‌گیرد، و در نهایت تمامی المان‌های فهرست فوق حذف می‌شوند. در عمل، عدم اطمینان به محاسباتی که در محدوده‌ی خطای ماشین انجام می‌شوند، منجر به بروز حالات منحنی در شبکه‌بندی می‌شود. مثلاً اگر فاصله‌ی نقطه‌ی جدید از مرز کره‌ی محیطی در حد خطای ماشین باشد، بدیهی است که پاسخ به این‌که کره شامل نقطه‌ی جدید می‌شود یا نه، پاسخی تصادفی و غیر قابل اطمینان خواهد داشت. یکی دیگر از حالات منحنی که در شبکه‌بندی رخ می‌دهد قرار گرفتن چهار نقطه یا بیشتر روی یک دایره (دوبعد) و یا پنج نقطه یا بیشتر روی یک کره (سه بعد) است. برای رفع این مشکل شرط داخل کره محیطی بودن به‌صورت $\frac{d-r}{r} \leq \epsilon$ اعمال می‌شود. که در آن، ϵ عدد حقیقی کوچکی است. اعمال این شرط باعث می‌شود تا نقاطی که در محدوده‌ی خطای ماشین نزدیک مرکز کره‌اند، همگی خارج کره ارزیابی شوند. به‌طور کلی استفاده از کره محیطی تقریبی به جای کره‌ی اصلی باعث بروز ناسازگاری در شبکه می‌شود. در حالت حدی ممکن است المان‌هایی با حجم صفر تشکیل شوند. راه حل‌های متعددی برای رفع این مشکل ارائه شده‌اند که از آن جمله می‌توان به روش‌های زیر اشاره کرد:

- افزایش دقت محاسبات ؛
- افزودن نقاط فوق بعد از سایر نقاط؛
- تغییر اندک مکان به خارج از محدوده‌ی خطا؛
- بررسی شرط داخل کره‌ی محیطی با محاسبات روی اعداد صحیح. در روشی که در این تحقیق به کار گرفته شده است، از هر سه روش اول استفاده شده است. با توجه به این‌که هیچ یک از سه روش اول تضمینی برای حل کامل مشکل ناسازگاری در شبکه ندارند، روش

و برطرف کردن حالات منحنی است.

ایده‌ی اصلی، ترکیب روش مثلث‌بندی واتسون و روش تولید نقطه‌ی جبهه‌ی پیش‌رونده است. توزیع نقاط توسط یک تابع توزیع که در واقع یک ورودی به پرسش‌نامه‌ی تولید شبکه محسوب می‌شود، کنترل می‌شود.^[۴] گام‌های اصلی روش به کار رفته چنین است:

۱. تولید نقاط مرزی برای هندسه‌ی مسئله، تعیین ناحیه‌ی محدب دربرگیرنده‌ی کل میدان و مثلث‌بندی آن؛
۲. افزودن تک تک نقاط مرزی، تعیین تابع فاصله برای آنها و اصلاح شبکه‌بندی براساس شرط کره‌ی محیطی؛
۳. تعیین المان‌های بد (المان‌هایی که یک معیار تعریف شده برای خوبی کیفیت را ارضا نمی‌کنند)؛
۴. تولید نقطه‌ی جدید برای هر المان بد و تشکیل فهرست نقاط پیشنهادی؛
۵. ادغام هر دو نقطه‌ی جدیدی که بر مبنای تابع فاصله بیش از حد به یکدیگر نزدیکند؛
۶. حذف نقطه‌ی پیشنهادی، در صورتی که طبق معیار تابع فاصله بیش از حد به نقاط مجاور نزدیک باشد؛
۷. افزودن تک تک نقاط پیشنهادی و اصلاح شبکه؛
۸. بازگشت به مرحله‌ی ۳ و ادامه‌ی روند تا زمانی که المان بدی باقی نماند، یا امکان اضافه کردن نقطه نباشد؛
۹. هموارسازی شبکه.

