بررسی هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک و روش‌های ایجاد آن

غلامحسین ارجائی (دانشیار)
محمد مؤمنی (کارشناس ارشد)
بخش ریاضی، دانشکده‌ی علوم، دانشگاه شیراز

سیستم‌های آشوب‌ناک به حساسیت در برابرمقادیر اولیه مشهورند. اخیراً پیکارو و کارول نشان داده‌اند که دو سیستم تحت شرایطی می‌توانند هم‌سنگ شوند. در نگاه اول به نظر می‌رسد که به‌علت حساسیت سیستم‌ها در برابر مقادیر اولیه، این هم‌سنگی شکسته خواهد شد اما چنین نیست. هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک به طور قابل ملاحظه‌یی از سال ۱۹۹۰ رشد کرده است. در این نوشتار، ضمن پدیده‌ی هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک، به بیان مفاهیمی همچون «هم‌سنگی یکسان»[۱] و «هم‌سنگی عمومی»[۲] پرداخته و روش‌های پیکارو و کارول، و جداسازی فعال-غیرفعال را که برای هم‌سنگ کردن دو سیستم مناسب‌اند، بررسی خواهیم کرد.

مقدمه

اولین بار پدیده‌ی هم‌سنگی توسط هویگنس گزارش شده است. وی مشاهده کرد دو ساعت، با آونگ‌ها و فرکانس‌های یکسان، که بر روی دیوار نصب شده‌اند بعد ازمدتی هم‌سنگ شده و نوساناتی مشابه، اما در جهت مخالف دارند.[۱] این گزارش که نشانگر پدیده‌ی هم‌سنگی در یک نوسانگر فیزیکی است، باعث شد که مهندسان و فیزیک‌دانان بسیاری این پدیده را به‌طور عملی در نوسانگرهای دیگر مورد استفاده قرار دهند. رایلی نوسان‌های هم‌سنگ را در اعضای مرتعش دستگاه‌های مکانیکی و الکتریکی تحقیق کرد[۲] و واندرپول نیز در سال ۱۹۲۷ پدیده‌ی هم‌سنگی را در نوسانگرهای فیزیکی مورد تحقیق قرار داده است.[۳]

در بین سال‌های ۱۹۸۶-۱۹۸۳ فوجیسکا و یامادا طی یک سری مقالات به بررسی پایداری حرکت در نوسانگرهای آشوب‌ناک جفت شده پرداختند.[۴-۷] همچنین پیکوفسکی، افری‌مویچ و همکارانش به بررسی هم‌سنگی در بعضی پدیده‌های خاص پرداختند.[۸و۹] این مطالعات مقدمه‌یی بود برای بررسی هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک. پیکارو و کارول در سال ۱۹۹۰، برای اولین بار دو سیستم آشوب‌ناکِ لورنزِ هم‌سنگ ارائه کردند.[۱۰] سپس هی و وایدیا هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک را به صورت گسترده‌تری مطالعه کردند.[۱۱] سیستم‌های جفت شده‌ی مذکور، سیستم‌هایی مشابه بودند و هم‌سنگی در آنها به معنی یکسان شدن مسیرهای دو سیستم جفت‌شده‌ی آشوب‌ناک پس از گذشت زمان بود؛ لذا این نوع هم‌سنگی را «هم‌سنگی یکسان» نامیدند. اما هم‌سنگی در سیستم‌های کاملاً متفاوت (مثلاً یک سیستم لورنز و یک سیستم روسلر) نیز اتفاق می‌افتد. هم‌سنگیِ سیستم‌های غیریکسان اولین بار در سال ۱۹۸۶ توسط افری مویچ مطالعه شد و سپس در سال ۱۹۹۵ رالکوف آن را «هم‌سنگی عمومی» نامید.[۱۲] افری‌مویچ دو سیستم را هم‌سنگ می‌نامد مشروط بر آن که وقتی زمان به سمت بی‌نهایت میل کند دو سیستم هم‌شکل باشند. بعدها این تعریف ساده‌تر شد، به این ترتیب که دو سیستم آشوب‌ناک را هنگامی هم‌سنگ نامیدند که وقتی زمان به سمت بی‌نهایت میل کند تابعی مانند H بین آنها برقرار باشد.

