دورهای حدی در دستگاه شکار ـ شکارچی گوس با تابع پاسخ

محمود حصارکی (استاد)
دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
سید مهرداد مقدس (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی علوم - گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی

در این نوشتار مسئله‌ی دور حدی در یک دستگاه شکار ـ شکارچی گوس با تابع پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. تابع پاسخ در این دستگاه صعودی و محدب است، و مشتق سوم آن ریشه‌ی یگانه دارد. تحت فرض‌های معینی نشان داده می‌شود که یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دور حدی در دستگاه گوس موجود است. این شرط پایداری سراسری نقطه‌ی ساکن مثبت دستگاه را در ربع اول محرز می‌سازد.

مقدمه

در سال‌های پس از جنگ جهانی اول تعداد ماهی‌گیران در دریای آدریاتیک به‌مراتب بیشتر از تعداد آنها در سال‌های قبل شده بود. ساکنان بین ایتالیا و اتریش به صید بیش از حد ماهی پرداخته و سود فراوانی به دست آوردند. افزایش تعداد ماهی‌گیران، به‌خصوص میزان صید آنها در این سال‌ها، موضوعی بسیار جالب برای یکی از ریاضیدانان مشهور به‌نام ولترا مطرح کرد. وی برای بررسی موضوع فرض کرد که x چگالی جمعیت ماهی‌ها (شکار) و y چگالی جمعیت صیادان (شکارچیان) را نمایش دهد. ولترا همچنین فرض کرد که نرخ رشد جمعیت شکار در غیاب شکارچیان عدد ثابتی چون a باشد که به‌طور خطی به‌صورت تابعی از چگالی جمعیت شکارچی کاهش می‌یابد. با تحقیقاتی که ولترا انجام داد، مشاهده کرد که در غیاب شکار، تعداد شکارچیان نیز کاهش می‌یابد که به‌معنای نرخ رشد منفی برای آنان بود. وی نتایج حاصله را در قالب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دوبعدی، که در واقع آغاز بررسی دستگاه‌های شکار ـ شکارچی به دست آمده توسط ولترا بود، بیان کرد. پس از بررسی‌های ولترا (۱۹۲۷) روی این دستگاه، بعضی از ریاضیدانان دستگاه‌های پیچیده‌تری مطرح کردند. برای مثال کلموگروف (۱۹۳۶) مدل کلی‌تری از دستگاه‌های شکار ـ شکارچی را در نظر گرفت که در آن نرخ رشد شکار ـ شکارچی به صورت تابع‌هایی از جمعیت آنها بودند. رفتار کیفی جواب‌های این دستگاه را آلبرچ (۱۹۷۳) به صورت دقیق‌تری مورد بحث و بررسی قرار داده است. نتایج به‌دست آمده توسط کلموگروف بیشتر در مورد پایداری نقاط ساکن یا دورهای حدی پایدار بودند که نه از طریق اثبات، بلکه از یک بحث نموداری نتیجه‌گیری شده بودند. بعضی از نتایج آنها در سال‌های اخیر به طور دقیق اثبات شده‌اند، اما بعضی از آنها هنوز به‌صورت یک بحث نموداری باقی مانده‌اند. نوع دیگری از دستگاه‌های شکار ـ شکارچی که کلموگروف آنها را بررسی کرد، دستگاهی بود که گوس (۱۹۳۴) مطرح ساخت. با مفروضاتی که گوس روی چگالی جمعیت شکار و شکارچی در نظر گرفته بود، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی دوبعدی به دست آمد که به دستگاه گوس مشهور است. نوع دیگری از این دستگاه را هولینگ (۱۹۷۳) مطرح کرد. دستگاه گوس و هولینگ را بسیاری از ریاضیدانان مورد بررسی قرار داده‌اند و نتایج بسیار جالبی نیز به دست آمده است.

وجود و تعداد دورهای حدی، یکی از مهمترین مسائل درباره‌ی دستگاه‌های خودگردان در معادلات دیفرانسیل عادی به‌خصوص دستگاه‌های شکار ـ شکارچی دوبعدی است. یکی از اولین مدل‌های زیست‌محیطی که در آن مسئله‌ی دور حدی مطرح شد، نوعی دستگاه شکار ـ شکارچی دوبعدی است که ولترا مطرح کرده است:[۱]

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x y$$

$$\frac{dy}{dt}=-\delta y+\gamma x y \qquad (۱)$$

در این دستگاه $x(t)$ چگالی جمعیت شکار و $y(t)$ چگالی جمعیت شکارچی‌اند و همه‌ی پارامترها مثبت فرض شده‌اند. ولترا وجود یک دور حدی را برای دستگاه ۱ تحت شرایطی روی پارامترها ثابت کرد. وی از این دور حدی تفسیری طبیعی ارائه کرد که طبق آن افزایش تعداد شکارچیان باعث کاهش تعداد شکار می‌شود و این خود به کاهش تعداد شکارچیان می‌انجامد. گوس دستگاه ۲ را به عنوان تعمیمی از دستگاه ۱ مطرح کرد:[۲]

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-p(x)y$$
$$\frac{dy}{dt}=y\left[-\delta+p(x)\right] \qquad (۲)$$

در این دستگاه $\alpha>0$ نرخ رشد در غیاب شکارچی، $\delta>0$ نرخ مرگ و میر شکارچی در غیاب شکار و $p(x)$ تابع پاسخ شکار به شکارچی نام دارد. برای بیشتر مثال‌های $p(x)$ که در دستگاه ۲ مطرح شده‌اند، فرض بر این است که $p(0)=0$ و برای $x>0$، $p'(x)>0$. تعمیمی از دستگاه ۲ توسط لوین مطرح شده است.[۳] وی تأثیر چگالی وابسته به نرخ مرگ و میر شکارچی را بر روی پایداری نقاط ساکن دستگاه ۳ مطالعه کرده است:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-p(x)y$$
$$\frac{dy}{dt}=y\left(q(y)-p(x)\right) \qquad (۳)$$

در این دستگاه نرخ مرگ و میر شکارچی، $q(y)$، در شرایط $q(0)>0$ و $q'(y)>0$ صدق می‌کند. فریدمن تعمیم دیگری از دستگاه ۲ را ارائه کرده است:[۴]

$$\frac{dx}{dt}=xg(x)-p(x)y$$
$$\frac{dy}{dt}=y\left(-\delta+h(x)\right) \qquad (۴)$$

که در آن $g(x)$ در شرایط $g(0)>0$ و $q'(y)<0$ صدق می‌کند. همچنین فریدمن وجود و پایداری نقطه‌ی ساکن را در دستگاه ۴ بررسی کرد. دستگاه ۵ مثال مشهوری است از دستگاه ۴ که اولین بار توسط روزنویگ و مک‌آرتور بیان شده است:[۵]

$$\frac{dx}{dt}=ax(1-bx)-p(x)y$$
$$\frac{dy}{dt}=y\left(-\delta+dp(x)\right) \qquad (۵)$$

در این دستگاه همه‌ی پارامترهای a، b، c، δ، d مثبت‌اند و $p(x)=\frac{x}{c+x}$ تابع پاسخی است که توسط هولینگ در این دستگاه بیان شده است[۶] و به «تابع هولینگ نوع دوم» مشهور است. یگانگی دور حدی این دستگاه اولین بار توسط چِنگ ثابت شد.[۷] هولینگ نشان داد که توابع پاسخ نه‌تنها می‌توانند به‌صورت یکنوا افزایش یابند بلکه می‌توانند کران‌دار نیز باشند.

