بافت‌های پشت ران و پشت ساق به هم امری اجتناب ناپذیر است؛ و با توجه به این‌که در این مدل این موضوع در نظرگرفته نشده، نمی‌توان از نتایج به‌دست آمده برای زوایای زیر ۴۰ درجه‌ی زانو استفاده کرد.

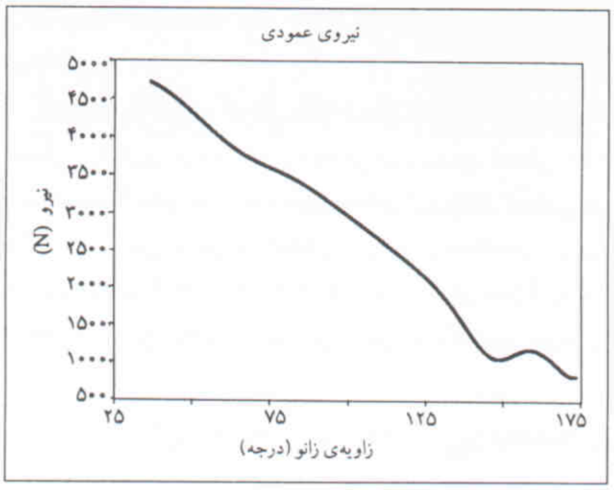
تنها مطالعه‌ی یافت شده‌ی پیشین در زمینه‌ی تحلیل نیروهای مفصلی در حالت خمش عمیق زانو[۷] نیز مدل به‌صورت دوبعدی در نظر گرفته شده است. اما برای کاهش تعداد مجهولات و تبدیل مسئله به یک مسئله‌ی معین، فرض‌های متعدد اضافی به‌عمل آمده است. از جمله، فرض شده است که تنها شش گروه ماهیچه وجود دارند که ماهیچه‌های هر گروه با هم فعال یا غیرفعال می‌شوند، گروه‌های ماهیچه‌ها تنها به‌صورت هماورد[۱۷] عمل می‌کنند و حول هر مفصل گشتاوری مساوی اعمال می‌کنند.

در مدل حاضر، تعداد گروه‌های ماهیچه‌یی به ۹ عدد افزایش یافته و با اجتناب از فرض‌های اضافی فوق، مسئله نامعین حاصله با روش بهینه‌سازی مورد تحلیل قرار گرفته است.

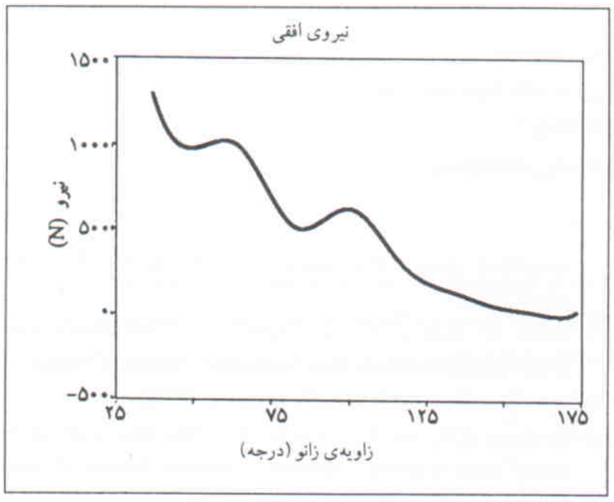
از نیروهای محاسبه شده برای ماهیچه‌ها می‌توان نتیجه گرفت که در هر گروه ماهیچه، شامل ماهیچه‌های تک‌مفصلی و دومفصلی، ماهیچه‌ی دومفصلی در شروع حرکت فاقد فعالیت و یا دارای فعالیتی اندک است. به‌نظر می‌رسد که علت این امر غیر هم جهت بودن گشتاور حاصل از نیروهای خارجی بر روی مفاصل مجاور هم (مچ و زانو یا زانو و لگن) در شروع حرکت باشد که به نیروی زیادی نیاز دارد. به عبارت دیگر، اگر ماهیچه‌ی دومفصلی فعال شود، با وجود این‌که به تعادل گشتاور حول یک مفصل کمک می‌کند، از آنجا که هنگام اعمال نیرو طول آن افزایش می‌یابد، در مفصل دیگر کار منفی انجام می‌دهد. به‌عنوان مثال، اگر در شروع حرکت ماهیچه‌ی راست رانی فعال شود، موجب پیدایش گشتاور خم‌کننده در مفصل لگن می‌شود که این گشتاور در جهت خلاف حرکت عمل می‌کند. در مقابل، در انتهای حرکت، فعال‌شدن ماهیچه‌ی راست رانی و اعمال گشتاور خم‌کننده در مفصل لگن در خلاف جهت حرکت، موجب افزایش پایداری و تعادل بدن می‌شود. درمورد ماهیچه‌های نعلی و دوقلو که در گروه ماهیچه‌های پشت ساق قرار دارند و ماهیچه‌های سرینی و سرینی بزرگ سطحی نیز این امر صادق است.

برای گروه ماهیچه‌های پشت ران، شامل ماهیچه‌های نیمه‌غشایی و نیمه‌وتری و دو سررانی بلند، با توجه به این‌که همه‌ی این ماهیچه‌ها دومفصلی‌اند، می توان مشاهده کرد که همه‌ی آنها در تمامی مدت حرکت فعال‌اند ونیروی آنها به گونه‌یی است که مجموع گشتاورهای آنها حول مفصل لگن با گشتاور حاصله از نیروهای ماهیچه‌های سرینی حول مفصل لگن برابر است.