ایجاد نقاط مرزی

به‌طور کلی در سه بعد می‌توان چهار جزء اصلی توپولوژیکی تعریف کرد. این اجزا عبارتند از: رأس یا گوشه^۵، یال^۶، سطح^۷ و ناحیه^۸. هر یک از این اجزا توسط جزء‌های توپولوژیکی یک بعد پایین‌تر احاطه شده‌اند. نواحی توسط سطوح محصور می‌شوند، مرز سطوح را یال‌ها تشکیل می‌دهند و هر یالی دارای دو رأس ابتدایی و انتهایی است.

تولید نقطه‌ی مرزی، فرایندی است که نقاط مناسبی را روی یال‌ها و سطوح مرزی تولید می‌کند. تقسیم هر یال با توجه به نیازمندی‌های اندازه‌ی المان‌ها در آن بخش از میدان انجام می‌شود. برای شروع می‌توان نقاط را یکنواخت توزیع کرد و سپس از روش‌های مناسب برای تعیین دقیق‌تر مکان نقاط استفاده کرد. تولید نقطه روی سطوح مرزی یکی از بخش‌های دشوار در فرایند تولید شبکه است. در مورد سطوح صاف معمولاً به‌سادگی می‌توان از روش‌های جبری برای تولید نقطه روی سطح دوبعدی استفاده کرد. روش متداول در تولید نقطه روی سطوح منحنی، تولید شبکه‌ی در

نقطه متصل هستند، در دو موقعیت قدیم و جدید مقایسه می‌شوند. در صورتی که هر دو افزایش داشتند، نقطه به موقعیت جدید منتقل می‌شود.

ساختار اطلاعاتی

در تولید شبکه‌ی سه‌بعدی اطلاعاتی که نگه‌داری می‌شوند عبارتند از: رئوس تشکیل دهنده‌ی هر المان، همسایه‌های هر المان، مشخصه‌ی خوبی و بدی المان، مختصات نقاط و تابع فاصله‌ی نقاط. بدین ترتیب، اگر N تعداد المان‌ها و N_p تعداد نقاط باشد، از نظر فضای مورد نیاز حافظه به $9N$ عدد صحیح و $4N_p$ عدد اعشاری نیاز است.

روش حل عددی معادلات اویلر سه‌بعدی

معادلات اویلر سه‌بعدی را در شکل متغیرهای ابقایی به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

U بردار کمیت‌های ابقایی $[U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]]$ و F, G و H مؤلفه‌های شار در سه جهت اند. ρ جرم مخصوص، u, v, w مؤلفه‌های سرعت و E انرژی داخلی کل است. برای کامل شدن دستگاه از معادله‌ی حالت گاز کامل استفاده می‌شود.

در تحقیق حاضر از یک روش سلول مرکزی استفاده شده است. حجم معیارهای استفاده شده همان المان‌های شبکه (هرم‌ها) هستند. هر سلول چهار وجه دارد که شارها روی این چهار وجه محاسبه می‌شوند. برای محاسبه‌ی شار از روش گسسته‌سازی روست استفاده شده است. در حالت کلی سه‌بعدی اگر مقادیر متناظر با چپ و راست وجه حجم معیار را با اندیس‌های L و R نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$F(U_L, U_R) = \frac{1}{\sqrt{A}} [F(U_L) + F(U_R) - \sqrt{A} |CU_R - U_L|] \quad (2)$$

مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبی \bar{A} عبارتند از:

$$\bar{\lambda}_{1,2,3} = \bar{u}_\perp, \quad \bar{\lambda}_4 = \bar{u}_\perp + \bar{C}, \quad \bar{\lambda}_5 = \bar{u}_\perp - \bar{C} \quad (3)$$

این ماتریس با مقادیر میانگین رو ارزیابی می‌شود. برای هر حجم معیار چهار شار، چهار وجه آن محاسبه می‌شود. برای حل، ابتدا شرط اولیه‌ی تعریف کرده، سپس با قدم زدن در زمان مطابق رابطه‌ی زیر متغیرهای اصلی و از آنها متغیرهای جریان را محاسبه می‌کنیم.