تابع پاسخ دیگری که هولینگ مطرح کرده است، عبارت است از $P(x)=\frac{x^2}{c+x^2}$ که «تابع هولینگ نوع سوم» نام دارد. وجود و یگانگی دورهای حدی در دستگاه ۵ با تابع پاسخ هولینگ نوع سوم توسط چنگ و ژانگ ثابت شده است.[۸] این تابع پاسخ به‌وسیله‌ی کازارینوف و وندن دریسک به‌صورت $P(x)=\frac{x^n}{c+x^n}$، $c>0$، $n\geq 1$، تعمیم داده شده است.[۹]

در تمامی دستگاه‌های فوق، مسئله‌ی اصلی، بررسی رفتار کیفی جواب‌هاست. در این بررسی‌ها ارائه‌ی پاسخ به سؤالات بسیاری مدنظر بوده است که از آن جمله عبارتند از:

۱. وجود و نوع نقاط ساکن دستگاه؛
۲. وجود مدارهای ارتباطی از قبیل هتروکلینیک و هموکلینیک؛
۳. وجود مدارهای تناوبی؛
۴. وجود دورهای حدی و یگانگی آنها.

مثلاً یگانگی دور حدی در دستگاه ۵، که تعمیمی از دستگاه گوس است، توسط چنگ ثابت شده است. وجود دور حدی در این دستگاه نیز توسط روزنویگ و مک‌آرتور نشان داده شده است.[۵] آنها همچنین پایداری دستگاه را تحت شرایط خاصی ثابت کردند. اما در حالت کلی، وجود و یگانگی دور حدی برای دستگاه ۵ با تابع پاسخ $p(x)$ هنوز حل نشده است. هدف از این رساله در واقع بررسی وجود دور حدی است برای نوع خاصی از دستگاه ۵، که تعمیمی از دستگاه گوس است.

طرح مسئله

دستگاه زیر را که تعمیمی از دستگاه گوس است در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x}=rx(1-x)-y\varphi(x)$$
$$\dot{y}=y\left(\mu\varphi(x)-D\right) \qquad (۶)$$

در این دستگاه x و y به‌ترتیب معرف جمعیت گونه‌های شکار و شکارچی‌اند. پارامترهای r، μ و D همگی مثبت، و $\varphi(x)=\frac{d}{dt}$ یک تابع حقیقی است. تابع $\varphi(x)$ را تابع پاسخ شکارچی به شکار و دستگاه ۶ را دستگاه شکار ـ شکارچی با تابع پاسخ $\varphi(x)$ می‌نامند. فرض بر این است که تابع $\varphi(x)$ در دستگاه ۶ دارای مشتق دوم پیوسته بوده و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\varphi(0)=0$؛
۲. برای $x\geq 0$، $\varphi'>0$؛
۳. برای $x\geq 0$، $\varphi''(x)\leq 0$؛
۴. $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=C<\infty$.

در سال‌های اخیر، دستگاه ۶ برای بعضی توابع معین $\varphi(x)$ مورد بررسی قرار گرفته و نتایج با اهمیتی به دست آمده است. مثلاً دستگاه فوق با تابع پاسخ ایولف[۱۰] یعنی $\varphi(x)=1-e^{-ax}$، $a>0$، مورد بررسی قرار گرفته[۱۱] و بعضی از مقادیر a را که به‌ازای آنها دستگاه ۶

فاقد دور حدی است یا دور حدی آن یگانه است مشخص کردند. در ادامه‌ی این بررسی، شرط لازم و کافی برای عدم وجود و همچنین شرط لازم و کافی برای یگانگی دور حدی دستگاه ۶ با تابع پاسخ ایولف ارائه شد.[۱۲] همچنین یکی دیگر از دستگاه‌های شکار ـ شکارچی که به دستگاه تعمیم‌یافته‌ی گوس معروف است بررسی، و با ساختن یک تابع لیاپانف برای دستگاه، پایداری سراسری آن و در نتیجه عدم وجود دور حدی به اثبات رسیده است.[۱۳]

در اینجا مسئله‌ی بسیار مهمی که مطرح است ارائه‌ی یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دور حدی (پایداری سراسری) دستگاه ۶ تحت ۴ شرط فوق است.

توجه کنید که اگر $C > \frac{D}{\mu} > 0$، آنگاه دستگاه ۶ یک نقطه‌ی ساکن به نام $E_0 = (x_0, y_0)$ پیدا می‌کند که در آن:

$$\varphi(x_*) = \frac{D}{\mu}\ , \qquad y_* = \frac{r\mu x_*(1-x_*)}{D}$$

اگر $0 < x_0 < 1$، نقطه ساکن E_0 در ربع اول $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ واقع می‌شود. بنابراین اگر شرط $C > \frac{D}{\mu} > 0$ نقض شود، دستگاه ۶ در ربع اول نقطه‌ی ساکن نخواهد داشت و از این رو دور حدی نیز موجود نیست. در واقع اهمیت مسئله هنگامی است که $0 < x_0 < 1$.

حال فرض کنید E_0 در ربع اول موجود است. آیا یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ تحت شرایط فوق وجود دارد؟

کوجی و زگلینگ در یک مقاله‌ی مشترک، پس از بررسی دستگاه ۶ با تابع پاسخ ایولف حدس زیر را مطرح کردند:[۱۱]

حدس. تحت شرایط ۱ تا ۴، دستگاه ۶ حداکثر یک دور حدی دارد.

آنها سعی کردند حدس خود را برای تابع $\varphi(x) = arctan(ax)$، $a > 0$، که در شرایط ۱ تا ۴ صدق می‌کند ثابت کنند، اما نتایج قابل ملاحظه‌یی به دست نیاوردند. با توجه به کارهای انجام شده در این زمینه، حدس زیر را در مورد عدم وجود دورهای حدی دستگاه ۶ تحت شرایط ۱ تا ۴ بیان می‌کنیم.

حدس. تحت شرایط ۱ تا ۴ دستگاه ۶ فاقد دور حدی است اگر و تنها اگر:

$$2rx_0 + y_0\varphi'(x_0) - r \geq 0 \qquad (7)$$

با اثبات حدس‌های فوق، مسئله‌ی وجود و یگانگی دورهای حدی برای دستگاه ۶ تحت شرایط ۱ تا ۴ به‌طور کامل حل می‌شود.

اما حدس اول بسیار مشکل است و تاکنون حل نشده است. در مورد حدس دوم هنگامی که $\varphi(x)$ در شرایط معینی صدق کند، نتایج قابل توجهی می‌توان به‌دست آورد. در اینجا به بیان مفاهیم مورد نیاز و نتایجی در ارتباط با دستگاه ۶ می‌پردازیم و از آنها در بررسی نتایج بخش‌های آتی بهره می‌جوییم.