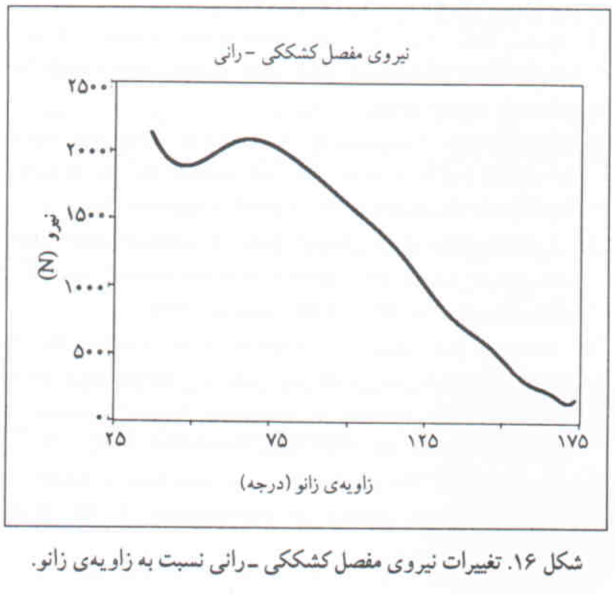
از نیروهای محاسبه شده برای مفاصل می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین نیرو در مفصل درشت‌نئی ـ رانی در لحظات آغازین حرکت



شکل ۱۴. تغییرات نیروی عمودی مفصل درشت‌نئی ـ رانی نسبت به زاویه‌ی زانو.



شکل ۱۵. تغییرات نیروی افقی مفصل درشت‌نئی ـ رانی نسبت به زاویه‌ی زانو.



شکل ۱۶. تغییرات نیروی مفصل کشککی ـ رانی نسبت به زاویه‌ی زانو.

ماتریس ژاکوبی و کارایی سینماتیکی

ماتریس ژاکوبی (J) برای یک بازوی مکانیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

هر حال ذکر یک نکته، آن هم به دلیل تکیه بر خصوصیات سینماتیکی ضروری به نظر می‌رسد. ماتریس ژاکوبی به شکلی که در رابطه‌های ذکر شده ۲ و ۳است، ارتباط بین دو دسته کمیت را مطرح می‌سازد. این

دو دسته کمیت که ماهیت سینماتیکی دارند، همان حرکات اعمال شده به مفاصل و حرکات مربوط به مچ هستند. همچنین با دقت بیشتر در جزئیات به کار رفته در تعریف ماتریس ژاکوبی در می‌یابیم که اجزاء ماتریس ژاکوبی نیز همه از کمیت‌های سینماتیکی محسوب می‌شوند. یعنی عناصر این ماتریس از کمیت‌هایی مثل طول اعضا و زوایای بین آنها تشکیل شده است که همه از مقوله‌ی کمیت‌های سینماتیکی محسوب می‌شوند. بدین ترتیب می‌توان گفت ماتریس ژاکوبی ماهیتی سینماتیکی دارد و با تغییر عناصر آن، کیفیت عملکرد سینماتیکی بازوی مکانیکی ربات تحت تأثیر قرار می‌گیرد. پس به طور خلاصه می‌توان گفت: ماتریس ژاکوبی در بردارنده‌ی کلیه‌ی ویژگی‌های سینماتیکی بازوی مکانیکی ربات است، هر چند ترانهاده‌ی آن بین کمیت‌های نیرو نیز ارتباط برقرار کند، یا در زمینه‌های دیگری مثل کنترل بازوی مکانیکی به کار رود. حال می‌توان ماتریس ژاکوبی را با استفاده از قضیه‌ی تجزیه مقدار منفرد[۸](SVD) به سه ماتریس با ویژگی‌های خاص تجزیه کرد. بدین ترتیب عملکرد ماتریس ژاکوبی در نگاشتی که بین دو فضای مربوط به حرکت مفاصل و حرکت مچ انجام می‌دهد، آشکارتر می‌شود.

تجزیه‌ی مقدار منفرد (SVD)

اگر $(n \geq m)$، $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ و $\mathrm{rank}(\mathbf{J}) = k, (k \leq m)$ باشد، همواره یک ماتریس قطری $\mathbf{D}$ و دو ماتریس متعامد $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ وجود خواهند داشت، به طوری که:[۵و۷]

$$\mathbf{J} = \mathbf{UDV}^T \tag{۵}$$

برای $\mathbf{U}$، $\mathbf{V}$ و $\mathbf{D}$ داریم:

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\right] \in \mathbf{R}^{m\times m}, \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}_{m\times m} \tag{۶}$$

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\right] \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_{n\times n} \tag{۷}$$

$$\mathbf{D} = \left[diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \;\vdots\; 0_{m\times(n-m)}\right] \in R^{m\times n} \tag{۸}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_m = 0 \tag{۹}$$

لازم به ذکر است که ستون‌های ماتریس $\mathbf{U}$، از بردارهای ویژه‌ی راست هنجار ماتریس $\mathbf{JJ}^T$ درست شده‌اند. زیرا به کمک معادلات ۵، ۶و ۸ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{JJ}^T &= \mathbf{UDD}^T\mathbf{U}^T \\ \mathbf{JJ}^T\mathbf{u} &= \mathbf{UDD}^T\mathbf{U}^T\mathbf{u}_i \\ &= \sigma_1^2\mathbf{u}_i \;,\quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{۱۰}$$

