

تحلیل جریان در همزن جریان آرام

نوروز محمدنوری (استاد یار)

فرشاد مظفری (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

بر خلاف تصور رایج می‌توان دو سیال را، صرف نظر از اثر پخش مولکولی، توسط جریان آرام نیز با هم مخلوط کرد. در این نوشتار با معرفی یک همزن جریان پتانسیل، متشکل از دو گردابه که با قدرت‌های نوسانی در فضای نامحدود فعالیت می‌کنند، چگونگی این امر را نشان داده و متغیرهایی را که منجر به اختلاط بهینه‌ی دو سیال در همزن مورد نظر می‌شوند معرفی کرده‌ایم. این تحقیق بر پایه‌ی نظریه‌ی آشوب قرار گرفته است. به منظور تعیین ویژگی‌های اختلاط، به‌ازای متغیرهای مختلف مقاطع، پوانکاره همزن ارائه شده‌اند. بر اساس این مقاطع، ابتدا ساختار جریان در همزن مورد بررسی قرار گرفته است و سپس متغیرهای بهینه مشخص شده‌اند.

مقدمه

حدود یک قرن پیش، رینولدز اختلاط^۱ در سیالات راکشیده شدن و تاشدن^۲های مکرر نوارهای سیال تعریف کرد.^[۱] این تعریف که در آن زمان دور از تصور بود، اکنون نیز در نگاه اول قابل قبول به نظر نمی‌رسد؛ ولی یکی از روش‌های جدید اختلاط سیالاتی است که عدد اشمیت بزرگ دارند. اصولاً^۳ سیالات را می‌توان به دو روش متفاوت با هم مخلوط کرد:

۱. پخش مولکولی؛

۲. استفاده از ویژگی‌های سینماتیکی جریان.

اگر چه پخش مولکولی روشی آشنا و متداول است؛ ولی چندان قابل کنترل نیست. علاوه بر آن این روش برای سیالاتی که عدد اشمیت بزرگ داشته باشند کارآیی مناسبی ندارد. در عوض استفاده از ویژگی‌های سینماتیکی جریان، اگر چه چندان متداول نیست، ولی برای اختلاط در این سیالات کارآیی مناسبی دارد. براساس این روش می‌توان همزن^۳هایی را طراحی کرد که اختلاط را توسط جریان آرام^۴ انجام می‌دهند. این امر از آن جهت مهم است که جریان آرام در امر اختلاط، از نظر صرفه‌جویی در انرژی، بر جریان توربولنت ارجح است.^[۲]

این نوشتار به بررسی رفتار سیال در یک همزن جریان پتانسیل می‌پردازد. در این تحقیق متغیرهای مؤثر بر رفتار سیال و ساختار جریان در همزن مورد بحث قرار گرفته‌اند، و مقادیری که به‌ازای آنها بهترین اختلاط در همزن صورت می‌گیرد نیز تعیین شده‌اند.

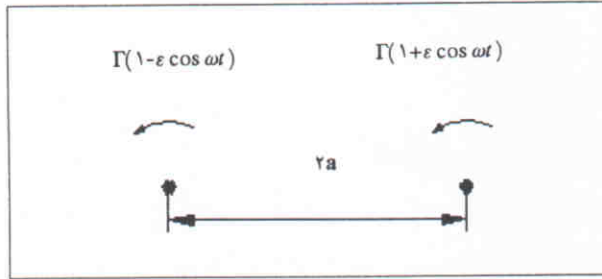
مرور فعالیت‌های تحقیقاتی

ولادمیر آی آرنولد، شاید نخستین کسی باشد که ایده ارتباط بین تئوری آشوب و جریان سیالات را مطرح نموده است. بنابر نظر هنون، ستاره‌شناس فرانسوی، آرنولد برای اولین بار این ایده را در سال ۱۹۶۵ مطرح کرد. سپس هنون، با پی‌گیری آن نشان داد که در جریان سه‌بعدی پایدار و غیر لزج، می‌توان برای ذرات سیال مسیرهای آشوبناکی ایجاد کرد.^[۳]