دستگاه خودگردان از معادلات دیفرانسیل عادی در $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

منظور از نماد $x.t$ مقدار جواب دستگاه در زمان t با شرط اولیه‌ی x است. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^2$ و $J \subseteq \mathbb{R}$، آنگاه:

$$S.J = \{x.t : x \in S,\ t \in J\}$$

مجموعه‌ی S را «مجموعه‌ی پایا» می‌نامیم اگر $S.\mathbb{R} = S$. همچنین S را «مجموعه‌ی پایای مثبت» گوییم اگر $S.\mathbb{R}_+ = S$. اگر $Y \subseteq \mathbb{R}^2$، مجموعه‌ی امگای حدی Y عبارت است از مجموعه‌ی پایای بیشینه‌یی که در بستار $Y.[0,\infty)$ قرار دارد. جوابی از دستگاه را که در یک مجموعه‌ی باز تعریف شده باشد یک «مدار» می‌نامیم.

مدار کامل جوابی است که برای هر مقدار t در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. هرگاه $\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = x_0$ و $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = x_1$ گوئیم مدار γ از x_0 به x_1 یک مدار هتروکلینیک است، و اگر x_0 بر x_1 منطبق باشد مدار γ را یک مدار هموکلینیک می‌نامند.

فرض کنید $G \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مجموعه‌ی باز و $\omega(x)$ یک مجموعه‌ی امگای حدی فشرده و ناتهی در G است. اگر $\omega(x)$ شامل هیچ نقطه‌ی ساکنی از دستگاه نباشد، آنگاه $\omega(x)$ یک مدار تناوبی است. اگر مدار تناوبی $\omega(x)$ شامل امگای حدی بعضی از نقاط $x \notin \omega(x)$ باشد، آنگاه $\omega(x)$ را یک «دور حدی» می‌نامند.

اکنون با در نظر گرفتن دستگاه ۶، قضیه‌ی زیر از فریدمن و سو کرانداری جواب‌های دستگاه را تضمین می‌کند.

قضیه‌ی ۱. فرض کنید:

$$\mathscr{J} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq x + \frac{y}{\mu} \leq 1 + \frac{M}{\mu}\}$$

که در آن $M = max\ \{rx(1-x) : (x \in [0,1]\}$. آنگاه.

الف) مجموعه‌ی $\mathscr{J}$ پایای مثبت است؛

ب) برای $\mathscr{J}, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ $(x(t), y(t)) \underset{t \to \infty}{\to} \mathscr{J}$ که در آن $(x(t), y(t))$ جواب گذرنده از نقطه‌ی (x_0, y_0) است.[۱۴]

برای آنکه بتوانیم دستگاه ۶ را ساده‌تر بررسی کنیم، ابتدا دستگاه

معروف لینار را در نظر گرفته و بعضی از نتایج آن را بیان می‌کنیم. سپس با تبدیل دستگاه ۶ به دستگاه لینار از نتایج به دست آمده در این دستگاه استفاده می‌کنیم.

دستگاه لینار زیر را در نظر بگیرید:

$$u' = h(v) - F(u)$$
$$v' = g(u) \qquad (۸)$$

در اینجا $' = \frac{d}{ds}$، $F(u)$، $g(u)$ و $h(v)$ توابع پیوسته‌ی حقیقی‌اند که روی $I = (-b, c)$ با $b, c > 0$ تعریف شده‌اند (b و c می‌توانند ∞ باشند). مفروضات زیر را روی دستگاه فوق در نظر می‌گیریم:

$$F(0) = 0 \text{ و برای } u \in I,\ u \neq 0 \quad ug(u) > 0 \qquad (۹)$$

$$vh(v) > 0,\ v \neq 0 \text{ اگر} \qquad (۱۰)$$

اگر

$$G(u) = \int_0^u g(\xi)\, d\xi \qquad (۱۱)$$

آنگاه، $\theta = G(u) sgn\ u$ و معکوس این تابع را با $G^{-1}(\theta)$ نمایش می‌دهیم. اکنون قضیه‌ی سوجی و هارا را در مورد دستگاه ۸ بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲. فرض کنید روابط ۱۰ و ۱۱ برقرار باشند، و علاوه بر این:

$$F(G^{-1}(-\theta)) \neq F(G^{-1}(\theta)),\quad 0 < \theta < M \text{ برای} \qquad (۱۲)$$

که در آن $M = min\ \{G(-b+0),\ G(c-0)\}$. در این صورت دستگاه ۸ در نوار $\{(u, v) : u \in I, v \in \mathbb{R}\}$ فاقد دور حدی است.[۱۵]

در ادامه خواهیم دید که تغییر متغیرهای بسیار ساده‌یی دستگاه ۶ را به دستگاه لینار ۸ تبدیل می‌کند و بررسی این دستگاه به مراتب ساده‌تر خواهد شد.

یک نتیجه‌ی مهم دیگر در ارتباط با دستگاه ۶ توسط آردیتو و ریکاردی به دست آمده که در واقع شرایطی برای عدم وجود دور حدی را بیان می‌کند. این نتیجه را اکنون بیان می‌کنیم، و در ادامه در بررسی دستگاه ۶ از آن بهره می‌جوییم.

اگر: $L : (0, x_*) \cup (x_*, 1) \to \mathbb{R}$

آنگاه:

$$L(x) = \frac{y_* - \dfrac{rx(1-x)}{\varphi(x)}}{\left(\int_{x_*}^{x} \mu - \dfrac{D}{\varphi(\xi)}\right) d\xi} \qquad (۱۳)$$

و

$$\lambda = \sup_{0 < x < x_*} L(x),\quad \gamma = \inf_{x_* < x < 1} L(x)$$

که در آن r، μ، D و $\varphi(x)$ پارامترها و تابع پاسخ در دستگاه ۶ هستند و (x_*, y_*) نقطه‌ی ساکن این دستگاه در ربع اول است. اکنون قضیه‌ی آردیتو و ریکاردی را بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۳. فرض کنید شرایط ۱ تا ۳ از بخش قبل برقرار باشند و

الف) $\gamma > 0$ و $\lambda \leq \gamma$؛

ب) $\lambda > \overline{lim}_{x \to x_*^-} L(x)$ یا $\gamma < \underline{lim}_{x \to x_*^+} L(x)$

در این صورت دستگاه ۶ فاقد دور حدی در ربع اول است.[۱۱]

همان‌گونه که در بخش قبل اشاره شد، به دنبال یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دوری حدی در دستگاه ۶ تحت شرایط ۱ تا ۴ هستیم. در واقع می‌خواهیم بدانیم که آیا شرط ۱ می‌تواند یک شرط لازم و کافی برای آن باشد. پاسخ این سؤال تحت بعضی شرایط مثبت است. اما در حالت کلی پاسخ آن مشخص نیست. برای بعضی مثال‌ها که در شرایط مذکور صدق می‌کنند، پاسخ این سؤال مثبت است.

در اینجا ما مسئله را برای خانواده‌یی از توابع $\varphi(x)$ بررسی می‌کنیم که علاوه بر شرایط ۱ تا ۴ در شرایط زیر نیز صدق می‌کنند.