و ستون‌های ماتریس $\mathbf{V}$، از بردارهای ویژه‌ی راست هنجار ماتریس $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ درست شده‌اند. زیرا به کمک معادلات ۵، ۷ و ۸ چنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^T\mathbf{J} &= \mathbf{VD}^T\mathbf{DV}^T \\ \mathbf{J}^T\mathbf{JV}_1 &= \mathbf{VD}^T\mathbf{DV}^T\mathbf{v}_i \\ &= \sigma_1^2\mathbf{v}_i \;, i = 1, 2, \dots, m \\ &= ov_1, i = m+1, \dots, n \end{aligned} \tag{۱۱}$$

در ضمن عناصر قطری $\mathbf{D}$ که با $\sigma_1 (i = 1, 2, \dots, m)$ نشان داده شده‌اند و آنها را مقادیر منفرد می‌گویند، جذر مقادیر ویژه‌ی $\mathbf{JJ}^T$ هستند. فرض بر این است که مقادیر منفرد به ترتیب نزولی مرتب شده‌اند. نسبت بزرگ‌ترین مقدار منفرد به کوچک‌ترین مقدار منفرد را عدد شرط[۹] ماتریس ژاکوبی می‌گویند.

$$k = \sigma_1 / \sigma_m \tag{۱۲}$$

حال کمترین عدد شرط قابل دسترسی برای ماتریس ژاکوبی در تمام فضای کاری بازوی مکانیکی ربات را $\mathrm{K_m}$ می‌نامیم. برحسب این مقدار، شاخص شرط سینماتیکی[۱۰] چنین تعریف می‌شود:

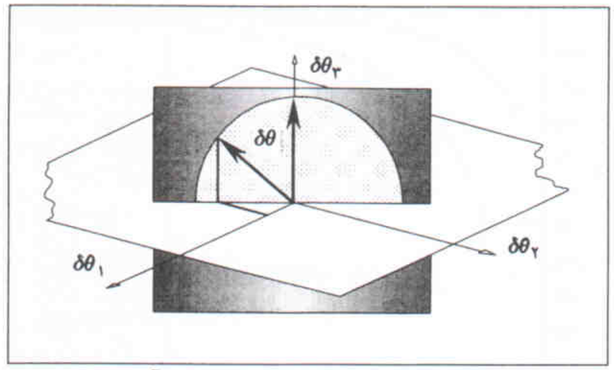
$$K_{c1} = 1/k_m \tag{۱۳}$$

در روش طراحی همسانگرد این شاخص باید بیشترین مقدار ممکن، یعنی عدد یک را داشته باشد. به عبارت دیگر در طراحی همسانگرد سعی می‌شود تمامی مقادیر منفرد ماتریس ژاکوبی یکسان و غیر صفر باشند.

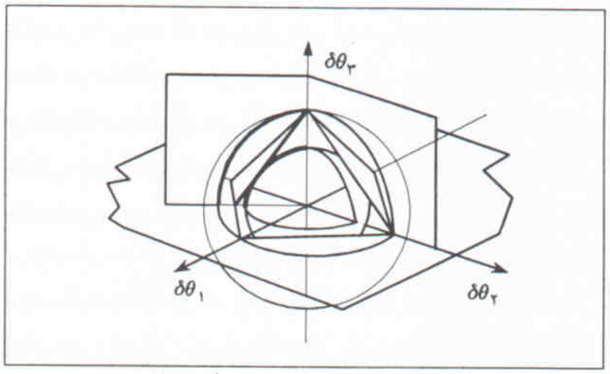
اکنون که به کمک قضیه‌ی تجزیه‌ی مقدار منفرد، ماتریس ژاکوبی به سه ماتریس تجزیه شده است و مقادیر منفرد، عدد شرط و شاخص شرط سینماتیکی معرفی شده‌اند، به بحث پیرامون مفهوم آنها و نحوه‌ی عملکرد سینماتیکی بازوی مکانیکی می‌پردازیم. برای این منظور حرکت بسیار کوچکی را به مفاصل اعمال می‌کنیم. اگر بردار $\delta\theta$ی مربوط به این حرکت در راستای بردار ویژه‌ی ماتریس $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ باشد، آنگاه بردار جابه‌جایی بسیار کوچک مچ یعنی δr، می‌تواند در راستای بردار ویژه‌ی ماتریس $\mathbf{JJ}^T$ باشد. زیرا:

$$\begin{aligned} \mathbf{JJ}^T\delta\mathbf{r} &= \mathbf{J}(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\theta) \\ &= \mathbf{J}(\lambda\delta\theta) \\ &= \lambda(\mathbf{J}\delta\theta) \\ &= \lambda\delta\mathbf{r} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

در این معادله مقدار ویژه‌ی λ برابر صفر یا مجذور یکی از مقادیر منفرد است. این مطلب با توجه به معادله‌ی ۱۱ واضح به نظر می‌رسد. معادله‌ی ۱۴ حاوی نکته‌ی مهم دیگری نیز هست. به کمک این معادله معلوم می‌شود که اعمال هر حرکتی به مفاصل، لزوماً در مچ ایجاد



شکل ۱. فضای حرکت مفاصل ربات ۳ درجه‌ی آزادی.



شکل ۲. گوی قدر مطلق محصور به دو گوی اقلیدسی.