هم‌سنگی نه تنها در فیزیک بلکه در دیگر علوم نیز کاربرد دارد. مثلاً در زیست‌شناسی نشان داده‌اند که اطلاعات به‌صورت دسته‌های هم‌سنگ به مغز منتقل می‌شوند.[۱۳و۱۴] این پدیده را در سیستم‌های جغرافیایی نیز نشان داده‌اند.[۱۵]

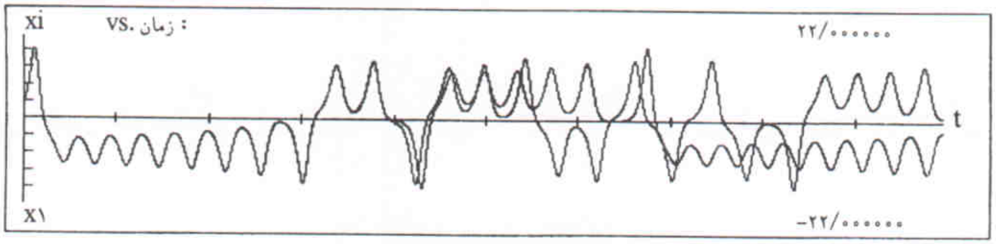
در این نوشتار، پدیده‌ی هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک مورد بررسی قرار گرفته و به‌کمک نرم‌افزار PHASER مثال‌های جدیدی به‌منظور نمایش هم‌سنگی بین دو سیستم آشوب‌ناک به تصویر کشیده‌ایم.

برای آشنایی ابتدایی با مفهوم هم‌سنگی به این سیستم لورنز توجه کنید:

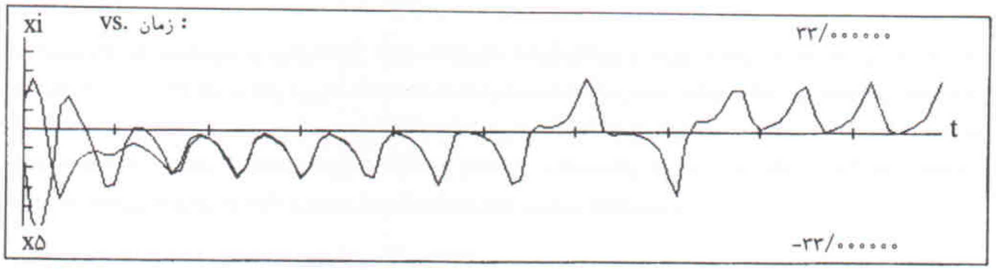
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma\,(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b\, x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

این سیستم به‌ازای $\sigma=۱۰$ و $r=۲۸$ و $b=۲/۶۶۶$ آشوب‌ناک است. سیستم مشابه همین سیستم با متغیرهای y را نیز چنین در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \sigma\,(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= r\, y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3 \end{aligned} \qquad (2)$$



شکل ۱. کوچک‌ترین اختلاف در مقادیر اولیه باعث رفتار کاملاً متفاوت در سیستم لورنز می‌شود. شکل نشانگر سری زمانی x_1 برای مقادیر اولیه‌ی (۵، ۵، ۵) و (۵، ۵، ۵/۱) است.



شکل ۲. جایگزین کردن تابع $\frac{\sigma}{2}(x_2-y_2)$ در سیستم‌های لورنز ۱ و ۲ باعث شده که با وجود اختلاف شدید در مقادیر اولیه، بعد از مدت زمانی جواب‌های دو سیستم رفتار مشابه از خود نشان دهند.

اگر چه این سیستم‌ها یکسان‌اند، با اندکی اختلاف در مقادیر اولیه به‌دلیل آشوب‌ناک بودن رفتاری کاملاً متفاوت از خود نشان خواهند داد. (شکل ۱)

حال اگر عبارت $\frac{\sigma}{2}(x_2-y_2)$ را از دو معادلات اول سیستم‌های ۱ و ۲ کم کنیم، با حل هم‌زمان هر دو سیستم در یک دستگاه مشاهده می‌کنیم که بعد از گذشت مدت زمانی، این دو سیستم با هر مقدار اولیه‌یی که شروع شده باشند، رفتار مشابه از خود نشان می‌دهند. به عبارت دیگر اختلاف جواب‌های آنها به صفر میل می‌کند. شکل ۲ بیانگر هم‌سنگی بین x_2 و y_2 است.

دلیل تحلیلی این امر را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد. اگر $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$، آنگاه:

$$\dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 = \sigma \dot{e}_1 \Rightarrow \dot{e}_1 = exp(-\sigma t) \Rightarrow e_1 \to 0, t \to \infty$$

همچنین:

$$\dot{e}_2 = -e_2 - x_1 e_3$$

$$\dot{e}_3 = x_1 - e_2 - b e_3$$

حال با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(e_2^2 + e_3^2)$ داریم:

$$\dot{v} = e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 = -(e_2^2 + b e_3^2) \leq 0$$