شرط ۵: عدد مثبت و منحصر به فرد α، $1 > \alpha$، موجود است، به‌طوری که:

$$\varphi'''(x) < 0,\quad 0 < x < \alpha \text{ برای}$$
$$\varphi'''(\alpha) = 0$$
$$\varphi'''(x) > 0,\quad x > \alpha \text{ برای}$$

توابع $arctan\ (ax)$ و $tanh\ (ax)$ در شرایط ۱ تا ۵ صدق می‌کند. در ادامه دستگاه ۶ را تحت شرایط ۱ تا ۵ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

شرایط عدم وجود دور حدی

همان‌گونه که اشاره شد، در این بخش می‌خواهیم همان دستگاه ۶ را با شرایط ۱ تا ۴ بررسی، و تحقیق کنیم که آیا می‌توان یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دورهای حدی ۶ تحت شرط اضافی ۵ به‌دست آورد.

به آسانی می‌توان دید که توابع $arctan\ (ax)$ و $tanh(ax)$، $a > 0$، علاوه بر شرایط ۱ تا ۴ در شرط ۵ نیز صدق می‌کند.

اکنون با فرض $C > \frac{D}{\mu} > 0$، دستگاه ۶ علاوه بر (۰ و ۰) و (۰ و ۱) نقطه‌ی ساکن سومی چون $E_* = (x_*, y_*)$ نیز پیدا می‌کند.

$$\varphi(x_*) = \frac{D}{\mu},\quad y_* = \frac{r\mu x_*(1 - x_*)}{D}$$

اگر $0 < x_* < 1$ این نقطه‌ی ساکن در ربع اول است و بنابراین بررسی وجود دورهای حدی در این حالت مورد نظر است.

قضیه‌ی ۴. فرض کنید دستگاه ۶ در شرایط ۱ تا ۴ صدق می‌کند. اگر دستگاه ۶ فاقد دور حدی باشد، آنگاه:

$$2rx_0 + y_0\varphi'(x_0) - r \geq 0 \tag{14}$$

اثبات. ماتریس دستگاه خطی شده در نقطه‌ی E_0 عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} -(2r x_0 + y_0 \varphi'(x_0) - r) & -\varphi(x_0) \\ \mu y_0 \varphi'(x_0) & 0 \end{bmatrix}$$

چندجمله‌یی مشخصه‌ی این ماتریس عبارت است از:

$$P(z) = z^2 + (2rx_0 + y_0\varphi'(x_0) - r)\, z + \mu y_0 \varphi(x_0)\varphi'(x_0)$$

چون $\mu y_0 \varphi(x_0)\varphi'(x_0) > 0$، ریشه‌های $P(z)$ دارای قسمت حقیقی مثبت‌اند، اگر و تنها اگر:

$$2rx_0 + y_0\varphi'(x_0) - r < 0 \tag{15}$$

بنابراین E_0 نقطه‌ی ساکن ناپایدار است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که منیفلدهای پایدار و ناپایدار (۰و۰) به‌ترتیب روی محورهای y و x قرار دارند. همچنین منیفلد ناپایدار در نقطه‌ی (۰و ۱)، ربع اول را در یک منحنی قطع می‌کند. حال اگر E_0 ناپایدار باشد، آنگاه از قضیه‌ی پوانکاره ـ بندیکسون مشاهده می‌شود که امگای حدی هر مدار با یک نقطه‌ی آغازی در ربع اول، یک دور حدی است.

دستگاه ۶ را با تغییر متغیرهای زیر به یک دستگاه لینار، یعنی دستگاه ۸ تبدیل کرده، و از قضیه‌ی ۲ (قضیه‌ی سوجی) استفاده می‌کنیم. تغییر متغیرهای مذکور عبارت‌اند:

$$u = x - x_0\,,\ v = \log y - \log y_0\ ,\ \ ds = \varphi(x)\, dt$$

در این صورت دستگاه ۶ به یک دستگاه ۸ تبدیل می‌شود که در آن:

$$I = (-x_0, \infty)\ ,\ F(u) = \frac{r\,(u+x_0)\,(1-(u+x_0))}{\varphi\,(u+x_0)} - y_0$$

$$g(u) = \mu - \frac{D}{\varphi(u+x_0)}\ ,\ h(v) = y_0\,(e^{v}-1)$$

از این‌که $F(0)=g(0)=h(0)=0$، برای $u\in I$ داریم $\frac{d}{du}g(u) > 0$ و برای $v\in\mathbb{R}$، $\frac{d}{dv}h(v) > 0$، دیده می‌شود که شرایط ۱۰ و ۱۱ برقرارند. اکنون برای به‌دست آمدن نتایج اساسی این بخش به بررسی بعضی خواص F و G (G تابع تعریف شده در (۱۱)) می‌پردازیم که در تحقق شرط ۱۲ از قضیه‌ی ۲ (قضیه‌ی سوجی)، به ما کمک می‌کنند. این خواص در قضیه‌های زیر بیان می‌شوند:

قضیه‌ی ۵. فرض کنید شرط ۱۴ برقرار باشد. برای $u>-x_0$، معادله‌ی جبری $F'(u) = 0$ حداکثر دو ریشه دارد.

اثبات. با مشتق‌گیری از تابع $F(u)$ به دست می‌آوریم:

$$F'(u) = \frac{r[(1-2(u+x_0))\varphi(u+x_0) - (u+x_0)(1-(u+x_0))\varphi'(u+x_0)]}{\varphi^2(u+x_0)}$$

برای $u > -x_0$ تعریف می‌کنیم:

$$I(u) = (1-2(u+x_0))\varphi(u+x_0) - (u+x_0)(1-(u+x_0))\varphi'(u+x_0),\ u > -x_0$$

اگر $\frac{1}{2}-x_0 < u < 1-x_0$، آنگاه $I(u) < 0$ و از این‌رو $F'(u) < 0$.
اگر $u > 1-x_0$، آنگاه با مشتق‌گیری از $I(u)$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{du}I(u) = -2\varphi(u+x_0) - (u+x_0)(1-(u+x_0))\varphi''(u+x_0) < 0$$

با توجه به اینکه $I(1-x_0) < 0$، نتیجه می‌گیریم $I(u) < 0$ و درنتیجه برای $u > 1-x_0$، $F'(u) < 0$. اکنون فرض کنید برای یک $\bar{u}$ که $-x_0 < \bar{u} < \frac{1}{2}-x_0$، داشته باشیم $I'(\bar{u}) = 0$. در نقطه‌ی $\bar{u}$ به‌دست می‌آوریم:

$$I(\bar{u}) = (\bar{u}+x_0)(1-(\bar{u}+x_0))\left[-\frac{1-2(\bar{u}+x_0)}{2}\varphi''(\bar{u}+x_0) - \varphi'(\bar{u}+x_0)\right] \tag{16}$$

اکنون تعریف می‌کنیم:

$$J(u) = -\frac{1-2(u+x_0)}{2}\varphi''(u+x_0) - \varphi'(u+x_0),\ u\in(-x_0\,,\ \frac{1}{2}-x_0)$$