حرکت نمی‌کند. زیرا هر بردار $\delta\theta$ که از ترکیب خطی بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه‌ی صفر ماتریس $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ درست شده باشد، صفر شدن $\mathbf{JJ}^T\delta r$ را در پی خواهد داشت. چنانچه هیچ مقدار منفردی صفر نباشد، $det\,(\mathbf{JJ}^T) \neq 0$ است. لذا بردار δr یعنی بردار جابه‌جایی بسیار کوچک مچ صفر خواهد بود. حال حرکت بسیار کوچک اعمال شده به مفاصل، یعنی بردار $\delta\theta$ را در راستای یکی از m ستون اول ماتریس $\mathbf{V}$ انتخاب می‌کنیم. یعنی:

$$\delta\theta = \alpha V_1, \quad i = 1, 2, ..., m \tag{۱۵}$$

به کمک معادله‌ی ۱۴ مشخص می‌شود که حرکت بسیار کوچک مچ یعنی بردار δr، در راستای یکی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{U}$ است. این مطلب به طریق دیگری نیز قابل اثبات است که ترجیحاً به آن اشاره می‌کنیم. برای این منظور در معادله‌ی ۳، تجزیه‌ی مقدار منفرد ماتریس ژاکوبی را قرار می‌دهیم و از شرط بیان شده در معادله‌ی ۱۵ استفاده می‌کنیم. نتیجه چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r} &= \mathbf{UDV}^T\delta\theta \\ &= \mathbf{UDV}^T(\alpha v_1) \\ &= \alpha\sigma_1\mathbf{u}_1, \; i = 1, 2, \ldots m\end{aligned} \tag{۱۶}$$

این معادله علاوه بر نمایش مطلب قبلی، نکات دیگری را نیز آشکار می‌سازد. مشاهده می‌شود که تحت شرط بیان شده در معادله‌ی ۱۵ بزرگی بردار حرکت مچ، σ_i برابر بزرگی بردار حرکت اعمال شده به مفاصل است. حال اگر مقدار منفردی صفر بود، بزرگی بردار حرکت مچ صفر است، یعنی مچ حرکت نخواهد کرد. همچنین اگر تمامی مقادیر منفرد یکسان و غیر صفر باشند، مچ در تمامی جهات یکسان حرکت خواهد کرد. عدد شرط یا شاخص شرط سینماتیکی برابر با یک، متناظر با همین مفهوم است. اگر مقادیر منفرد یکسان نباشند، عدد شرط مبین نسبت بزرگ‌ترین حرکت مچ به کوچک‌ترین حرکت مچ است. در این حالت، شاخص شرط سینماتیکی نشان‌دهنده‌ی بزرگ‌ترین نسبت مزبور است. به‌جز این نکات که همه گویای ویژگی‌های حرکتی بازوی مکانیکی ربات هستند، باید به نکته‌ی دیگری نیز توجه داشت. در تمامی موارد ذکر شده بزرگی بردار حرکت اعمال شده به مفاصل یا بزرگی بردار حرکت ایجاد شده در مچ، نقشی اساسی و مهم دارد. این بزرگی برای هر دو نوع بردار با نرم اقلیدسی سنجیده می‌شود. چنانچه برای مچ بازوی مکانیکی فقط وظیفه‌ی نهشی[۱۱] متصور شویم، نرم اقلیدسی بر بزرگی جابه‌جایی یا بزرگی سرعت مچ دلالت دارد و از نظر فیزیکی کاملاً توجیه‌پذیر است. اما بزرگی بردار حرکت اِعمال شده به مفاصل در صورتی که با نرم اقلیدسی سنجیده شود در تطابق با هیچ مفهوم فیزیکی خاصی قرار نمی‌گیرد. پرسشی که هم اکنون مطرح می‌شود این است: آیا حرکات اعمال شده به مفاصل که با نرم اقلیدسی یکسان است، و بر یکسان بودن یک کمیت فیزیکی نیز دلالت دارد؟ در واقع این پرسش به این دلیل طرح می‌شود که حرکت دورانی هر مفصل از نظر فیزیکی دقیقاً معنای مشخصی دارد. ولی جذر مجموع مجذور حرکات اعمال شده به مفاصل، با یک مفهوم فیزیکی مطابقت ندارد. برای مثال در شکل ۱ دو بردارِ نشان داده شده می‌توانند نرم اقلیدسی یکسانی داشته باشند، در حالی که مجموع مؤلفه‌های آنها، یعنی جمع خالص دوران مفاصل برای دو حالت متفاوت است. همین امر سبب می‌شود که نتوانیم دستیابی به مقادیر منفرد یکسان را در تناظر با امکان بالقوه حرکتی یکسان در هر جهت برای مچ قرار دهیم. برای رفع چنین نقصی برای بردار حرکات اعمال شده به مفاصل نرم قدر مطلق یا نرم یک را پیشنهاد می‌کنیم، که شرح مفصل آن در قسمت بعد خواهد آمد.