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{V} \sum_{i=1}^4 F_n^i S_i \quad (4)$$

در این رابطه S_i سطح وجه i ام، V حجم سلول و Δt گام زمانی

دیگری نیز در کنار آنها به کار گرفته شده است. بدین ترتیب که در صورت وجود تردید در تصمیم‌گیری، بر حفظ شبکه‌ی دلانی اصراری نشده است، بلکه الگوریتم به گونه‌ی اصلاح شده تا شبکه‌ی درست حاصل شود. فکر اصلی این الگوریتم برخاسته از این واقعیت است که لازمه‌ی تشکیل المان‌های غیر متقاطع در الگوریتم واتسون، محدب بودن ناحیه‌ی است که در اثر افزودن نقطه‌ی جدید المان‌های آن حذف می‌شوند. بنابراین، برای پرهیز از تشکیل المان‌هایی با حجم صفر یا منفی، با تعریف معیارهای مناسب ابتدا تحدب این ناحیه بررسی می‌شود.^[۱۴، ۱۳] در صورتی که ناحیه محدب نباشد، المان حذف شده‌ی مجاور وجهی که تحدب را ارضا نمی‌کند، دوباره بازیابی می‌شود. اضافه کردن این الگوریتم به الگوریتم واتسون، ایجاد یک شبکه‌ی درست را تضمین می‌کند، اگرچه شبکه‌ی حاصل دلانی نیست.

تولید نقطه

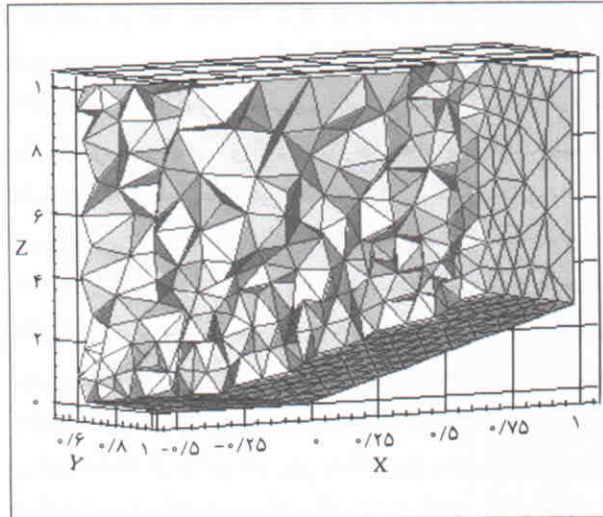
معیارهای متعددی برای تعیین خوبی یا بدی المان‌ها وجود دارند. از جمله می‌توان به نسبت طول کوچک‌ترین یال به بزرگ‌ترین یال اشاره کرد. بعد از تعیین المان‌های بد مجاور با المان خوب، (یعنی هنگامی که جبهه شناخته شد) لازم است برای هر المان بد یک نقطه‌ی جدید تولید و پیشنهاد شود. اساس فرایند تولید نقطه آن است که نقطه‌ی جدید به گونه‌ی قرار گیرد که ضمن رعایت ملزومات، تابع فاصله‌ی المانی با شکل منتظم تولید شود.

هموارسازی^۹

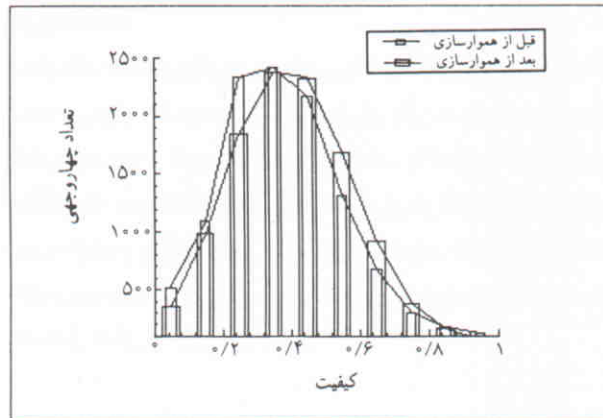
اغلب پس از پایان تولید شبکه، لازم است عملیاتی با نام «هموارسازی» روی شبکه انجام شود. هدف از این عملیات جابه‌جا کردن اندک نقاط به منظور بالا بردن کیفیت شبکه است. یکی از متداول‌ترین روش‌های هموارسازی که در اینجا نیز استفاده شده است، هموارسازی لاپلاسی است.

