

بررسی پدیده‌ی برخورد و نفوذ میله‌ی صلب با سرکروی در

اجسام فلزی بی‌نهایت تراکم‌پذیر

شاهرخ حسینی هاشمی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

این نوشتار به بررسی پدیده‌ی نفوذ میله‌های صلب در اهداف فلزی، پس از برخورد با سرعت بالای می‌پردازد. بدین منظور پدیده‌ی نفوذ میله‌های صلب با سرکروی در اهداف فلزی قابل تراکم که تحت بارگذاری، رفتار کشسانی-خمیری^۱ کامل از خود نشان می‌دهند مورد توجه قرار گرفته و معادلات مربوط به نواحی کشسانی و خمیری ایجاد شده به دست آمده‌اند. همچنین نتایج به دست آمده از این روش برای اهدافی از جنس آلومینیم ۶۰۶۱-T۶۵۱، با نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی مقایسه شده است.

مقدمه

مسئله‌ی برخورد اجسام با سرعت‌های بالا از اواخر جنگ جهانی دوم، به سبب قابلیت پاسخ‌گویی به سؤالات و مسائل گوناگون، مورد توجه دانشمندان قرار گرفت.

از جمله‌ی مهم‌ترین مسائلی که بررسی این مقوله می‌توانست پاسخگو باشد سؤالات مطروحه در صنایع نظامی بود. سال‌های پس از جنگ جهانی دوم را می‌توان آغاز مطالعات جامع در مورد برخورد اجسام با سرعت‌های بالا و بررسی پدیده‌ی نفوذ در آنها دانست. روش‌های تحلیلی برای بررسی سازوکار نفوذ از سال ۱۹۴۵ توسط بی‌شاپ و همکارانش، آغاز شد.^[۱] این افراد روش نیمه ساکن^۲ ایجاد و رشد حفره‌های متقارن کروی و استوانه‌یی را از شعاع اولیه‌ی صفر گسترش داده و نهایتاً به منظور بررسی نیروی وارده بر پانچ‌های نوک تیز مورد استفاده قرار دادند.

چندی بعد در سال ۱۹۶۵، گودیر^[۲] مدل‌هایی را جهت تخمین چگونگی نفوذ کره‌های صلب در هدف‌های فلزی مورد بررسی قرار داد. وی پاسخ هدف را از روی نتایج مطالعات هیل^[۳] و هاپکینز^[۴] بر روی ایجاد و گسترش حفره‌ی کروی متقارن در یک جسم کشسان - خمیری تراکم‌ناپذیر تقریب زد. در بین سال‌های ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۱، فورستال و همکارانش^[۵] مطالعات تجربی جامعی در ارتباط با پدیده‌ی برخورد و نفوذ اجسام انجام دادند که نتایج حاصل از نظریه‌ی ارائه شده در این نوشتار، با نتایج آنها مقایسه شده است. همچنین از جمله مطالعات مربوط دیگر، می‌توان به کارهای اندرسن و واکر^[۷] و چن^[۸] اشاره کرد.

انبساط حفره‌ی کروی پویای متقارن در اجسام جامد تراکم‌پذیر

روابط اصلی: در اثر برخورد، یک گودال یا حفره‌ی متقارن در جسم فلزی بی‌نهایت از شعاع اولیه‌ی صفر با سرعت ثابت V شروع به رشد می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود این انبساط حفره موجب پدید آمدن نواحی کشسان و خمیری در جسم می‌شود.

ناحیه‌ی خمیری توسط دوایری با شعاع‌های $r = Ct$ و $r = Vt$ محصور می‌شود. دوایر با شعاع‌های $r = Ct$ و $r = C_d t$ نیز محدوده‌ی ناحیه‌ی کشسان را مشخص می‌سازند. چنانچه در ماده‌ی مورد مطالعه در ناحیه‌ی خمیری رابطه‌ی فشار هیدروستاتیک و کرنش حجمی خطی باشد و نیز معیار تسلیم فون میسز به کار گرفته شود:

$$P = K\eta = K\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (1)$$

$$P = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\phi) ; \sigma_\theta = \sigma_\phi \quad (2)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = Y \quad (3)$$

که تنش‌های فوق چنانچه فشاری باشند، مثبت در نظر گرفته می‌شوند.