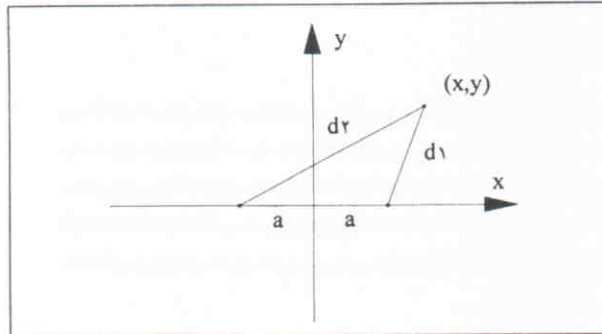
در سال ۱۹۸۴، عارف در مقاله‌ی نشان داد که معادلات مسیر ذرات سیال در جریان دو بعدی غیر لزج هامیلتونی‌اند. او با ارائه‌ی یک مثال نشان داد که سیستم‌های هامیلتونی، تحت اثر نیروهای پریودی می‌توانند برای ذرات سیال مسیرهای آشوبناک ایجاد کنند.^[۱] عارف به‌همراه جونز در سال ۱۹۸۸ مقاله‌ی دیگر منتشر کرده و در آن استقلال فرایند اختلاط را از چرخش^۵ (گردابه) بیان کرده است.^[۴]

اتینیو، در سال ۱۹۸۹، در مقاله‌ی به چگونگی استفاده از نظریه‌ی آشوب در اختلاط سیالات پرداخته است. او در این مقاله نقاط قوت و ضعف این تئوری را برای بررسی اختلاط در سیالات مطرح کرده است. او در ضمن تلاش کرده تا مفاهیم این نظریه را برای استفاده در این زمینه بهینه کند.^[۳]

در سال ۱۹۹۵، جنس و رینال به‌دلیل پیچیدگی رفتار سیال در همزن جریان استوکس مورد نظر خود، همزن جریان پتانسیل (مورد تحقیق این مقاله) را به‌عنوان الگوی ساده‌تر رفتار سیال در آن همزن



شکل ۱. شمایی از همزن جریان پتانسیل.



شکل ۲. چگونگی تعیین مقدار تابع جریان در نقطه‌ی دلخواه.

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (7)$$

در معادلات شماره‌ی ۷، u و v به ترتیب مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت در هر نقطه از سیال و در هر زمان دلخواه‌اند. با جایگذاری از معادله‌ی ۶ در معادلات ۷، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} u = \frac{-\Gamma y}{\pi} \left[\frac{y^2 + x^2 + a^2}{N} + \frac{\Gamma a x}{N} \varepsilon \cos(\omega t) \right] \\ v = \frac{\Gamma}{\pi} \left[\frac{x(y^2 + x^2 - a^2)}{N} + \frac{a(x^2 - y^2 - a^2)}{N} \varepsilon \cos(\omega t) \right] \\ N = y^2 + 2(x^2 + a^2)y^2 + (x^2 - a^2)^2 \end{cases} \quad (8)$$

بی‌بعدسازی معادلات

برای جامعیت بخشیدن به نتایج، باید معادلات ۸ بی‌بعد شوند. متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$x' = \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$y' = \frac{y}{a} \quad (10)$$

$$t' = \omega t \quad (11)$$

با جای‌گذاری معادلات ۹، ۱۰ و ۱۱ در معادله‌ی ۸ این معادله به

برگزیدند. آنان بر اساس روش ملنیکوف کارایی همزن را برای اغتشاش‌های کوچک به صورت نظری بررسی کردند. [۵] در ضمن تحقیقاتی نیز پیرامون ریخت‌شناسی^۶ ساختار جریان در همزن‌ها صورت گرفته است؛ که از آن جمله می‌توان به تحقیقات آتینو و همکارانش اشاره کرد. [۶، ۱]

طرح مسئله

در این همزن دو گردابه^۷، با قدرت‌های پربودی در سیال نامحدود فعالیت می‌کنند. جریان حاصل از این فعالیت، دوبعدی و پتانسیل است. از اثر پخش مولکولی در سیال صرف نظر شده است شکل ۱. در این شکل Γ ، ε ، ω و a به ترتیب قدرت گردابه، متغیر اغتشاش، فرکانس زاویه‌ی اغتشاشات، زمان و نصف دو گردابه‌اند.