از رابطه‌ی ۱۶ و $I'(\bar{u}) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $I(\bar{u})$ و $J(\bar{u})$ هم‌علامت‌اند. با مشتق‌گیری از $J(u)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{du}J(u) = -\frac{1-2\,(u+x_0)}{2}\varphi'''(u+x_0)$$

با استفاده از شرط ۵ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{du}J(u) > 0\,,\ u\in(-x_0, \alpha - x_0) \text{ برای} \tag{17}$$

$$\frac{d}{du}J(\alpha - x_0) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{d}{du}J(u) < 0\,, u > \alpha - x_0 \text{ برای} \tag{19}$$

اکنون فرض کنید که $\alpha - x_0 > 0$. اگر $\lim\limits_{u\to -x_0^+} I'(u) > 0$ آنگاه از شرط ۱۴ نتیجه می‌شود که یک u_* وجود دارد، $u_*\in(-x_0, 0)$، بطوری‌که $I(u_*) = 0$. از $I(-x_0) = 0$ وجود یک

u_1 محرز میشود، بهطوریکه $u_1 \in (-x_*, u_\circ)$، و $I'(u_1) = 0$ و $J(u_1) < 0$. با توجه به اینکه $J(u)$ در فاصلهی $(-x_*, \alpha - x_*)$ یک تابع صعودی است، برای $u \in (-x_*, \alpha - x_*)$ و $u \neq u_\circ$ داریم: $I(u) \neq 0$. همچنین برای $u \in (u_\circ, \alpha - x_*)$ داریم $I'(u) \neq 0$ و $I(\alpha - x_*) < 0$. بنابراین اگر $\alpha > \frac{1}{2}$، آنگاه $u_\circ$ باید تنها ریشهی $I(u)$ باشد. در غیر اینصورت، ریشهی دیگری برای $I(u)$ در $(\alpha - x_*, \frac{1}{2} - x_*)$ وجود دارد. بهدلیل $I(\frac{1}{2} - x_*) < 0$، اعداد v_1 و v_2 وجود دارند که $\alpha - x_* < v_1 < v_2 < \frac{1}{2} - x_*$ ، $I'(v_1) = I'(v_2) = 0$ ، $I(v_1) < 0$ ، $I(v_2) \geq 0$. $J(v_1) < 0$ و $J(v_2) \geq 0$ و این با رابطهی ۱۹ در تناقض است.

اکنون فرض کنید $\lim_{u \to -x_*^+} I'(u) < 0$. در اینجا دو حالت متمایز وجود دارد.

حالت اول: برای $u \in (-x_*, 0)$، $I(u) \neq 0$؛

حالت دوم: برای $-x_* < u_\circ < 0$ یک $u_\circ$ وجود دارد، بهطوریکه $I(u_\circ) = 0$ و $I(u) \neq 0$ برای $u \in (-x_*, u_\circ)$. در حالت اول، اگر برای $u \in (-x_*, \alpha - x_*)$، $I'(u) \neq 0$، آنگاه برای $u \in (\alpha - x_*, \frac{1}{2} - x_*)$، $I(u) \neq 0$. در غیر اینصورت، v_1 و v_2 وجود دارند بهطوریکه $\alpha - x_* < v_1 < v_2 < \frac{1}{2} - x_*$، $I'(v_1) = I'(v_2) = 0$، و $I(v_1) < 0$ و $I(v_2) \geq 0$. بنابراین $J(v_1) < 0$ و $J(v_2) \geq 0$ که با رابطهی ۱۹ در تناقض است. اگر $I'(u)$ در فاصلهی $(-x_*, \alpha - x_*)$ دارای ریشهیی باشد، آنگاه $I(u)$ در فاصلهی $(\frac{1}{2} - x_*, 0)$ دو ریشه دارد زیرا در غیر اینصورت یک تناقض با ۱۷ یا ۱۹ بهدست میآید. در حالت دوم، اگر $I'(u_\circ) = 0$، آنگاه از رابطهی ۱۷ و ۱۹ هیچ ریشهیی برای $I(u)$ در فاصلهی $u > u_\circ$ وجود ندارد. اگر $I'(u_\circ) \neq 0$، آنگاه از رابطهی ۱۴ نتیجه میشود یک u_1 در فاصلهی $(u_\circ, 0)$ وجود دارد که $I(u_1) = 0$. از این رو یک v وجود دارد که $v \in (u_\circ, u_1)$، بهطوریکه $I'(v) = 0$ و $I(v) < 0$. بنابراین از روابط ۱۷ و ۱۹ میتوان دید که $I(u)$ ریشهیی غیر از $u_\circ$ و u_1 نخواهد داشت.

سرانجام به روش مشابه میتوان نشان داد که اگر $\alpha - x_* > 0$ و یا $\alpha > \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $I(u)$ در فاصلهی $(-x_*, \frac{1}{2} - x_*)$ حداکثر دو ریشه دارد. از اینرو، $F'(u)$ در فاصلهی $u > -x_*$ حداکثر دو ریشه دارد و اثبات قضیه کامل میشود.

با استفاده از قاعدهی هوپیتال تساویهای زیر را خواهیم داشت که در اثبات قضیههای بعدی از آنها کمک میگیریم.

$$\lim_{u \to -x_*^+} F(u) = \frac{r}{\varphi'(0)} - y_*$$

$$\lim_{u \to -x_*^+} F'(u) = \frac{-r}{2\varphi'^2(0)}[2\varphi'(0) + \varphi''(0)]$$

قضیهی ۶. اگر $2\varphi'(0) + \varphi''(0) < 0$، آنگاه $F'(u)$ در فاصلهی $u > -x_*$ دقیقاً یک ریشه دارد.

اثبات. از اینکه $2\varphi'(0) + \varphi''(0) < 0$، نتیجه میشود $F'(-x_*) > 0$. با استفاده از شرط ۱۴ و پیوستگی $F'(u)$ روی بازهی $(-x_*, \infty)$، بهدست میآوریم که $F'(u)$ در فاصلهی $(-x_*, 0)$ یک ریشه دارد. اگر $F'(u)$ دارای ریشهی دیگری روی $(-x_*, 0)$ باشد، آنگاه باید $F'(u)$ حداقل سه ریشه داشته باشد که با قضیهی ۵ در تناقض است.

حال فرض کنید $F'(u)$ یک ریشه در فاصلهی $(0, \infty)$ داشته باشد. بهدلیل اینکه $\lim_{u \to \infty} F(u) = -\infty$، $F'(u)$ بایستی حداقل دو ریشه در $(0, \infty)$ داشته باشد. بنابراین $F'(u)$ دارای حداقل سه ریشه در فاصلهی $(-x_*, \infty)$ است که دوباره با قضیهی ۵ در تناقض است.

قضیهی ۷. فرض کنید $2\varphi'(0) + \varphi''(0) \geq 0$.

الف) اگر $\frac{r}{\varphi'(0)} - y_* \leq 0$، آنگاه $F'(u)$ دقیقاً دارای دو ریشه است که هر دو منفیاند؛

ب) اگر $\frac{r}{\varphi'(0)} - y_* > 0$، آنگاه یا $F'(u)$ هیچ ریشهیی ندارد و یا دقیقاً دو ریشه دارد. در حالتی که $F'(u)$ دو ریشه دارد، که همعلامتاند.