رفتار ناحیه‌ی خمیری

معادلات اندازه‌ی حرکت و بقای جرم در مختصات اولیری به صورت:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = -\rho \frac{Dv}{Dt} \quad (4)$$

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{\gamma U}{\xi} = (\xi - U) \frac{dS}{d\xi} \quad (12)$$

در معادله‌ی ۱۱، $\beta = c/c_p$ و $(c_p^2 = K/\rho_0)$ است. شرط مرزی در سطح دیواره‌ی حفره عبارت است از:

$$U(\xi = \varepsilon) = \varepsilon \quad (13)$$

همچنین به منظور ابقاء پیوستگی در فصل مشترک نواحی کشسان و خمیری می‌توان نوشت:

$$U(\xi = 1) = U_\gamma \quad S(\xi = 1) = S_\gamma \quad (14)$$

که S_γ و U_γ از شرایط فصل مشترک نواحی کشسان و خمیری به دست می‌آیند.

با حذف متغیر بی‌بعد S ما بین معادلات ۱۱ و ۱۲ و صرف نظر کردن از جملات غیر خطی داریم:

$$(1 - \beta^2 \xi^2) \frac{dU}{d\xi} + \frac{\gamma U}{\xi} = -\gamma T \quad (15)$$

بنابراین جواب معادله‌ی دیفرانسیل ۱۵ به صورت:

$$U(\xi) = \frac{(U_\gamma \beta^2 + T)(1 - \beta^2 \xi^2)}{\beta^2 \xi^2 (1 - \beta^2)} - \frac{T}{\beta^2 \xi} + \frac{T(1 - \beta^2 \xi^2)}{\beta^2 \xi^2} \ln \left[\frac{(1 + \beta \xi)(1 - \beta)}{(1 - \beta \xi)(1 + \beta)} \right]$$

$$\varepsilon < \xi < 1 \quad (16)$$

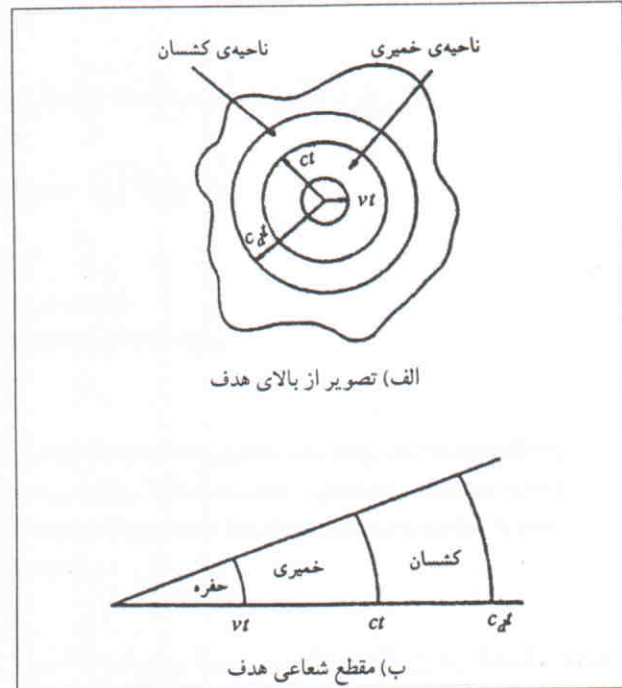
نوشته می‌شود. حال معادله‌ی ۱۶ را در معادله‌ی ۱۱ قرار داده و پس از انتگرال‌گیری، تابع $S(\xi)$ را به دست می‌آوریم. باید توجه داشت که انتگرال‌گیری از جمله‌ی آخر معادله‌ی ۱۱ با در نظر گرفتن این‌که $U.dU/d\xi = \frac{1}{2} d[U^2]/d\xi$ است بسیار ساده‌تر می‌شود و ثابت انتگرال‌گیری از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید. بنابراین:

$$S(\xi) = S_\gamma - \beta^2 (U^2 - U_\gamma^2) / 2 + \frac{\gamma (U_\gamma \beta^2 + T)(1 - \xi)}{\xi(1 - \beta^2)} - \gamma T \ln \xi + T \ln \left[\frac{1 - \beta^2 \xi^2}{1 - \beta^2} \right] + \frac{T}{\beta \xi} \ln \left[\frac{(1 + \beta \xi)(1 - \beta)}{(1 - \beta \xi)(1 + \beta)} \right]$$

$$\varepsilon < \xi < 1 \quad (17)$$

همچنین به منظور تعیین رابطه‌ی بی‌بعد برای سرعت ذره بر حسب متغیر بدون بعد β در مرز مشترک نواحی کشسان و خمیری با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۶ می‌توانیم بنویسیم:

$$\gamma \beta \varepsilon + \beta^2 \varepsilon^3 - \frac{\beta (U_\gamma \beta^2 + T)(1 - \beta^2 \varepsilon^2)}{(1 - \beta^2)}$$