یافتن معادلات حاکم بر میدان سرعت

برای یافتن معادلات حاکم بر میدان سرعت، ابتدا باید تابع جریان^۸ (Ψ) برای سیال داخل همزن تعیین شود. شکل ۲ و محاسبات پس از آن چگونگی تعیین تابع جریان را نشان می‌دهند.

اگر نقطه‌ی دلخواهی در سیال باشد و فاصله‌ی آن از دو گردابه به ترتیب با d_1 و d_2 نشان داده شود، می‌توان مقدار تابع جریان در نقطه‌ی P را مجموع مقادیر تابع حاصل از هر گردابه در نقطه‌ی P دانست.

$$d_1 = [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$d_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\Psi_1 = \frac{\Gamma(1+\varepsilon \cos \omega t)}{2\pi} \ln d_1 \quad (3)$$

$$\Psi_2 = \frac{\Gamma(1-\varepsilon \cos \omega t)}{2\pi} \ln d_2 \quad (4)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \{ & \ln[(x+a)^2 + y^2] \\ & + \ln[(x-a)^2 + y^2] \\ & + \ln \left[\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right] \varepsilon \cos(\omega t) \} \end{aligned} \quad (6)$$

اکنون برای یافتن میدان سرعت، کافی است از معادله‌ی ۶ مشتق گرفته شود.

خود جذب می‌کند و در دو جهت نیز تمام نقاط را از خود می‌راند. دو جهتی که در راستای آنها سیال به سوی نقطه‌ی هیپربولیک جذب می‌شود، مانیفلدهای پایدار^{۱۰} و دو جهتی که در راستای آنها سیال از نقطه‌ی هیپربولیک دور می‌شوند مانیفلدهای ناپایدار^{۱۱} نقطه‌ی مورد نظر هستند. شکل ۴ رفتار سیال را در نزدیکی نقطه‌ی مورد نظر نشان می‌دهد.

در صورتی که $\varepsilon \neq 0$ (اغتشاش وجود داشته باشد)، مانیفلدهای پایدار و ناپایدار یک نقطه‌ی هیپربولیک، می‌توانند یکدیگر را قطع کنند. در این صورت، نقطه‌ی تقاطع، نقطه‌ی هموکلینیک^{۱۲} نام دارد. وجود هر نقطه‌ی هموکلینیک به معنی وجود بی‌شمار نگاشت نعل اسبی^{۱۳} است.^[۱] این نگاشت ابتدا المان‌های سیال را می‌کشد، سپس آنها را روی هم تا می‌کند. بنابر تعریفی که رینولدز از اختلاط سیالات ارائه داده است، ابتدا در سیال ساختار لایه‌یی ایجاد می‌شود و در نهایت اختلاط صورت می‌گیرد.^[۱] به این ترتیب با ایجاد اغتشاش در میدان سرعت، می‌توان در سرعت‌های کم نیز سیالات را با هم مخلوط کرد.

مقاطع پوانکاره

برای تعیین مقاطع پوانکاره، ابتدا ۴۴۱ نقطه با آرایش مربع و به فواصل یکسان از یکدیگر در فاصله‌ی $[0.1 \times 0.1 \times -0.1]$ انتخاب شدند و برنامه برای محاسبه‌ی مقاطع مربوط به ۱۰ سیکل نوسانی اجرا شد. متأسفانه زمان لازم برای این محاسبات، برای یک ریزپردازنده‌ی ۲۰۰ مگاهرتزی، به قدری طولانی بود (در حدود یک روز و بیشتر) که در عمل با توجه به مقاطع مورد نیاز باعث عدم کارایی این روش می‌شد. علاوه بر این، مقاطع پوانکاره مربوط به ۱۰ سیکل نوسانی، وضوح قابل قبولی ندارند. با افزایش تعداد سیکل‌ها نیز، مشکل زمان طولانی محاسبات پیچیده‌تر می‌شود.