تا کنون معیارهای متعددی برای تعریف کیفیت شبکه و المان به کار رفته‌اند.^[۱۰] در کار حاضر از نسبت حجم به توان سوم طول یال بزرگتر استفاده شده است.^[۸] برای آن که بتوان تخمینی از کیفیت شبکه نیز به دست آورد، دو پارامتر کیفیت متوسط Q_m و کیفیت الحاقی Q_j تعریف می‌شوند. اولی میانگین حسابی کیفیت المان‌ها بخش بر تعداد کل المان‌هاست و دومی میانگین عکس کیفیت المان‌ها بخش بر تعداد کل المان‌هاست. Q_j نشان دهنده‌ی وجود یا عدم وجود المان‌هایی با کیفیت بسیار پایین در شبکه است و مقدار Q_j به شدت به وجود المان‌های نازک حساس است. در روند هموارسازی به هنگام جابه‌جایی نقطه مقادیر Q_m و Q_j برای المان‌هایی که به آن

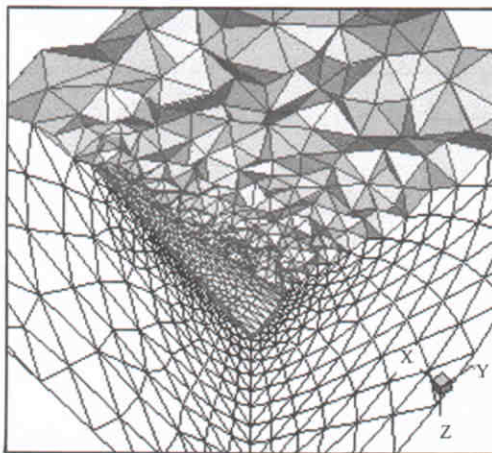
در نظر گرفته شده است. [۱۵ و ۱۴]



شکل ۱. مقطعی از شبکه‌بندی حول یک گوه (۱۹۹۲ نقطه و ۱۱۱۰۸ سلول).



شکل ۲. توزیع کیفیت برای شبکه حول گوه.



شکل ۳. شبکه‌بندی مخروط داخل استوانه (۴۶۰۴ نقطه و ۲۶۶۵۵ سلول).

به‌منظور رعایت تقارن نصف یک مخروط در نظر گرفته شده و برای مرز دور نیز یک نیم‌استوانه انتخاب شده است. شکل ۳ مقطعی از این

شرایط اولیه، شرایط مرزی و پایداری

در حل مسایل جریان خارجی نظیر جریان روی دماغه‌ی موشک یا روی بال معمولاً از جریان یکنواخت به‌عنوان شرط اولیه استفاده می‌شود. در جریان‌های داخلی نظیر جریان داخل کانال‌های مافوق صوت معمولاً جریان ورودی به‌عنوان شرط اولیه در نظر گرفته می‌شود.

در حل معادلات اویلر، شرط لغزش^{۱۲} در مرز جامد اعمال می‌شود. بدین معنی که سرعت سیال در جهت عمود بر سطح مرزی برابر سرعت سطح جامد خواهد بود. برای اعمال این شرط در مجاورت دیواره‌ی جامد، یک سلول مجازی در نظر گرفته شده و مقادیر چگالی و انرژی کل سلول مجازی برابر مقادیر خود سلول قرار داده می‌شوند. سرعت کل آن تصویر آینه‌یی سرعت کل المان مرزی است.