شکل ۱. نواحی ایجاد شده در یک جسم تراکم‌پذیر.

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma v}{r} \right] = -\frac{D\rho}{Dt} \quad (5)$$

نوشته می‌شوند که در آنها:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \quad (6)$$

بوده و v ، سرعت شعاعی ذره به سمت خارج حفره، مثبت در نظر گرفته می‌شود.

با حذف ρ و σ_θ در معادلات ۴ و ۵ از طریق ادغام و به کارگیری معادلات ۱ تا ۳ داریم:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\gamma Y}{r} = \frac{-\rho_0}{(1 - \eta)} \cdot \frac{Dv}{Dt} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma v}{r} = \frac{-1}{K(1 - \eta)} \cdot \frac{D\sigma_r}{Dt} \quad (8)$$

که در این رابطه‌ها، با توجه به مطالعات و آزمایش‌های انجام شده و به علت کوچک بودن مقدار η می‌توان عبارت $(1 - \eta)$ را تقریباً برابر واحد اختیار کرد. با تعریف متغیرهای بی‌بعد به صورت:

$$S = \frac{\sigma_r}{K}, \quad T = \frac{Y}{K}, \quad U = \frac{v}{c}, \quad \varepsilon = \frac{V}{c} \quad (9)$$

و به کارگیری تبدیل:

$$\xi = \frac{r}{ct} \quad (10)$$

معادلات ۷ و ۸ چنین بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{dS}{d\xi} + \frac{\gamma T}{\xi} = \beta^2 (\xi - U) \frac{dU}{d\xi} \quad (11)$$

گرفته شده و جابه‌جایی‌ها به سمت خارج مثبت فرض می‌شوند. با معرفی متغیرهای بی بعد به شکل:

$$\xi = \frac{r}{ct} \quad \text{و} \quad \bar{u}(\xi) = \frac{u}{ct} \quad (28)$$

و نیز از دوباره‌نویسی معادله‌ی موج داریم:

$$(1 - \alpha^2 \xi^2) \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \frac{2 d\bar{u}}{\xi d\xi} - \frac{2}{\xi^2} \bar{u} = 0 \quad (29)$$

که در آن $\alpha = c/c_d$ اختیاری شده است. با تبدیل، $\bar{u} = z\phi$ ، $Z = \alpha\xi$ ، $F = d\phi/dZ$ ، معادله‌ی ۲۹ به یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود که از حل آن خواهیم داشت:

$$\bar{u} = A\alpha\xi - B \left(\frac{1 - 3\alpha^2 \xi^2}{3\alpha^2 \xi^2} \right) \quad (30)$$

که در آن ثابت‌های A و B از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{u}(\xi = 1/\alpha) = 0 \quad (31)$$

$$\sigma_r(\xi = 1) - \sigma_\theta(\xi = 1) = Y \quad (32)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{u}{ct} = \frac{T(1+\gamma)(1-\alpha\xi)(1+2\alpha\xi)}{9(1-2\gamma)(1-\alpha^2)\xi^2} \quad (33)$$

$$\frac{1}{c} \frac{du}{dt} = \frac{T(1+\gamma)(1-\alpha^2 \xi^2)}{3(1-2\gamma)(1-\alpha^2)\xi^2} \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_r}{K} = 2T(1-\alpha\xi) \times$$

$$\left[\frac{(1-2\gamma)(1+\alpha\xi) + (1+\gamma)\alpha^2 \xi^3}{3(1-2\gamma)(1-\alpha^2)\xi^3} \right]$$