برای حل این مشکل، روشی که عارف در سال ۱۹۸۴ استفاده کرده برگزیده شد.^[۷] ابتدا ۲۰ نقطه با فواصل مساوی در ناحیه‌ی ۲ تا ۲- روی محور y' انتخاب شدند، سپس مقاطع پوانکاره‌ی همزن به‌ازای ۲۰۰ سیکل نوسانی محاسبه شدند (این مقاطع در پیوست ارائه شده‌اند). این روش علاوه بر این که می‌تواند ساختار دینامیکی جریان خارج از ناحیه‌ی اختلاط^{۱۴} را نیز نمایش دهد، از زمان محاسبات نیز می‌کاهد.

بررسی ساختار جریان

با رجوع به شکل ۵ که نمونه‌یی از مقاطع پوانکاره (به‌ازای $\varepsilon = 0.2$ و $\Gamma' = 1$) را نشان می‌دهد، می‌توان سیال داخل همزن را به دوپخش

شکل زیر بی‌بعد می‌شود:

$$\begin{cases} u' = \frac{-\Gamma y'}{\omega a^2 \pi} \left[\frac{y'^2 + x'^2 + 1}{N'} + \frac{\gamma x'}{N'} \varepsilon \cos(t') \right] \\ v' = \frac{\Gamma}{\omega a^2 \pi} \left[\frac{x'(y'^2 + x'^2 - 1)}{N'} + \frac{x'^2 - y'^2 - 1}{N'} \varepsilon \cos(t') \right] \\ N' = y'^4 + 2(x'^2 + 1)y'^2 + (x'^2 - 1)^2 \end{cases} \quad (12)$$

در معادلات ۱۲، Γ' که مبین قدرت بی‌بعد شده‌ی گردابه است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma' = \frac{\pi a^2 \gamma}{\Gamma} \quad (13)$$

البته Γ' را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Gamma' = \frac{1}{\Gamma} \frac{\omega}{\pi a^2 \gamma} \quad (14)$$

در این صورت، با توجه به این که $\frac{1}{\omega}$ مبین زمان مشخصه‌ی جریان اغتشاشی است و $\frac{\pi a^2 \gamma}{\Gamma}$ نیز مبین سرعت مشخصه‌ی جریان زمینه است، Γ' نسبت زمان مشخصه‌ی جریان اغتشاشی به زمان مشخصه‌ی جریان زمان خواهد بود.

ردگیری ذرات سیال

برای تعیین رفتار سیال، باید مقاطع پوانکاره‌ی همزن تعیین شوند. برای تعیین این مقاطع، ابتدا تعدادی نقطه در سیال انتخاب می‌شوند و پس از هر پریود (معادل 2π رادیان) محل آنها روی صفحه‌ی مختصاتی $x'-y'$ ثبت می‌شود. بدیهی است برای ردگیری مسیر هر ذره‌ی سیال، دستگاه معادلات ۱۲ باید برای x' و y' حل شود. متأسفانه این دستگاه حل تحلیلی ندارد؛ بنابراین باید آن را به‌ازای شرایط اولیه‌ی مشخص به روش عددی حل کرد. برای تثبیت دقت محاسبات، با توجه به موقعیت ذره در سیال، باید طول گام محاسبات تغییر کند. این امر لزوم استفاده از روش‌های حل عددی با طول گام متغیر را نشان می‌دهد. برای این منظور الگوریتم آدامز-بشفرس-مولتون با تولرانس^{۸-۱۰} انتخاب شد. این محاسبات توسط نرم‌افزار مطلب (Matlab) انجام شده‌اند. الگوریتم مورد نظر به‌صورت یک M-فایل با نام ode۱۱۳ در این نرم‌افزار موجود است.

برای بررسی دقت این روش، چند نقطه در سیال انتخاب شدند و مسیر آنها به‌ازای $\varepsilon = 0$ در سیال ردگیری شد. در این حالت، مسیر حرکت ذرات بر خطوط جریان منطبق است و انتظار می‌رود مسیرهای حرکت منحنی‌های بسته‌یی باشند. شکل ۳ دقت محاسبات را نشان می‌دهد.

در شکل ۳ نقطه‌ی هیپربولیک^۹ در دو جهت تمام نقاط را به سوی

در حوزه‌ی تأثیر نقاط بیضوی قرار گرفته، نمی‌تواند با سیال اطراف مخلوط شود و محدود به همان ناحیه باقی خواهد ماند. بنابراین برای حفظ بازدهی اختلاط باید از ظهور نقاط بیضوی در ناحیه‌ی اختلاط جلوگیری شود.