نُرم پیشنهادی

تا اینجا از نرم اقلیدسی برای سنجش بزرگی بردار حرکات اعمال شده به مفاصل و بزرگی بردار حرکات ایجاد شده در مچ استفاده شد. به عبارت دیگر در فضای سرعت‌های مفصلی و فضای سرعت مچ، نرم به کار برده شده اقلیدسی است. نرم اقلیدسی در فضای سرعت مچ

اندازه‌یی را می‌دهد که مفهوم فیزیکی آن همان تندی است، اما در فضای سرعت‌های مفصلی بر مفهوم فیزیکی معقولی دلالت ندارد. می‌دانیم که سرعت زاویه‌یی هر مفصل مؤلفه‌یی از بردار سرعت‌های مفصلی، $\dot{\theta}$، است. در ضمن سرعت زاویه‌یی هر مفصل مفهوم فیزیکی مشخصی دارد. از این‌رو به‌جاست که در اندازه‌گیری بردار سرعت‌های مفصلی، $\dot{\theta}$، نیز به نوعی از اندازه‌ی همین مؤلفه‌ها استفاده شود ــ البته به‌گونه‌یی که برای اندازه‌ی بردار سرعت‌های مفصلی بتوان مفهوم فیزیکی معقولی ارائه داد. یک پیشنهاد مناسب برای این منظور استفاده از نرم قدر مطلق یا نرم یک $(\|\cdot\|_1)$ است. با استفاده از این نرم برای بزرگی بردار $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \ \dot{\theta}_2, \ \dots, \ \dot{\theta}_n]^T$، یعنی بردار سرعت‌های مفصلی، خواهیم داشت:

$$\|\dot{\theta}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\dot{\theta}_1| \qquad (17)$$

بدین ترتیب اندازه‌ی بردار سرعت‌های مفصلی، منطبق بر اندازه‌ی نرخ چرخش خالص کل مفاصل بازوی مکانیکی ربات، و از نظر فیزیکی کاملاً موجه است. در ضمن اگر از بردار تغییر بسیار کوچک در متغیرهای مفصلی، یعنی $\delta\theta$، به‌جای بردار سرعت‌های مفصلی به عنوان ورودی سینماتیکی به بازوی مکانیکی ربات استفاده کنیم، باز به‌کارگیری نرم یک با معنی خواهد بود. در این حالت بردار تغییر بسیار کوچک در متغیرهای مفصلی از مؤلفه‌های $\delta\theta_1$ یعنی دوران‌های بسیار کوچک هر مفصل تشکیل شده است و برای اندازه‌ی این بردار براساس نرم قدر مطلق خواهیم داشت:

$$\|\delta\theta\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\delta\theta_1| \qquad (18)$$

اندازه‌ی مزبور برای بردار تغییر بسیار کوچک در متغیرهای مفصلی، منطبق بر دوران یا چرخش خالص کل مفاصل بازوی مکانیکی ربات است، که از نظر فیزیکی با معنی و توجیه‌پذیر است.

هم‌ارزی توپولوژیکی نُرم‌ها

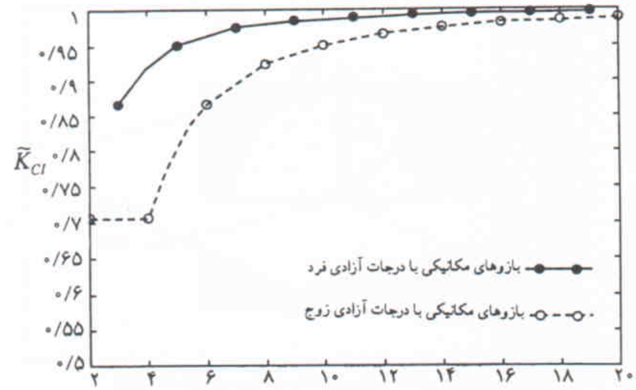
دو نرم روی یک فضای برداری مثل فضای برداری حرکت بسیار کوچک مفاصل معادلند، اگر توپولوژی یکسانی را تعریف کنند. حال می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای معادل بودن دو نرم $\|*\|_1$ و $\|*\|_2$ روی فضای برداری مزبور این است که ثابت‌های a_1 و a_2 وجود داشته باشند به قسمی که نامساوی زیر برقرار باشد.[۸و۹]

$$\alpha_1 \|\delta\theta\|_1 \le \|\delta\theta\|_2 \le \alpha_2 \|\delta\theta\|_1 , \forall\delta\theta \in \tilde{V} \qquad (19)$$

یا دو نرم $\|*\|_1$ و $\|*\|_2$ روی یک فضای برداری مثل فضای برداری حرکت مفاصل معادل‌اند اگر و تنها اگر:[۱۰و۱۱]

$$\forall\delta\theta \in \tilde{V}, \exists k > 0, \ni, \frac{\|\delta\theta\|_1}{k} \le \|\delta\theta\|_2 \le k\,\|\delta\theta\|_1 \qquad (20)$$

در اینجا معادل بودن توپولوژیکی به‌معنی قرارگیری یک گوی اقلیدسی بین دو گوی قدر مطلقی است. در ضمن می‌توان نشان داد که در فضای برداری حقیقی یا مختلط با بعد محدود، همه‌ی نرم‌ها معادل‌اند. این مطلب در قالب یک قضیه قابل بیان است.[۸-۱۲] با توجه به محدود بودن بعد فضای سرعت‌های مفصلی یا فضای تغییر بسیار کوچک در متغیرهای مفصلی، از این قضیه و مفهوم معادل بودن توپولوژیکی نرم‌ها می‌توان استفاده کرد. حال در فضای سرعت‌های مفصلی یا فضای تغییر بسیار کوچک در متغیرهای مفصلی، بردارهایی را انتخاب می‌کنیم که نرم قدر مطلقی آنها یکسان است. چنین بردارهایی در فضای مذکور یک گوی قدر مطلقی را مشخص می‌کنند. معادل بودن توپولوژیکی نشان می‌دهد دو گوی اقلیدسی می‌توانند این گوی را احاطه کنند. شکل ۲ این حالت را برای یک بازوی مکانیکی سه درجه‌ی آزادی نشان می‌دهد.