$$1 < \xi < \frac{1}{\alpha} \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{K} = -T \left[\frac{(1-2\gamma) - 3\alpha^2 \xi^2 + 2(1+\gamma)\alpha^3 \xi^3}{3(1-2\gamma)(1-\alpha^2)\xi^3} \right]$$

$$1 < \xi < \frac{1}{\alpha} \quad (36)$$

در نتیجه با اعمال شرایط پیوستگی برای سرعت و تنش شعاعی در مرز مشترک دو ناحیه، و نیز به کارگیری روابط ۳۴ و ۳۵ داریم:

$$U_1 = \frac{T(1+\gamma)}{3(1-2\gamma)} \quad (37)$$

$$S_1 = \frac{2T}{3} \left[1 + \frac{(1+\gamma)\alpha^2}{(1-2\gamma)(1+\alpha)} \right] \quad (38)$$

$$-\frac{T(1-\beta^2 \varepsilon^2)}{2} \ln \left[\frac{(1+\beta\varepsilon)(1-\beta)}{(1-\beta\varepsilon)(1+\beta)} \right] = 0 \quad (18)$$

شرایط فصل مشترک

نواحی کشسان و خمیری و مرز مشترک آنها در این مسئله به گونه‌ی است که پیوستگی جرم و اندازه‌ی حرکت در عبور از این مرز بین دو ناحیه برقرار است، به طوری که اگر اندیس ۱ مربوط به ناحیه‌ی کشسان در مرز بین دو ناحیه و اندیس ۲ برای ناحیه‌ی خمیری در مرز بین دو ناحیه (که برای هر دو داریم $\xi = 1$) باشند خواهیم داشت:

$$U_1 = 1 - \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \right] (1 - U_1) \quad (19)$$

$$S_1 = S_1 + \beta^2 \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \right] (1 - U_1)(U_1 - U_1) \quad (20)$$

با توجه به معیار تسلیم فون میسز و روابط کرنش حجمی ۱ و ۲ که در هر طرف فصل مشترک دو ناحیه برقرارند، تنش‌های بدون بعد شعاعی در فصل مشترک عبارت‌اند از:

$$S_1 = 2T/3 + \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] \quad (21)$$

$$S_2 = 2T/3 + \left[1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \quad (22)$$

با حذف ρ_1 و ρ_2 مابین معادلات فوق می‌توان به این نتیجه رسید که هیچ‌گونه تغییر ناگهانی در عبور از مرز دو ناحیه برای مقادیر تنش و سرعت موجود نیست، بنابراین داریم:

$$U_1 = U_2 \quad \text{و} \quad S_1 = S_2 \quad (23)$$

رفتار ناحیه‌ی کشسان

معادله‌ی موج در ناحیه‌ی کشسان به صورت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_d^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (24)$$

نوشته می‌شود که در آن:

$$c_d^2 = \frac{E(1-\gamma)}{(1-\gamma)(1-2\gamma)\rho_0} \quad (25)$$

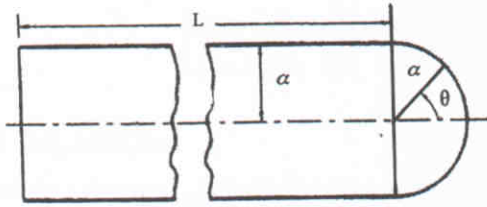
همچنین روابط تنش - تغییر مکان عبارت‌اند از:

$$\sigma_r = -\frac{E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)} \left[(1-\gamma) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\gamma \frac{u}{r} \right] \quad (26)$$

و

$$\sigma_\theta = -\frac{E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)} \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (27)$$

که در این روابط مقادیر تنش‌ها برای حالت فشاری مثبت در نظر



شکل ۲. شکل هندسی میله‌ی صلب.

که در آن ρ_p دانسیته‌ی میله است، و متغیرهای L و a نیز در شکل ۲ مشخص شده‌اند.