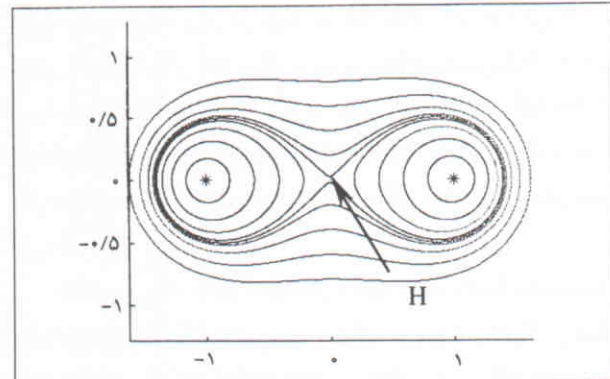
این همزن دارای یک نقطه‌ی بیضوی مرتبه ۳ است که در شکل نشان داده شده است. گردابه‌ها نیز خود دو نقطه‌ی بیضوی‌اند؛ ولی برخلاف مورد اول متأسفانه در میان ناحیه‌ی اختلاط قرار گرفته‌اند. البته نقاط بیضوی دیگری نیز وجود دارند؛ ولی به دلیل آن‌که به‌ازای متغیرهای خاص به وجود می‌آیند، چندان قابل توجه نیستند.

تعیین متغیرهای بهینه

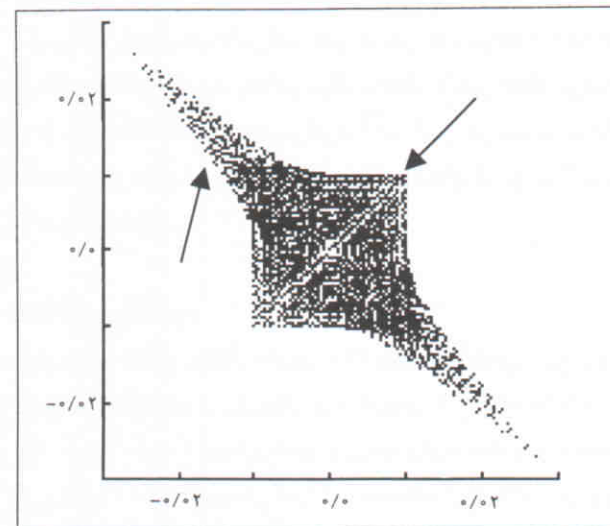
از بررسی مقاطع پوانکاره می‌توان دریافت که افزایش ε موجب رشد ناحیه‌ی اختلاط می‌شود. این رشد به صورت حرکت مرزهای ناحیه‌ی اختلاط به بیرون و کاستن از حوزه‌ی تحت تأثیر گردابه‌هاست. در بازه‌ی $\Gamma' \geq 1/6$ یک نقطه‌ی بیضوی در میان ناحیه‌ی اختلاط به وجود می‌آید؛ که افزایش ε از حوزه‌ی تحت تأثیر این نقطه نیز می‌کاهد (برای نمونه به‌ازای $\varepsilon = 0/4$ و $\Gamma' = 1/6$ این نقطه از بین رفته است). با این حال افزایش Γ' ، مقاومت حوزه‌ی تحت تأثیر این نقطه را در برابر افزایش ε به شدت افزایش می‌دهد؛ به گونه‌ی که برای حذف این حوزه ε باید آن قدر بزرگ انتخاب شود که دیگر مفهوم اغتشاشی نخواهد داشت.