شکل ۳. تغییرات شبه شاخص شرط سینماتیکی $\tilde{K}_{CI}$ بر حسب تعداد درجات آزادی.

طراحی براساس معیار شبه همسانگردی[۱۲]

یادآور می‌شویم که برای طراحی بازوی مکانیکی ربات، دست‌یابی به قابلیت حرکت شبه یکسان مچ در همه‌ی جهات را معیار قرار داده‌ایم. این معیار اساس طراحی شبه همسانگرد را شکل می‌دهد. با توجه به تعریف ربات‌های صنعتی، که چندکاره بودن[۱۳] از مشخصه‌های آن محسوب شده است، معیار مزبور موجه به نظر می‌رسد. حال اگر تمامی بازوهای مکانیکی را در یک مجموعه بگنجانیم و به فرض همه‌ی آنها را در نظر بگیریم، قطعاً براساس معیار ذکر شده باید بین همه مقایسه‌یی را انجام دهیم، تا جواب مناسب پیدا شود. واضح است که برای حفظ اعتبار قیاس بایستی کمیتی را در همه حال یکسان در

نظر گرفت. این کمیت به حرکات اعمال شده به مفاصل برمی‌گردد. پس حرکات اعمال شده به مفاصل در همه حال بایستی از یک ویژگی یکسان برخوردار باشند، تا بتوان حرکت ایجاد شده در مچ بازوی مکانیکی را با توجه به معیار شبه همسانگردی مورد ارزیابی قرار داد. حال اگر زیر فضایی از فضای سرعت‌های مفصلی که توسط mستون اول ماتریس $\mathbf{V}$ گسترش می‌یابد را در نظر بگیریم، آنگاه همه‌ی بردارهای متعلق به این زیرفضا، در صورتی که هیچ مقدار منفردی صفر نباشد، برای مچ ایجاد حرکت خواهند کرد. این زیرفضا را $\breve{V}$ می‌نامیم. در ضمن بردارهایی که متعلق به مکمل این زیرفضا باشند، در همه حال برای مچ ایجاد حرکت نخواهند کرد. پس در زیرفضای مزبور به انتخاب همه‌ی بردارهایی می‌پردازیم که بزرگی یکسانی دارند. چنانچه برای اندازه‌گیری بزرگی از نرم اقلیدسی استفاده کنیم، مساوی و غیر صفر بودن همه‌ی مقادیر منفرد متناظر با دست‌یابی به حرکت یکسان مچ در همه‌ی جهات است. اما مشاهده شد که بزرگی اقلیدسی یکسان در تطابق با مفهوم فیزیکی خاصی قرار نمی‌گیرد و برای رفع این نقیصه نرم یک را پیشنهاد کردیم. پس اکنون در زیرفضای گسترانده شده به وسیله‌ی mستون اول ماتریس $\mathbf{V}$ همه‌ی بردارهایی را انتخاب می‌کنیم که نرم قدر مطلق آنها یکسان باشد. با اعمال چنین حرکاتی به مفاصل، مچ نیز حرکاتی خواهد داشت که بزرگی همه‌ی آنها را در مجموعه‌ی S_w قرار می‌دهیم.

$$S_w = \left\{ \|\mathbf{J}\delta\theta\|_{۲} \ \mid \ \forall \delta\theta \in \breve{V} \wedge \|\delta\theta\|_{۱} = ۱ \right\} \qquad (۲۱)$$

اکنون کمیتی را که بتوان در اظهار معیار شبه همسانگردی به کار برد تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{k} = \frac{sup\,(S_w)}{inf\,(S_w)} \qquad (۲۲)$$

این کمیت را «شبه عدد شرط» می‌نامیم. حال در تمام فضای کاری بازوی مکانیکی کم‌ترین «شبه عدد شرط» قابل حصول را $\breve{k}_m$ و بر حسب آن «شبه شاخص شرط سینماتیکی» را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\breve{k}_{CI} = ۱/\breve{k}_m \qquad (۲۳)$$

چنانچه مقدار «شبه شاخص شرط سینماتیکی» به عدد ۱ نزدیک شود، می‌توان گفت به قابلیت حرکت شبه یکسان مچ در همه‌ی جهات یا خواسته‌ی همسانی جهات مختلف برای حرکت مچ دست یافته‌ایم. اگر این مقدار دقیقاً برابر ۱ شود، برای مچ هیچ جهتی از ارجحیت خاصی برای حرکت کردن برخوردار نیست و همه‌ی جهات برای حرکت مچ یکسان‌اند. چنین وضعیتی تنها برای تعداد درجات آزادی بسیار زیاد میسر است. لذا معیار شبه همسانگردی را به‌کمک تعریف

جدول ۱. مقادیر $\breve{K}_{CI}$ بر حسب n تعداد درجات آزادی.