با توجه به این‌که تنش شعاعی، تنش نرمال در نوک میله در نظر گرفته می‌شود، و نیز با توجه به قانون دوم نیوتن عمق نفوذ نهایی عبارت است از:

$$\frac{P}{\left[L + \frac{2a}{3}\right]} = \frac{(\rho_p / \rho_t)}{B_s} \ln \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{B_s}{A_s} \right] \left[\frac{\rho_t V_z^2}{Y} \right] \right] \quad (45)$$

مقایسه‌ی نتایج روش نظری و آزمایش‌های تجربی
 برای مواد تراکم‌پذیر، و برای یک میله‌ی صلب با سرکروی، و نیز یک جسم نیمه بی‌نهایت با رفتار کشسانی - خمیری کامل مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم:
 مشخصات میله:

$$\begin{aligned} a &= 3/55 \text{ mm} \\ L &= 71/12 \text{ mm} \\ \rho_p &= 8000 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

مشخصات هدف:

$$\begin{aligned} AL &= 61 - T651 \\ \rho_p &= 2710 \text{ kg/m}^3 \\ Y &= 340 \text{ Mpa} \\ \gamma &= 0/33 \end{aligned}$$

با تعیین A_s از رابطه‌ی ۴۲ و به کارگیری معادله‌ی ۴۵ می‌توانیم نمودارهایی برای تغییرات عمق نفوذ برحسب سرعت برخورد به دست آوریم (شکل‌های ۳ و ۴). در شکل ۳ نمودار تغییرات عمق نفوذ برحسب سرعت برخورد که از معادله‌ی ۴۵ استنتاج شده است با نمودار به دست آمده از آزمایش‌های تجربی مقایسه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نزدیکی نمودارهای به دست آمده صحت روابط نظری را مورد تأیید قرار می‌دهد.

نتیجه‌گیری

با مطالعه‌ی نمودارهای ارائه شده که حاصل روش نظری و

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که با تعیین β ، U_p و S_p به ترتیب از معادلات ۱۸، ۳۷ و ۳۸ تنش شعاعی در ناحیه‌ی خمیری که به وسیله‌ی رابطه‌ی ۱۷ تعیین شده، قابل محاسبه است. همچنین برای تعیین تنش شعاعی در ناحیه‌ی کشسان که توسط رابطه‌ی ۳۵ تعیین شده، مقدار α برحسب β به صورت رابطه‌ی ۳۹ است:

$$\alpha = \left(\frac{c_p}{c_d} \right) \beta = \left[(1 + \gamma) / 3(1 - \gamma) \right]^{1/2} \beta \quad (39)$$

رفتار نیمه ساکن

در حالتی که سرعت ایجاد حفره کم باشد می‌توانیم از تأثیر اینرسی در مسئله چشم‌پوشی کرده و فرض کنیم که حفره‌ی کروی متقارن، در اثر یک فشار داخلی محدود ایجاد می‌شود. بنابراین برای سرعت ناچیز ایجاد حفره، فشار محدودی در دیواره‌ی حفره وجود دارد که به صورت زیر است:

$$\sigma_s = \frac{2Y}{3} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{E}{3(1 - \gamma)Y} \right] \right\} \quad (40)$$

و با نتایج محاسباتی که توسط هیل^[۳] ارائه شده موافقت دارد. همچنین شکل بدون بعد رابطه‌ی ۴۰ چنین است:

$$S_s = \frac{2T}{3} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{(1 - 2\gamma)}{(1 - \gamma)T} \right] \right\} \quad (41)$$

مدل نفوذ

در مورد مواد تراکم‌پذیر در حالتی که V به صفر برسد، طبق نظریه‌ی هیل^[۳] داریم:

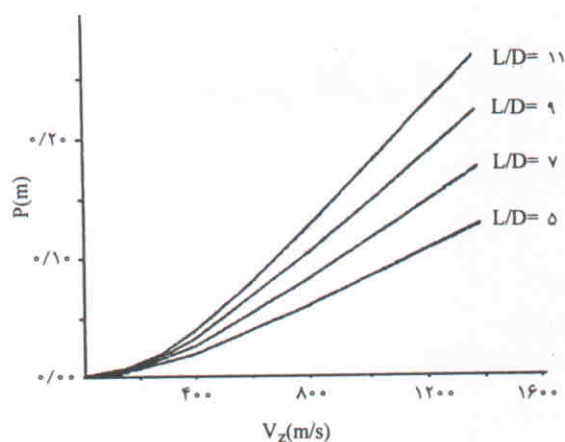
$$A_s = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{(1 - 2\gamma)K}{(1 - \gamma)Y} \right] \right\} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \ln \left[\frac{E}{3(1 - \gamma)Y} \right] \right\} \quad (42)$$