برای اعمال شرط مرزی آزاد از نظریه‌ی مشخصه‌ها استفاده می‌شود. در این روش بسته به علامت سرعت امواج مشخصه تعداد متغیرهایی که باید صریحاً تعیین شده یا از داخل میدان درونیابی شوند، تعیین می‌شوند. [۱۶، ۱۷ و ۱۸] در حل مسایل جریان خارجی در میدان دور از جسم از شرایط جریان آزاد استفاده شده است.

شرایط پایداری روی گام زمانی به‌صورت شرط CFL بیان می‌شود. برای حل معادلات اویلر سه‌بعدی در شبکه‌ی بی‌سازمان معیار محاسبه‌ی گام زمانی به‌صورت زیر استفاده می‌شود: [۱]

$$\Delta t = \beta \frac{V}{\sum_{i=1}^F [\bar{U}_{\perp} + \bar{c}]_i S_i} \quad (5)$$

که در آن V حجم المان و S_i سطح وجه i ام است. β یک ضریب اطمینان است و مقدار آن به‌صورت تجربی تعیین می‌شود.

نتایج

در این بخش ابتدا چند شبکه‌ی نمونه که از برخی از آنها برای حل استفاده شده، ارائه می‌شود. در ادامه، حل میدان در جریان حول گوه و مخروط به‌عنوان دو نمونه برای بررسی صحت عملکرد برنامه‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد.

شبکه‌بندی‌های نمونه

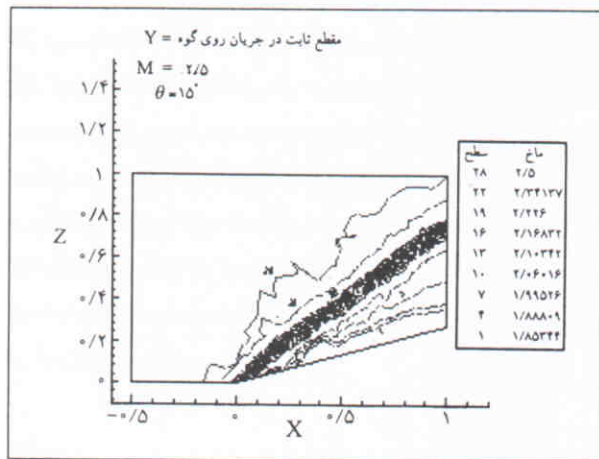
اولین مثال شبکه‌بندی، میدانی ساده حول گوه است. شکل ۱ مقطعی از شبکه‌بندی داخلی را نشان می‌دهد و نمودار توزیع کیفیت این شبکه در شکل ۲ رسم شده است. مثال دوم شبکه حول یک مخروط است.

جدول ۱. مقایسه‌ی کیفیت شبکه‌ها قبل و بعد از هموارسازی.

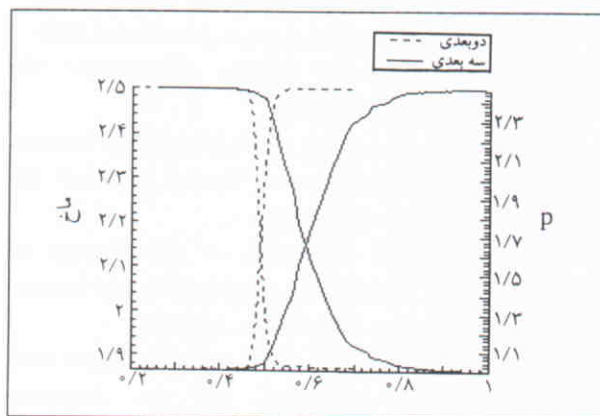
Q _{max}		Q _{min}		Q _i		Q _m		نوع شبکه
بعد	قبل	بعد	قبل	بعد	قبل	بعد	قبل	
۰/۹۹۵۸	۰/۹۹۷۸	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۶۳۶	۰/۰۵۸۳	۰/۴۰۷۱	۰/۳۸۱۵	گوه (شکل ۱)
۰/۹۹۱۶	۰/۹۹۲۴	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۱۰	۰/۲۷۲۵	۰/۲۰۳۲	۰/۴۰۱۰	۰/۳۷۳۱	مخروط (شکل ۳)
۰/۹۷۸۱	۰/۹۹۱۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۲۰۸۵	۰/۱۶۰۶	۰/۳۷۷۰	۰/۳۴۸۴	بال (شکل ۴)