اثبات. برای قسمت الف توجه کنید که برای $u = 0, x_*$، $F'(u) < 0$ و $F(0) = 0$. بنابراین طبق قضیهی ۵، $F'(u)$ دارای دقیقاً دو ریشه است که هر دو منفیاند.

برای قسمت ب، ابتدا توجه میکنیم که اگر $F'(u)$ در فاصلهی $(-x_*, 0)$ دارای یک ریشه باشد، آنگاه از قضیهی ۶ و اینکه $F(0) = 0$، نتیجه میشود که $F'(u)$ باید دقیقاً دارای دو ریشه باشد که هر دو منفیاند. حال فرض کنید $F'(u)$ دارای یک ریشه در بازهی $u > 0$ باشد. چون $\lim_{u \to +\infty} F(u) = -\infty$، $F'(u)$ حداقل یک ریشهی دیگر در بازهی $u > 0$ دارد و در نتیجه از قضیهی ۵، $F'(u)$ دقیقاً دارای دو ریشه است.

قضیهی بعدی شرطی را ارائه میکند که تحت آن، رابطهی ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است. در اینجا فرض میکنیم که شرط $2\varphi'(0) + \varphi''(0) > 0$ برقرار باشد.

قضیهی ۸. اگر $\frac{r}{\varphi'(0)} - y_* \geq 0$، آنگاه رابطهی ۱۲ برقرار است.

اثبات. اثبات بر اساس برهان خلف است. فرض کنید $\theta_\circ > 0$ موجود است بهطوریکه:

$$F(G^{-1}(\theta_\circ)) = F(G^{-1}(-\theta_\circ))$$

که در آن $\eta = -G^{-1}(-\theta_\circ)$ و $\beta = -G^{-1}(-\theta_\circ)$. در اینصورت خواهیم داشت:

$$F(-\eta) = F(\beta) \qquad (۲۰)$$

$$G(-\eta) = \theta_\circ = G(\beta) \qquad (۲۱)$$

فاقد دور حدی است یا دور حدی آن یگانه است مشخص کردند. در ادامه‌ی این بررسی، شرط لازم و کافی برای عدم وجود و همچنین شرط لازم و کافی برای یگانگی دور حدی دستگاه ۶ با تابع پاسخ ایولف ارائه شد.[۱۲] همچنین یکی دیگر از دستگاه‌های شکار ـ شکارچی که به دستگاه تعمیم‌یافته‌ی گوس معروف است بررسی، و با ساختن یک تابع لیاپانف برای دستگاه، پایداری سراسری آن و در نتیجه عدم وجود دور حدی به اثبات رسیده است.[۱۳]

در اینجا مسئله‌ی بسیار مهمی که مطرح است ارائه‌ی یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دور حدی (پایداری سراسری) دستگاه ۶ تحت ۴ شرط فوق است.

توجه کنید که اگر $C > \frac{D}{\mu} > 0$، آنگاه دستگاه ۶ یک نقطه‌ی ساکن به نام $E_* = (x_*, y_*)$ پیدا می‌کند که در آن:

$$\varphi(x_*) = \frac{D}{\mu}, \qquad y_* = \frac{r\mu x_*(1-x_*)}{D}$$

اگر $1 > x_* > 0$، نقطه ساکن E_* در ربع اول $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ واقع می‌شود. بنابراین اگر شرط $C > \frac{D}{\mu} > 0$ نقض شود، دستگاه ۶ در ربع اول نقطه‌ی ساکن نخواهد داشت و از این رو دور حدی نیز موجود نیست. در واقع اهمیت مسئله هنگامی است که $1 > x_* > 0$.

حال فرض کنید E_* در ربع اول موجود است. آیا یک شرط لازم و کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ تحت شرایط فوق وجود دارد؟

کوجی و زگلینگ در یک مقاله‌ی مشترک، پس از بررسی دستگاه ۶ با تابع پاسخ ایولف حدس زیر را مطرح کردند:[۱۱]

حدس. تحت شرایط ۱ تا ۴، دستگاه ۶ حداکثر یک دور حدی دارد.

آنها سعی کردند حدس خود را برای تابع $\varphi(x) = \arctan(ax)$، $a > 0$، که در شرایط ۱ تا ۴ صدق می‌کند ثابت کنند، اما نتایج قابل ملاحظه‌یی به دست نیاوردند. با توجه به کارهای انجام شده در این زمینه، حدس زیر را در مورد عدم وجود دورهای حدی دستگاه ۶ تحت شرایط ۱ تا ۴ بیان می‌کنیم.

حدس. تحت شرایط ۱ تا ۴ دستگاه ۶ فاقد دور حدی است اگر و تنها اگر:

$$2rx_* + y_*\varphi'(x_*) - r \geq 0 \tag{7}$$

با اثبات حدس‌های فوق، مسئله‌ی وجود و یگانگی دورهای حدی برای دستگاه ۶ تحت شرایط ۱ تا ۴ به‌طور کامل حل می‌شود.

اما حدس اول بسیار مشکل است و تاکنون حل نشده است. در مورد حدس دوم هنگامی که $\varphi(x)$ در شرایط معینی صدق کند، نتایج قابل توجهی می‌توان به‌دست آورد. در اینجا به بیان مفاهیم مورد نیاز و نتایجی در ارتباط با دستگاه ۶ می‌پردازیم و از آنها در بررسی نتایج بخش‌های آتی بهره می‌جوییم.

دستگاه خودگردان از معادلات دیفرانسیل عادی در $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

منظور از نماد $x.t$ مقدار جواب دستگاه در زمان t با شرط اولیه‌ی x است. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^2$ و $J \subseteq \mathbb{R}$، آنگاه:

$$S.J = \{x.t : x \in S,\ t \in J\}$$

مجموعه‌ی S را «مجموعه‌ی پایا» می‌نامیم اگر $S.\mathbb{R} = S$. همچنین S را «مجموعه‌ی پایای مثبت» گوییم اگر $S.\mathbb{R}_+ = S$. اگر $Y \subseteq \mathbb{R}^2$، مجموعه‌ی امگای حدی Y عبارت است از مجموعه‌ی پایای بیشینه‌یی که در بستار $Y.[0,\infty)$ قرار دارد. جوابی از دستگاه را که در یک مجموعه‌ی باز تعریف شده باشد یک «مدار» می‌نامیم.

مدار کامل جوابی است که برای هر مقدار t در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. هرگاه $\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = x_0$ و $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = x_1$ گوئیم مدار γ از x_0 به x_1 یک مدار هتروکلینیک است، و اگر x_0 بر x_1 منطبق باشد مدار γ را یک مدار هموکلینیک می‌نامند.