در صورتی که اغتشاش‌ها کوچک باشند، برای تعیین Γ' بهینه، می‌توان از روش ملنیکف (Melnikov) استفاده کرد. بنابر نتایج حاصل از این روش، ناحیه اختلاط به‌ازای $\Gamma' = 1/2$ حداکثر مساحت را خواهد داشت.^[۱۵] در مقاطع پوانکاره‌ی که در این مقاله ارائه شده‌اند، برای اغتشاش‌های کوچک بازه $\Gamma' = 1/5 \sim 1/2$ بازه بهینه است. ظاهراً $\Gamma' = 1/5$ بر $\Gamma' = 1/2$ ارجحیتی ندارد، اما از دیدگاه سرعت اختلاط، $\Gamma' = 1/5$ مناسب‌تر است. با رشد اغتشاشات (افزایش ε)، تنها گزینه‌ی مناسب $\Gamma' = 1/5$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در بازه‌ی اغتشاشات مورد مطالعه $[0/4 \leq \varepsilon \leq 0/1]$ ، $\Gamma' = 1/5$ فرایند اختلاط را بهینه خواهد کرد. به بیان دیگر، هنگامی عملکرد این همزن بهینه می‌شود که زمان مشخصه اغتشاشات $1/5$ برابر زمان مشخصه‌ی جریان زمینه باشد.

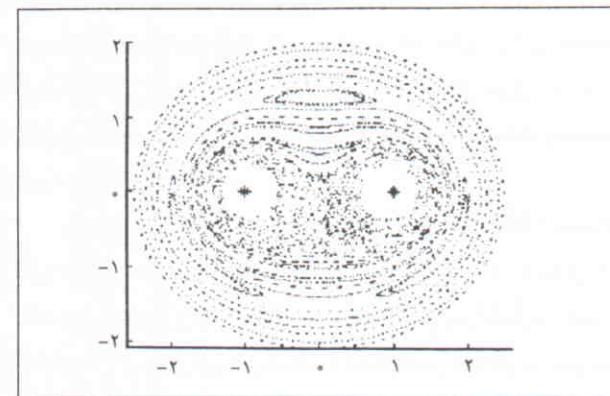
همان‌طور که پیشتر اشاره شد، در بازه‌ی $\Gamma' \geq 1/6$ تولد و رشد یک نقطه‌ی بیضوی در میان ناحیه‌ی اختلاط دیده می‌شود. این نقطه‌ی سیال اطراف خود را به دام می‌اندازد و آن را از سیال اطراف جدا می‌کند. این امر با هدف اختلاط در سیال تناقص دارد. به همین دلیل بازه‌ی $\Gamma' \geq 1/6$ از دیدگاه اختلاط سیال قابل توجه نیست؛ حتی اگر



شکل ۳. بسته بودن خطوط جریان به‌ازای $\varepsilon = 0$ ، دقت محاسبات را نشان می‌دهد.



شکل ۴. رفتار سیال در نزدیکی نقطه هینونبولیک.



شکل ۵. ساختار کلی یکی از مقاطع پوانکاره‌ی همزن.

مجزا تقسیم کرد:

۱. سیال داخل ناحیه‌ی اختلاط؛

۲. سیال داخل حوزه‌ی تأثیر نقاط بیضوی.

به دلیل آن‌که اختلاط در ناحیه‌ی اختلاط روی می‌دهد، هر چه وسیع‌تر کردن این ناحیه منجر به افزایش راندمان همزن خواهد شد. سیالی که

منظور، ابتدا تابع جریان محاسبه شد. سپس با مشتق‌گیری و بی‌بعدسازی، معادلات حاکم بر میدان سرعت سیال داخل همزن، به دست آمدند. برای تعیین مقاطع پوانکاره همزن، ۲۰ نقطه با فواصل مساوی روی محور y' در فاصله‌ی ۲ تا ۲- انتخاب شدند و مقاطع پوانکاره مربوط به ۲۰۰ سیکل نوسان قدرت گردابه‌ها به روش عددی محاسبه شدند. بررسی این مقاطع نشان داد که اغتشاشات هر قدر بزرگ‌تر باشند (بازه‌ی مورد مطالعه $0/4 \leq \varepsilon \leq 0/1$ است)، ناحیه‌ی اختلاط وسیع‌تر خواهد بود؛ و در بازه‌ی مورد بحث، هنگامی همزن وسیع‌ترین ناحیه اختلاط را خواهد داشت، که زمان مشخصه‌ی اغتشاشات $1/5$ برابر زمان مشخصه‌ی جریان زمینه باشد.

ناحیه‌ی اختلاط وسیع‌تری را شامل شود.