حل میدان

جریان حالت دائمی مافوق صوت روی یک گوه، مسئله‌ی است که برای بررسی صحت عمل برنامه‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این در واقع یک مسئله‌ی دوبعدی است. شکل ۵ کانتورهای عدد ماخ را برای جریان با ماخ ۲٫۵ روی گوه نشان می‌دهد. زاویه‌ی گوه ۱۵ درجه است. می‌توان نتایج حاصل از حل سه‌بعدی را با حل دقیق^[۱۷] و نیز حل عددی دوبعدی مقایسه کرد. لذا مقادیر عدد ماخ و فشار روی یک خط ثابت در عرض موجب ضربه‌ی استخراج شده و به همراه حل دقیق در نمودار شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. نتایج



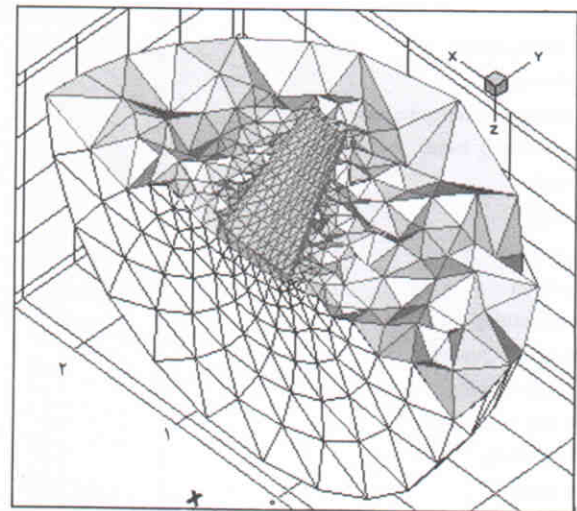
شکل ۵. نمایش کانتورهای عدد ماخ روی گوه در یک مقطع Y ثابت.



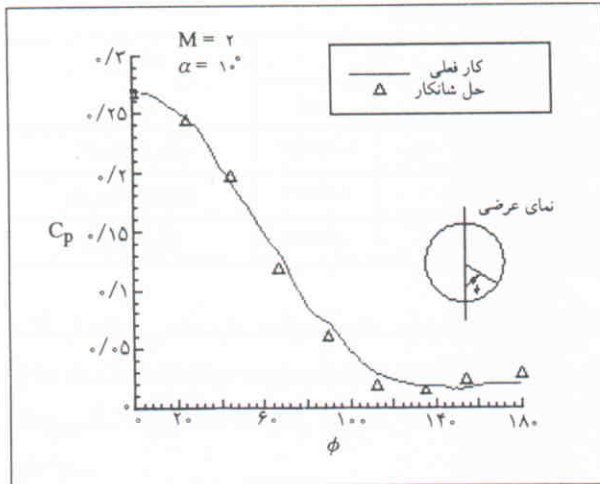
شکل ۶. عدد ماخ در عرض شوک جریان روی گوه (مقایسه‌ی حل سه‌بعدی، دوبعدی).

شبکه را نشان می‌دهد. برای مثال سوم یک میدان پیچیده‌تر در نظر گرفته شده که شبکه‌بندی حول بال ONERA M6 است. میدان خارجی یک نیم‌کره است که شکل ۴ نشانگر مقطعی از شبکه‌ی تولید شده است.