فرض کنید $G \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مجموعه‌ی باز و $\omega(x)$ یک مجموعه‌ی امگای حدی فشرده و ناتهی در G است. اگر $\omega(x)$ شامل هیچ نقطه‌ی ساکنی از دستگاه نباشد، آنگاه $\omega(x)$ یک مدار تناوبی است. اگر مدار تناوبی $\omega(x)$ شامل امگای حدی بعضی از نقاط $x \notin \omega(x)$ باشد، آنگاه $\omega(x)$ را یک «دور حدی» می‌نامند.

اکنون با در نظر گرفتن دستگاه ۶، قضیه‌ی زیر از فریدمن و سو کرانداری جواب‌های دستگاه را تضمین می‌کند.

قضیه‌ی ۱. فرض کنید:

$$\mathscr{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq x + \frac{y}{\mu} \leq 1 + \frac{M}{\mu}\}$$

که در آن $M = max\ \{rx(1-x) : (x \in [0,1]\}$. آنگاه

الف) مجموعه‌ی $\mathscr{S}$ پایای مثبت است؛

ب) برای $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$، $(x(t), y(t)) \underset{t \to \infty}{\to} \mathscr{S}$ که در آن $(x(t), y(t))$ جواب گذرنده از نقطه‌ی (x_0, y_0) است.[۱۴]

برای آنکه بتوانیم دستگاه ۶ را ساده‌تر بررسی کنیم، ابتدا دستگاه

که در ان $\eta = -G^{-1}(-\theta_0)$ و $\beta = G^{-1}(\theta_0)$ و $-x_* < -\eta < 0 < \beta$.

طبق قضیه‌ی ۶، یک u_* موجود است به‌طوری‌که $-x_* < u_* < 0$ و

$F'(v) = 0$ و $0 < v < -x_*$. از این رو یک v یگانه موجود است، $0 < v^* < x_*$، به‌طوری‌که $f(v^*) = 0$، برای $x \in (0, v^*)$، $f(x) > 0$ و

برای $x \in (v^*, x_*)$، $f(x) < 0$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sup_{0<x<x_*} f(x) = \sup_{0<x<v^*} f(x)$$

قضیه‌ی ۱۲. با فرض این که:

$$S_1(x) = x(1-x)\varphi'(x) - (1-2x)\varphi(x)$$
$$T_1(x) = x(\varphi(x) - \varphi(x_*))$$

اگر یک $c > 0$ موجود باشد $S_1(x) - cT_1(x) \geq 0$ برای هر $x \in (0, 1)$، آنگاه $\lambda \leq \gamma$.

اثبات. ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$f(x) = \frac{s_1(x) - cT_1(x)}{\varphi(x)\ (\mu\varphi(x) - D)} + \frac{cx}{\mu\varphi(x)}$$

قرار می دهیم:

$$R(x) = \frac{S_1(x) - cT_1(x)}{\varphi(x)(\mu\varphi(x) - D)}\ ,\ \ Q(x) = \frac{cx}{\mu\varphi(x)}$$

از این‌که برای $x \in (0, x_*)$، $\mu\varphi(x) - D < 0$ و برای $x > x_*$، $\mu\varphi(x) - D > 0$، نتیجه می‌شود که برای $x \in (0, x_*)$، $R(x) < 0$ و برای $x \in (x_*, 1)$، $R(x) > 0$. از این رو خواهیم داشت:

$$f(x) \leq Q(x)\ ,\ x \in (0, v^*)$$
$$f(x) \geq Q(x)\ ,\ x \in (x_*, 1)$$

با استفاده از این حقیقت که $Q(x)$ یک تابع مثبت و صعودی در بازه‌ی (۱ و ۰) است، رابطه‌های ۲۵ و ۲۶ به‌دست می‌آیند:

$$f(x) \leq Q(x) < Q(v^*)\ ,\ x \in (0, v^*) \tag{۲۵}$$

$$f(x) \geq Q(x) > Q(x_*) > Q(v^*)\ ,\ x \in (x_*, 1) \tag{۲۶}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\lambda = \underset{0<x<v^*}{SUP} f(x) =$$

$$\underset{0<x<x_*}{SUP} f(x) \leq Q(v^*) \leq \inf_{x_*<x<1} f(x) = \gamma$$

قضیه‌ی ۱۳. فرض کنید $x_* < \frac{1}{2}$ و $\frac{r}{\varphi'(0)} - y_* > 0$. اگر یک $c > 0$ موجود باشد که برای $x \in$ (۱ و ۰)، $S_1(x) - cT_1(x) \geq 0$ آنگاه دستگاه ۶ فاقد دور حدی است.

اثبات. طبق قضیه‌ی فوق شرط الف از قضیه‌ی ۳ برقرار است و در این صورت شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

اگر تابع $\varphi(x)$ در دستگاه ۶ به بعضی پارامترها وابسته باشد، آنگاه با تعیین دامنه‌یی برای تغییرات پارامترها، این احتمال وجود دارد که برای بعضی از مقادیر $C > 0$ داشته باشیم: $S_1(x) - cT_1(x) \geq 0$. بنابراین می‌توانیم شرایطی روی پارامترهای دستگاه تحمیل کنیم که شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ باشد.

اکنون بررسی دستگاه را تحت شرط $2\varphi'(0) + \varphi''(0) \geq 0$ ادامه می‌دهیم. در این حالت طبق قضیه‌ی ۷، $F'(u)$ یا هیچ ریشه‌یی ندارد و یا دقیقاً دو ریشه دارد. فرض کنید $F'(u)$ هیچ ریشه‌یی نداشته باشد. از این رو طبق قسمت ب قضیه‌ی ۷، برای $u \in (-x_*, 0)$، $F(u) \geq 0$ و برای $u > 0$، $F(u) < 0$. بنابراین برای هر $\beta > 0$، η، رابطه‌ی ۲۰ نمی‌تواند برقرار باشد و در نتیجه رابطه‌ی ۱۲ برقرار می‌شود. در این صورت شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

حال فرض کنید $F'(u)$ دارای دو ریشه باشد. طبق نتایج قبل این دو ریشه باید هم‌علامت باشند. در اینجا حالتی را که $v_1 < v_2 < 0$ ریشه‌های $F'(u)$ هستند، بررسی می‌کنیم.

با توجه به اینکه $\lim_{x \to x_*^\pm} L(x) = \pm\infty$ و $L(1) > 0$ نتیجه می‌شود که $\gamma > 0$ و $\lambda > \lim_{x \to x_*} L(x)$ که در آن $L(x)$ همان تابعی است که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی ۱۳ تعریف شده است. همچنین داریم:

$$\underset{0<x<x_*}{SUP} L(x) = \underset{0<x<x_*}{SUP} f(x)$$

$$\inf_{x_*<x<1} L(x) = \inf_{x_*<x<1} L(x)$$

که در آن $f(x)$ نیز همان تابعی است که به‌وسیله‌ی رابطه‌ی ۲۳ تعریف شده است. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که v_1^* و v_2^* موجودند که $0 < v_1^* < v_2^* < x_*$، $f(v_1^*) = f(v_2^*) = 0$.

قضیه‌ی ۱۴. فرض می‌کنیم:

$$S_2(x) = x(1-x)\varphi'(x) - (1-2x)\varphi(x)$$
$$T_2(x) = (x - v_1^*)(\varphi(x) - \varphi(x_*))$$

اگر $c > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $S_2(x) - cT_2(x) \geq 0$ برای هر $x \in (v_1^*, 1)$، آنگاه $\lambda \leq \gamma$.