بررسی مقاطع پوانکاره در همزن نشان می‌دهد که در مقایسه با Γ' بهینه، Γ' خیلی بزرگ یا خیلی کوچک منجر به ایجاد ناحیه‌ی اختلاط بسیار کوچکی خواهد شد. در چنین همزنی، رفتار سیال، مانند رفتار سیال در همزن بدون اغتشاش خواهد بود. بنابراین سیال در این همزن اغتشاشات را حس نخواهد کرد.^[۵]

نتیجه‌گیری

هدف این مقاله بررسی رفتار سیال، در یک همزن جریان پتانسیل دوبعدی، با قدرت‌های نوسانی در فضای نامحدود است. برای این

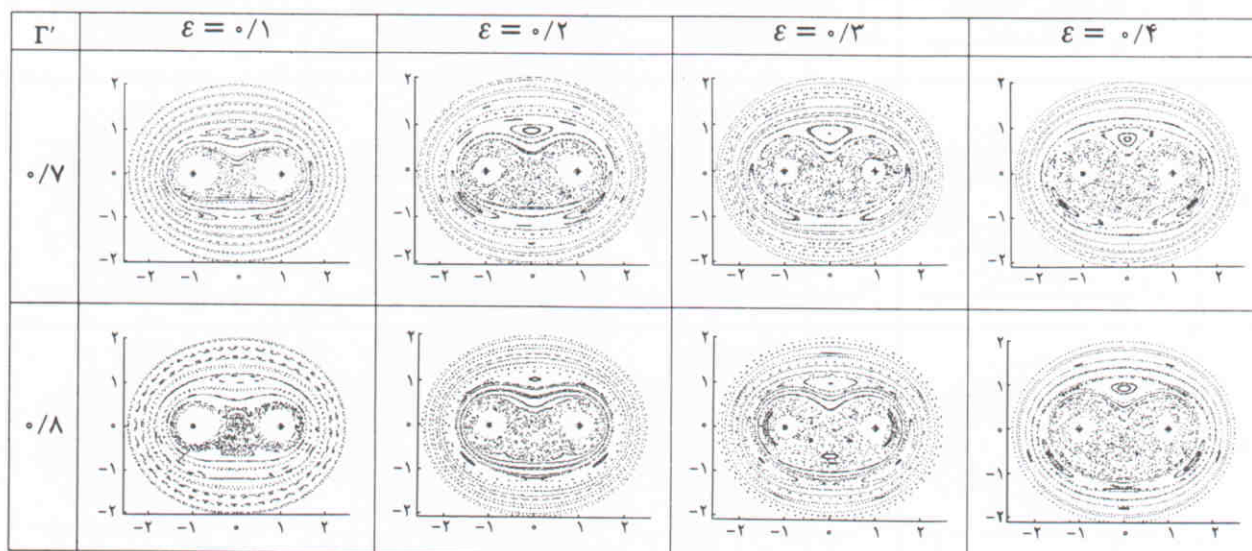
پانویس

1. mixing
2. stretching and folding
3. mixer
4. laminar flow
5. vorticity
6. morphology
7. vortex
8. stream function
9. hyperbolic point
10. stable manifold
11. unstable manifold
12. homoclinic point
13. horse shoe map
14. mixing zone