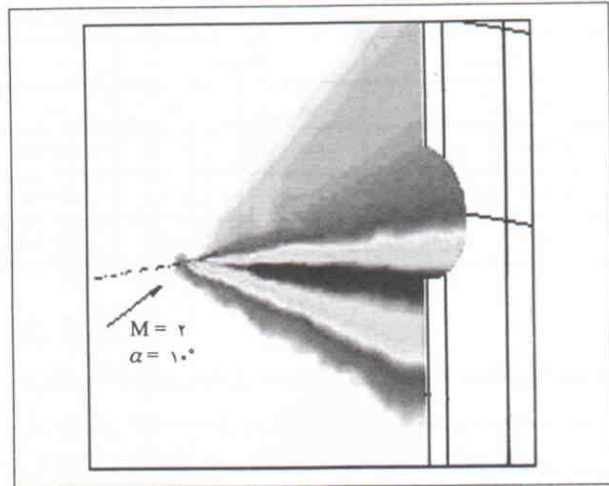
از نمودار توزیع کیفیت (شکل ۲) پیداست که کیفیت المان‌ها توزیعی مشابه توزیع نرمال دارد و متوسط کیفیت حدود ۰٫۴ است (این موضوع در مورد سایر شبکه‌ها نیز صادق است). در تولید شبکه علاقه‌مندیم اکثریت المان‌ها توزیعی نزدیک ۱ داشته باشند. فرایند هموارسازی در این شبکه‌ها توانسته است اندکی قله‌ی توزیع را به سمت یک حرکت دهد ولی ملاحظه می‌شود که در تمامی شبکه‌ها تعداد المان‌هایی که کیفیت بالای ۰٫۹ دارند کاهش یافته‌اند (جدول ۱). در واقع هموارسازی میزان «بدی» المان‌ها را بین همه تقسیم می‌کند. از آنجایی که متغیر مهم، کیفیت کل شبکه است (و نه کیفیت یک المان خاص)، پس می‌توان نتیجه گرفت که هموارسازی مناسب است. نکته‌ی مهمی که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود، این است که کیفیت کمینه دارای مقدار بسیار کمی است. این بدین معنی است که همواره در شبکه چند سلول بسیار بد وجود دارد. این سلول‌ها منجر به بروز خطا در محاسبات شده و ممکن است باعث ناپایداری در حل شوند.



شکل ۴. مقطع شبکه حول بال ONERA M6 (۲۰۱۸ نقطه و ۱۱۶۴۴ سلول).



شکل ۸. ضریب فشار در مقطع عرضی مخروط.



شکل ۷. کانتورهای ماک روی سطح مخروط.

جریان حالت دائم مافوق صوت روی یک مخروط با زاویه‌ی رأس 10° درجه و عدد ماک جریان آزاد 2 در زاویه‌ی حمله‌ی 10° درجه دومین مسئله‌ی نمونه‌ی است که مورد توجه قرار گرفته است. کانتورهای عدد ماک روی سطح شکل ۷ نشان داده شده است. ضریب فشار روی سطح در شکل ۸ با نتایج حل شانکار 14 مقایسه شده است. $[20]$ دقت حل حاضر در سمت جریان 15 مناسب است. ولی فشار مینیمم در سطح پشتی 16 به خوبی نمایان نیست. فیزیک غالب سمت جریان مخروط را امواج ضربه‌ی قوی تشکیل می‌دهند. بنابراین دقت حل در این نقاط بالاتر است. اما در سمت مخالف امواج ضربه‌ی ضعیفی تشکیل می‌شوند که روش‌های مرتبه‌ی اول قادر به کشف صحیح آنها نیستند. بنابراین دقت در این سمت مناسب نیست.

دو بعدی از یک حل تطبیقی در مسئله یکسان استخراج شده‌اند. $[19]$ همان‌گونه که انتظار می‌رود، گرانیوی 13 (لزجت) مصنوعی که در روش‌های عددی برای پایداری به معادلات اضافه می‌کنند، باعث هموار شدن تیزی‌ها نظیر امواج ضربه می‌شود. در مثال ارائه شده به نظر می‌رسد دقت حل دو بعدی اندکی بیش از حل سه بعدی باشد. ولی باید توجه داشت که شبکه‌ی حل دو بعدی حداقل دو مرتبه از حل سه بعدی ریزتر بوده است. همچنین شبکه‌ی دو بعدی منظم‌تر از شبکه‌ی سه بعدی است و کیفیت بالایی دارد. به نظر می‌رسد که وجود نوسان قبل از موج ضربه در حل سه بعدی ناشی از شکل شبکه باشد. البته باید به این نکته نیز توجه داشت که نتایج نمودار 6 برای سه بعد، از سه بار میان‌یابی به دست آمده‌اند و ممکن است خطای میان‌یابی نیز در آن وارد شده باشد.