n	$\breve{K}_{CI}$	n	$\breve{K}_{CI}$	n	$\breve{K}_{CI}$
۲	۰/۷۰۷۱	۳	۰/۸۶۶۰	۵	۰/۹۵۱۱
۴	۰/۷۰۷۱	۶	۰/۸۶۶۰	۱۰	۰/۹۵۱۱
۷	۰/۹۷۴۹	۹	۰/۹۸۴۸	۱۱	۰/۹۸۹۸
۱۴	۰/۹۷۴۹	۱۸	۰/۹۸۴۸	۲۲	۰/۹۸۹۸
۱۳	۰/۹۹۲۷	۱۵	۰/۹۹۴۵	۱۷	۰/۹۹۵۷
۲۶	۰/۹۹۲۷	۳۰	۰/۹۹۴۵	۳۴	۰/۹۹۵۷

«شبه شاخص شرط سینماتیکی» چنین بیان می‌کنیم:

$$\breve{k}_{CI} \geq \sqrt{۳}/۲ \qquad (۲۴)$$

یادآور می‌شویم که بیشترین مقدار ممکن این شاخص عدد ۱ است و تنها به‌صورت مجانبی در درجات آزادی بسیار زیاد تحقق می‌یابد. با تعریف این کمیت‌های جدید همه چیز برای تشریح طراحی همسانگرد مهیا شده است. حال به مطلبی دیگر اشاره می‌کنیم. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، گوی قدر مطلقی در فضای سرعت‌های مفصلی بین دو گوی اقلیدسی محصور است. انتخاب گوی قدر مطلقی به‌منزله‌ی یکسان گرفتن اندازه‌ی همه‌ی بردارهای حرکتی اعمال شده به مفاصل است. اگر تصویر چنین گویی در فضای سرعت مچ به یک دایره نزدیک باشد، می‌توان گفت که خواسته‌ی حرکت شبه یکسان مچ در همه‌ی جهات حاصل شده است. برای رسیدن به این مطلب سعی می‌کنیم دوگوی اقلیدسی محاط و احاطه کننده‌ی گوی قدر مطلقی، در فضای سرعت مچ تصویر دایره‌یی داشته باشند تا تصویر گوی قدر مطلقی محصور شده به این دو گوی نیز به دایره نزدیک باشد. پس ماتریس ژاکوبی را چنین بازنویسی می‌کنیم:[۴]

$$\mathbf{J} = [\mathbf{Er}_۱ \quad \mathbf{Er}_۲ \quad ... \quad \mathbf{Er_n}] \qquad (۲۵)$$

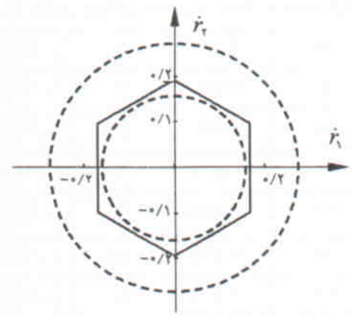
$r_i\ (i = ۱,۲,...,n)$ برداری از مرکز مفصل iام به مچ، و E ماتریسی متعامد است. شرط این که تصویر گوی اقلیدسی انتخاب شده در فضای سرعت مفاصل، تصویری دایره‌یی در فضای سرعت مچ داشته باشد، چنین است:

$$\mathbf{JJ}^T = \sum_{۱}^{n} \mathbf{E}\,\mathbf{r}_۱\mathbf{r}_۱^T\mathbf{E}^T = \sigma^۲\,\mathbf{I}_{۲\times۲} \qquad (۲۶)$$

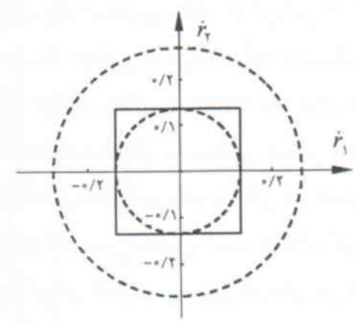
σ، مقدار منفرد مربوط به حالت همسانگرد بازوی مکانیکی است. و با توجه به تعامد ماتریس $\mathbf{E}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{۱}^{n} \mathbf{r}_۱\,\mathbf{r}_۱^{\mathbf{T}} = \sigma^۲\,\mathbf{I}_{۲\times۲} \qquad (۲۷)$$

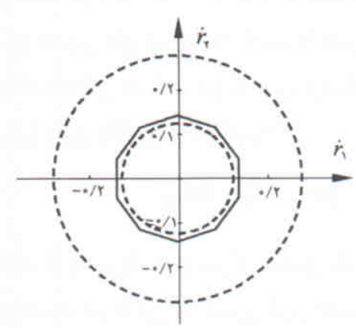
این معادله نشان می‌دهد که اگر مفاصل بر روی گوشه‌های یک



شکل ۴. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی اقلیدسی احاطه‌کننده‌ی آن برای مکانیکی با ۳ درجه‌ی آزادی.

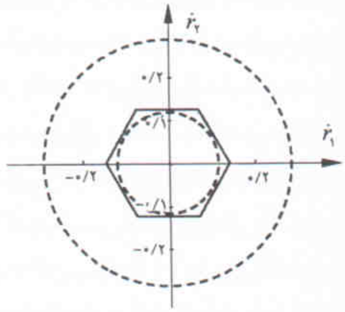


شکل ۵. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی اقلیدسی احاطه‌کننده‌ی آن برای بازوی مکانیکی با ۴ درجه‌ی آزادی.