اثبات. به‌وضوح دیده می‌شود که:

$$f(x) = \frac{S_2(x) - cT_2(x)}{\varphi(x)(\varphi(x) - \varphi(x_*))} + \frac{c(x - v_1^*)}{\mu\varphi(x)}$$

اگر

$$R(x) = \frac{S_2(x) - cT_2(x)}{\varphi(x)(\varphi(x) - \varphi(x_*))}, Q(x) = \frac{c(x - v_1^*)}{\mu\varphi(x)}$$

از $\mu\varphi(x) - D \geq 0$ برای $x \in (x_*, 1)$، و $\mu\varphi(x) - D < 0$، برای

$x\in(0,x_0)$ نتیجه می‌شود که $R(x)<0$ برای $x\in(v_1^*,x_0)$، و $R(x)>0$ برای $x\in(x_0,1)$. بنابراین:

$$f(x)\le Q(x),\ x\in(v_1^*,x_0)$$
$$f(x)\ge Q(x),\ x\in(x_0,1)$$

همچنین برای $x\in(0,v_1^*)\cup(v_2^*,x_0)$، $f(x)<0$ و برای $x\in(v_1^*,v_2^*)$، $f(x)>0$. بنابراین:

$$\sup_{0<x<x_0} f(x)=\sup_{v_1^*<x<v_2^*} f(x)$$

با استفاده از این حقیقت که $Q(x)$ روی $(v_1^*,1)$ یک تابع مثبت و صعودی است، روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda=\underset{0<x<x_0}{SUP} f(x)\le Q(v_2^*)\le \inf_{x_0<x<1} f(x)=\gamma$$

قضیه‌ی ۱۵ یک نتیجه‌ی فوری از این قضیه و قضیه‌ی ۳ است.

قضیه‌ی ۱۵. فرض کنید v_1 و v_2 وجود دارند به‌طوری‌که $-x_0<v_1<v_2<0$، $F'(v_1)=F'(v_2)=0$. اگر $c>0$ موجود باشدبه گونه‌یی که $S_2(x)-cT_2(x)\ge 0$ برای $x\in(v_1^*,1)$، آنگاه دستگاه ۶ فاقد دور حدی است.

با استفاده از نتایج به‌دست آمده در قضیه‌های ۸، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ نتیجه‌ی اساسی را می‌توان در قالب یک قضیه به‌صورت زیر بیان کرد که با بیان این قضیه، بررسی دستگاه ۶ را در این فصل به پایان می‌بریم.

قضیه‌ی ۱۶. فرض کنید تابع پاسخ $\varphi(x)$ در دستگاه ۶ در شرایط ۱ تا ۵ صدق کند.

الف) فرض کنید $2\varphi'(0)+\varphi''(0)<0$. اگر $\frac{r}{\varphi'(0)}-y_0\ge 0$ یا $x_0\ge\frac{1}{2}$، آنگاه شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

ب) فرض کنید $2\varphi'(0)+\varphi''(0)<0$، $\frac{r}{\varphi'(0)}-y_0<0$ و $x_0<\frac{1}{2}$. اگر یک $c>0$ موجود باشد که برای $x\in(0,1)$، $S_1(x)-cT_1(x)\ge 0$. آنگاه شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

ج) فرض کنید $2\varphi'(0)+\varphi''(0)\ge 0$ و برای $u>-x_0$، $F'(u)$ فاقد ریشه باشد. دراین صورت شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

د) فرض کنید $2\varphi'(0)+\varphi''(0)\ge 0$ و $F'(u)$ در فاصله‌ی $(-x_0,0)$ دارای دو ریشه باشد. اگر یک $c>0$ موجود باشدکه برای $x\in(v_1^*,1)$، $S_2(x)-cT_2(x)\ge 0$ آنگاه شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار دستگاه ۶ تحت شرایطی روی تابع پاسخ φ و مشتقات آن مورد بررسی قرار گرفت. تنها حالتی که باقی می‌ماند، هنگامی است که شرط $2\varphi'(0)+\varphi''(0)\ge 0$ برقرار بوده و $F'(u)$ دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد. واضح است که اگر بیشینه‌ی $F(u)$ برای $u>0$ یک مقدار منفی باشد، آنگاه رابطه‌ی ۱۲ برقرار است و شرط ۱۴ یک شرط کافی برای عدم وجود دور حدی دستگاه ۶ است. درحالتی که $F(u)$ برای $u>0$ دارای بیشینه‌ی مثبت باشد، مسئله حل نشده باقی می‌ماند. با وجود اینکه دستگاه ۶ تحت شرایط مختلفی روی تابع $\varphi(x)$ مورد بررسی قرار گرفته است، بررسی شرط لازم و کافی برای دستگاه درحالت کلی تحت شرایط ۱ تا ۴ هنوز باقی مانده است.

منابع

1. Volterra, V. "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", *Mem. R. Com. Tolassogr. Ital.* **131**, pp 1-142 (1927).
2. Gause, G.F. *The struggle for existence. Williams and Willkins*, Baltimore (1934).
3. Levin, S.A. "A more functional response to predator-prey stability", *Am. Nat*, **110**, pp 381-383 (1977).
4. Freedman, H.I. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. Marcel Dekker, New York (1980).
5. Rosenzweig, M.L. and McArthur, R.H "Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions", *Am. Nat*, **47**, pp 209-223 (1963).
6. Holling, C.S. "The functional response of predator to prey density and its role in mimircy and population regulation", *Mem. Ent. Soc.* **45**, pp 3-60 (1973).
7. Cheng, K.-S., Hsu, S.-B. and Lin, S.-S. "Some results on global stability of predator-prey system", *J. Math. Biol.* **12**, pp 115-126 (1981).
8. Chen, J. and Zhang, H. "The qualitative analysis of two spcies predator-prey model with Holling type III functional response", *APPl. Math. Mech*, **7** , pp 77-86 (1986).
9. Kazarinoff, N. and Van Der Driessche, P. "A model predator-prey system with functional response", *Math. Biocsis*, **39**, pp 125-134 (1978).
10. Ivlev, V.S. *Experimental Ecology of the Feeding of Fishes*, Yale

University Press, (1961).

11. Kooij, R.E. and Zegeling, A. *A predator-prey model with Ivlev's functional response, J. Math. Anal. Appl.* **198,** pp 473-489 (1996).
12. Sugie, J. "Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type", *J. Math. Anal. Appl,* **217,** pp 349-371 (1998).
13. Arditto, A. and Ricciardi, P. "Lyapunov functions for a generalized Gause type model", *J. Math. Biol,* **33**, pp 816-828 (1995).
14. Freedman, H.I. and So, J.W.-H. "Global stability and persistence of simple food chains", *Math. Biosci,* **76**, pp 69-86 (1985).
15. Sugie, J. and Hara, T. "Non-existence of preiodic solutions of the Lienard system", *J. Math. Anal. Appl.* **159,** pp 224-236 (1991).