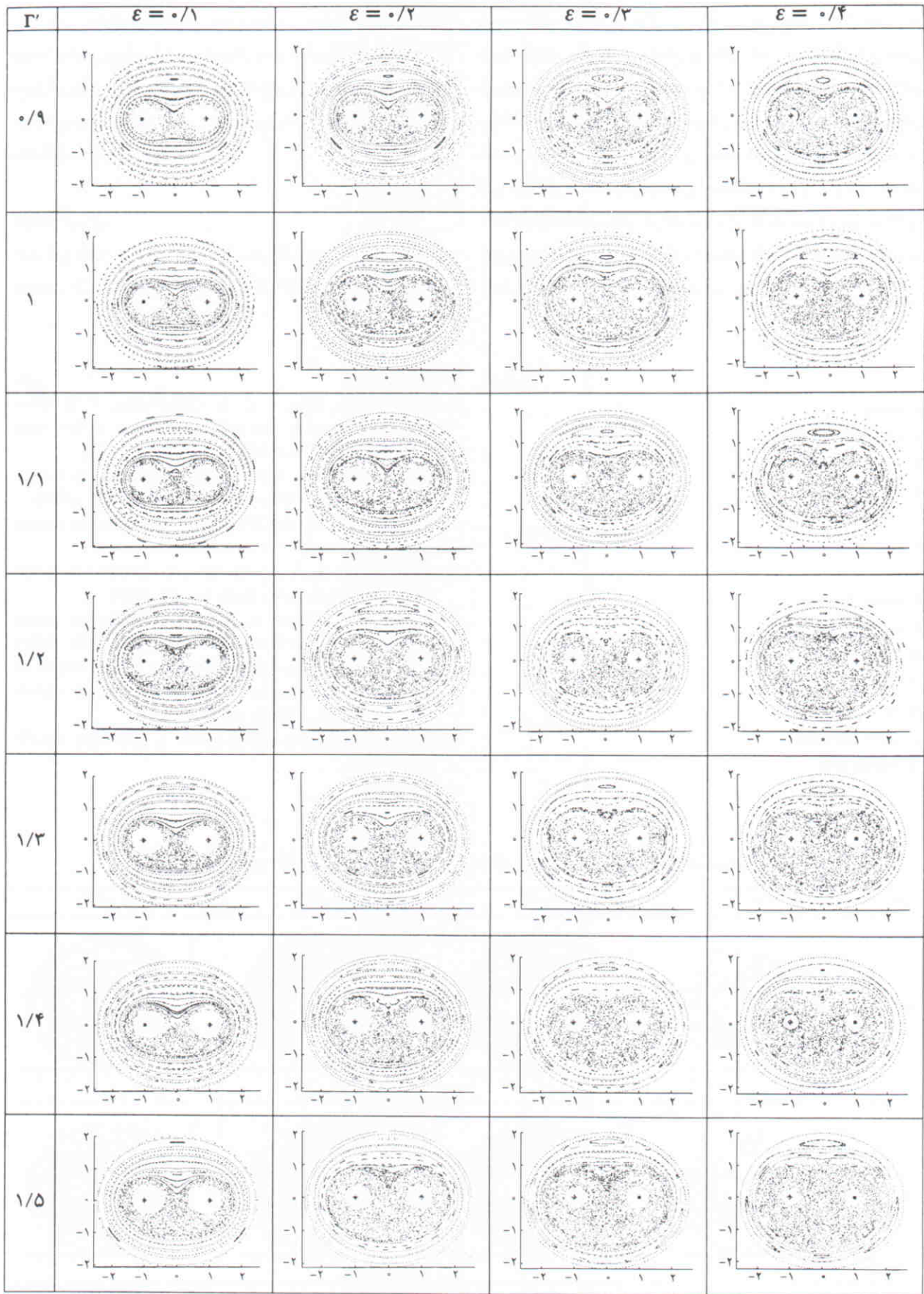
منابع

1. Ottino, J. M., Jana, S. C. & Chakravarthy, V. S. "From Reynold's stretching and folding to mixing studies using horseshoc maps". *Phy. Fluids* 6, PP. 685-699, (1994).
2. Raynal, F. & Gence, J. N. "Energy saving in chaotic laminar mixing". *Int. J. Heat Mass Trans.* 40, PP. 3267-3273, (1997).
3. Ottino, J. M. The mixing of fluids. *Scientific American Annual*, (1989).
4. Jones, S. W. & Aref, H. "Chaotic advection in pulsed source-sink systems". *Phy. fluids* 31, 469. (1988).
5. Raynal, F. & Gence, J. N. "Efficient stirring in planar, time-periodic laminar flows". *Chem. Eng. Sci.* 50, 631. (1995).
6. Ottino, J. M., Leong, C. W., Rising, H. & Swanson, P. D. "Morphological structures produced by mixing in chaotic flows". *Nature* PP. 419-425, (1988).
7. Aref, H. "Stirring by chaotic advection". *J. Fluid Mech.* 143, PP. 1-21, (1984).

پیوست - مقاطع پوانکاره بر اساس تغییرات ε و Γ' این مقاطع به ازای ۲۰۰ سیکل نوسانی ارائه شده‌اند.



پیوست - ادامه



پیوست - ادامه