همچنین برای مقادیر تنش‌ها، در حالت تراکم‌پذیری می‌توانیم نتایج به دست آمده را طبق رابطه‌ی:

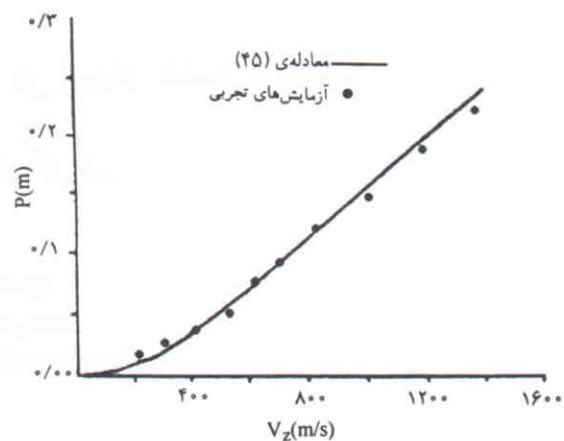
$$\frac{\sigma_r(\varepsilon)}{Y} = A_s + \frac{B_s \rho_t V_z^2}{Y} \quad (43)$$

با نتایج آزمایشگاهی متناسب کنیم. متغیرهای A_s و B_s تنها به جنس ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی هدف بستگی دارند. متغیر A_s توسط رابطه‌ی ۴۲ داده شده و متغیر B_s تقریباً برابر $1/0.4$ است. حال میله‌ی فلزی را از نقطه نظر هندسی مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم. برای جرم میله می‌توانیم بنویسیم:

$$m = \pi a^2 \rho_p (L + 2a/3) \quad (44)$$



شکل ۴. منحنی تغییرات عمق نفوذ برحسب سرعت برخورد برای L/D های متفاوت (معادله ۴۵).



شکل ۳. منحنی تغییرات عمق نفوذ برحسب سرعت برخورد برای $a=3/55$ و $L=71/12$.

ویژگی و اهمیت آن را بارز می‌سازد.
 ۲. همان‌طور که انتظار می‌رود افزایش سرعت اولیه می‌باعث بیشتر شدن عمق نفوذ می‌شود.
 ۳. با مشاهده منحنی‌های به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که با بالا رفتن نسبت L/D ، عمق نفوذ افزایش می‌یابد.

آزمایش‌های تجربی هستند به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:
 ۱. روش نظری بیان شده که به منظور پیش‌بینی عمق نفوذ برحسب سرعت‌های برخورد منجر به معادله ۴۵ می‌شود، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.
 نزدیکی نتایج به دست آمده با نتایج ناشی از آزمایش‌های تجربی

پانوش

1. elastic-plastic
2. quasi-static

منابع

1. Bishop, R.F. Hill, R. and Mott, N.F. "The Theory of Indentation and Hardness Tests", *Proc. Roy. Soc.* **57**, Part 3, PP. 147-159 (1945).
2. Goodier, J.N. "On the Mechanics of Indentation and Cratering in Solid Targets of Strain-Hardening Metal by Impact of Hard and Soft Spheres" *ALAA*, New York PP. 215-259 (1965).
3. Hill, R. **The Mathematical Theory of Plasticity** Oxford University Press, London (1950).
4. Hopkins, H.G. "Dynamic Expansion of Spherical Cavities in Metals, *Progress in Solid Mechanics*", **1**, Chapter III (Edited

- by I.N. Sneddon and R.Hill). North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York (1960).
5. Forrestal, M.J. Okajima, K. and Luk, V.K. "Penetration of 6061-T651 Aluminum Targets with Rigid Long Rods." *J.Appl. Mech.* **55**, PP. 755-760 (1988).
6. Forrestal, M.J. Brar, N.S. and Luk, V.K. "Penetration of Strain-Hardening Targets with Rigid Spherical-Nose Rods", *J.Appl. Mech.* **58**, PP.7-10 (1991).
7. Anderson, C.E. Walker, J.D. and Hauver, G.E. "Target Resistance for Long-Rod Penetration into Semi-Infinite Targets", *Nuclear Engng Design*, **138**, PP. 93-104 (1992).
8. Chen, E.P. "Numerical Simulation of Penetration of Aluminum Targets by Spherical-Nose Steel Rods", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **22**, PP. 159-164 (1995).