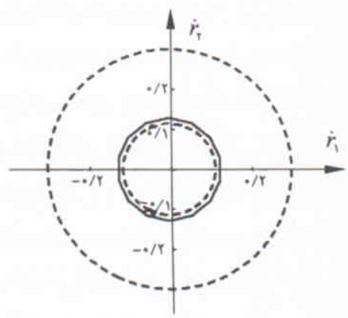


شکل ۶. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی اقلیدسی‌احاطه کننده‌ی آن برای بازوی مکانیکی با ۵ درجه‌ی آزادی.

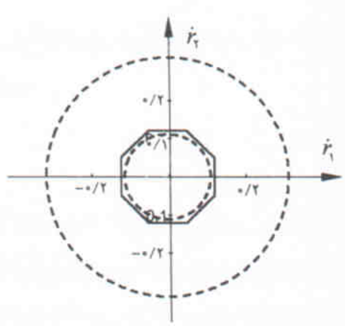
nضلعی منتظم محاط در دایره‌یی به‌شعاع برابر با طول آخرین عضو باشند، آنگاه معادله‌ی ۲۷ برقرار است. یعنی تصاویر دو گوی اقلیدسی در فضای سرعت‌های مفصلی در فضای سرعت مچ به صورت دو دایره خواهند بود. تصویر گوی قدر مطلق محاط به دو گوی اقلیدسی نیز بین دو دایره قرار می‌گیرد. لذا «شبه شاخص شرط سینماتیکی»، $\tilde{K}_{CI}$، نیز بیشترین مقدار را خواهند داشت.



شکل ۷. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی اقلیدسی احاطه‌کننده‌ی آن بازوی برای بازوی مکانیکی با ۶ درجه‌ی آزادی.



شکل ۸. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی اقلیدسی احاطه‌کننده‌ی آن برای بازوی مکانیکی با ۷ درجه‌ی آزادی.



شکل ۹. تصویر گوی قدر مطلق و دو گوی‌اقلیدسی احاطه‌کننده‌ی آن برای بازوی مکانیکی با ۸ درجه‌ی آزادی.

نتیجه گیری

مشکل توجیه‌ناپذیری نُرم اقلیدسی در فضای سرعت‌های مفصلی، با پیشنهاد نُرم یک و استفاده از قضیه‌ی معادل بودن توپولوژیکی همه‌ی نرم‌ها، رفع شد.

با معرفی «شبه عدد شرط» و «شبه شاخص شرط سینماتیکی» مبنایی تحلیلی برای بررسی قابلیت حرکت شبه یکسان مچ فراهم

شد، که نتایج در جدول ۱ و شکل ۳ جمع‌بندی شده‌اند. توجه به این نتایج برتری بازوهای مکانیکی بـا درجـات آزادی فـرد را آشکـار می‌کند. زیرا بازوهای مکانیکی با دو برابر همین تعداد درجات آزادی دقیقاً «شبه شاخص شرط سینماتیکی» مشابهی دارند.

در شکل‌های ۴ تا ۹ تصویر گوی قدر مطلقی و دو گوی اقلیدسی احاطه کننده‌ی آن نشان داده شده‌اند. این شکل‌ها نشان می‌دهند که در درجات آزادی فرد گوی قدر مطلقی تصویری نزدیک‌تر به دایره دارد و با افزایش تعداد درجات آزادی این شباهت به دایره بیشتر می‌شود. یعنی بازوهای مکانیکی دارای افزونگی درجـات آزادی آن هـم بـه تعداد فرد امکان حرکت شبه یکسان مـچ در هـمه‌ی جـهات را بـهتر برآورده می‌سازند،چون مچ قابلیت حرکت یکسان به هر جهتی را پیدا می‌کند.

پانوشت

1. isotrope
2. redundancy
3. Craig & Salisbury
4. Jorge Angeles
5. Jacobian matrix
6. configuration
7. linear mapping
8. singular value decompose (SVD)
9. condition number
10. kinematic conditioning index
11. Positioning task
12. pesudo-isotropy
13. multifunctional

منابع

1. Salisbury, J.K. Craig, J.J. "Articulated hands: force control and kinematics issues", *Int. J. robotics Res.* **1**, (1), pp. 4-17, (1982).
2. Angeles, J. Lopez-Cajun, C.S. "The dexterity index of serial-type robotic manipulators", Proc. 20th Biennial Mechanisms Conference. Kissimmee, FL: 79-84, Sept. 25-28. (1988).
3. Angeles, J. "A scale - independent and frame invariant index of kinematic conditioning for serial manipulators", Paper Note, McGill University, Dep. of Mech. Eng.
4. Angeles, J. "The design of isotropic manipulator architectures in the presence of redundancies", *Int. J. Robotics Res.*, **11**. (3), pp. 196-201, (1992).
5. Nakamura, Yoshihiko **Advanced robotics: redundancy and optimization**, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1991).
6. J.J. Craig, "Introduction to robotics: Mechanics and control", Addison-wesley, Reading, Massachusetts. (1989).
7. N.K. Mani, E.J. Haug and K.E. Atkinson, "Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **107**, pp. 82-87, (1985).
8. J. Dieudonne, **Foundations of modern analysis**, Academic Press Inc., New York. (1969).
9. Walter Rudin. **Real and complex analysis**, McGraw-Hill, Singapore. (1987).
10. C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, **Principles of real analysis**, North Holland. (1982).
11. M. Reed, B. simon, **Method of modern mathematical physics**, Academic Press Inc., Orlando, Florida. (1980).
12. R. Abraham, J. Marsden, T. Ratiu, "Manifolds, tensor analysis, and applications", Addison Wesley, Reading, Massachusetts, (1983).