پانوشته‌ها

1. unstructured
2. structured
3. delaunay triangulation
4. advancing front
5. vertex
6. edge
7. surface
8. region
9. smoothing
10. mean Quality
11. join Quality
12. slip condition
13. viscosity
14. shankar
15. windward
16. leeward

منابع

۱. خسروی، ر.، "حل معادلات جریان تراکم‌پذیر در میدان سه بعدی بر روی شبکه‌ی بی‌سازمان" پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، شهریور ۱۳۷۶.
2. Bowyer, A., "Computing Dirichlet Tessellations," *The Computer Journal*, **24**, (2), (1981).
3. Watson, D. F., "Computing the n-Dimensional Delaunay Tessellation with Applications to Voronoi polytopes," *The Computer Journal*, **24**, (2), (1981).
4. Frey, W., "selective Refinement: A New Strategy for Automatic Node Placement in Graded Trinagular Meshes," *Int. Journal for Numer. Meth. in Eng.*, **24**, (1987).
5. Schroeder, W. J., Shephard, M. S., "Geometry-Based Fully Automatic Mesh Generation and the Deleaunay Triangulation," *Int. Journal for Numer. Meth. in Eng.*, **26**, (1988).

6. Muller, J. D., Roe, P. L., Deconinck, H., "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations," *Int. Journal for numer. Meth. in Fluids*, (March 1992).
7. Weatherill, N. P., Hassan, O., "Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation With Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints," *Int. Journal for Numer Meth. in Eng.*, **37**, (1994).
8. Golias, N. A., Tsiboukis, T. D., "An Approach to Refining Three-Dimensional Tetrahedral Meshes Based on Delaunay Transformations," *Int. Journal for Numer. Meth. in Eng.*, **37**, (1994).
9. Marcum, D. I., Weatherill, N. P., "Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection," *AIAA Journal*, **33**, (9), (September 1995).
10. Zheng, Y., Lewis, R. W., Gethin, D. T., "Three Dimensional Unstructured Mesh Generation Part 1-3," *Computer Meth. in Applied Mech. and Eng.* **134**. (1996).
11. Thompson, J. F., "Structured and unstructured Grid Generation," *Critical Review in Biomedical Engineering*, **20** (1,2), (1992).
12. George, P. L., Hermeline, F., "Delaunay's Mesh of a Convex Polyhedron in Dimension d. Application to Arbitrary Polyhedra," *Int. Journal for Numer. Meth. in Eng.*, **33**, (1992).
13. Schroeder, W. J., Shephard, M. S., "A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3D Mesh Generation," *Int. Journal for Numer. Meth. in Eng.*, **29**, (1990).
۱۴. بداع آبادی، ش. «حل میدان جریان دائمی غیر لزج سه بعدی روی شبکه‌ی تطبیقی بی‌سازمان» پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، بهمن ۱۳۷۷.
15. Frink, N. T., "Upwind Scheme for Solving the Euler Equations on Unstructured Tetrahedral Meshes," *AIAA Journal*, **30**, (1), (January 1992).
16. Hirsch, C., **Numerical Computation of Internal and External Flows**, John Wiley & Sons, New York, **1,2**, (1988).
17. Laney, C. B., **Computational Gasdynamics**, Cambridge University Press, (1998).
18. Anderson, J. D., **Computational Fluid Dynamics**, McGraw-Hill Inc., 1995.
۱۹. لسانی، ب. «حل جریان غیردائمی دو بعدی بر روی یک شبکه‌ی تطبیقی بی‌سازمان»، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، شهریور ۱۳۷۶.
20. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., **Computational Fluid mechanics and Heat Transfer**, Hemisphere Publishing Corporation., (1984).