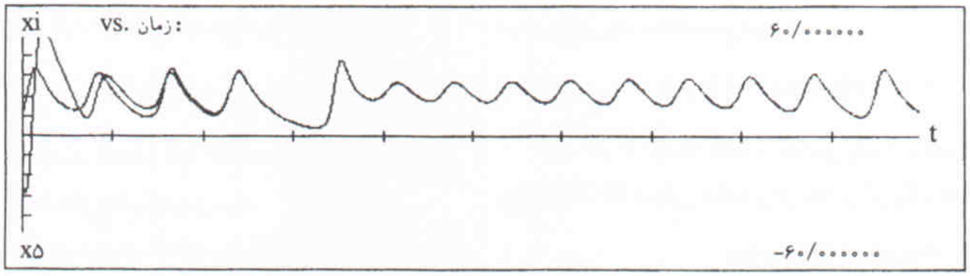
این بدان معناست که مبدأ به‌طور مجانبی برای زیر سیستم (e_2, e_3) پایدار است؛ یعنی: $e_2, e_3 \to 0$ وقتی که $t \to \infty$. در نتیجه:

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) \right\| = 0$$

در واقع $\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ به‌ترتیب جواب‌های سیستم ۱ و ۲ هستند. هم‌سنگی ایجادشده در این مثال از نوع هم‌سنگی یکسان است. سیستم اول $(\mathbf{x})$ را «سیستم حرکت» و سیستم دوم $(\mathbf{y})$ را «سیستم بازتاب» می‌نامند. در ادامه‌ی بحث ابتدا به‌ترتیب هم‌سنگی در سیستم‌های یکسان و غیریکسان را بررسی می‌کنیم، و سپس هم‌سنگی عمومی و خواصی از آن را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. در پایان نتیجه‌گیری بحث را ارائه خواهیم کرد.

هم‌سنگی در سیستم‌های یکسان

اگرچه اغلب سیستم‌های فیزیکی در عمل یکسان نیستند، مطالعه‌ی هم‌سنگی در چنین سیستم‌هایی برای درک پدیده‌ی هم‌سنگی بسیار مفید است. اگر جواب دو سیستم حرکت و بازتاب که هر دو یکسان و آشوب‌ناک‌اند، هنگامی که متغیر زمان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، به سمت صفر میل کند گوییم که بین این دو سیستم هم‌سنگی یکسان رخ داده است. البته گاهی این هم‌سنگی برای تمام مقادیر اولیه رخ نمی‌دهد و فقط برای زیرمجموعه‌یی از $\Re^n$ (n بعد سیستم است) مانند B رخ می‌دهد. لذا می‌توان گفت که اگر جواب سیستم حرکت $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ و جواب سیستم بازتاب $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ باشد (t زمان و $\mathbf{x}_0$ و $\mathbf{y}_0$ مقادیر



شکل ۳. سری زمانی x_2 و y_2 در سیستم ۲، پس از مدت زمانی رفتار یکسان دارند.

اولیه‌اند) آنگاه بین دو سیستم هم‌سنگی یکسان رخ خواهد داد، مشروط بر آن‌که زیرمجموعه‌یی از $\Re^n$ مانند B وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in B, \lim_{t \to \infty} \left\| \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \right\| = 0 \qquad (۳)$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم معمولی در فضای $\Re^n$ است.

در ادامه‌ی بحث روش‌هایی را برای ایجاد هم‌سنگی یکسان بین دو سیستم آشوب‌ناک معرفی می‌کنیم.

روش پیکارو و کارول

این روش اولین بار توسط پیکارو و کارول مورد استفاده قرار گرفت[۱۰] و سپس توسط هی و وایدیا بررسی تحلیلی شد.[۱۱] در این روش اگر بخواهیم سیستمی هم‌سنگ با سیستم حرکت ایجاد کنیم، حداقل یکی از متغیرهای سیستم بازتاب را با سیستم حرکت یکسان قرار داده و معادله‌ی متناظر با آن را در سیستم بازتاب حذف می‌کنیم. در مثال زیر سیستم لورنز را به‌عنوان سیستم حرکت در نظر گرفته و فرض کردیم $y_1 = x_1$ باشد. لذا سیستم حاصل از جفت شدن این دو سیستم چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\
\dot{x}_2 &= r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3 \\
\dot{y}_2 &= r x_1 - y_2 - x_1 y_3 \\
\dot{y}_3 &= x_1 y_2 - b y_3
\end{aligned} \qquad (۴)$$

با حل این سیستم به کمک نرم‌افزار PHASER، و مقادیر مختلف اولیه برای **x** و **y**، مشاهده می‌شود که بعد از گذشت مدت زمانی $y_2 \to x_2$ و $y_3 \to x_3$ (شکل ۳).

برای اثبات تحلیلی این هم‌سنگی، فرض می‌کنیم که $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ سیستم حرکت باشد به‌طوری که $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$. سپس این سیستم را به دو زیرسیستم

$$\begin{cases} \dot{v} = \mathbf{F}_v(v, \mathbf{W}) \\ \dot{\mathbf{W}} = \mathbf{F}_w(v, \mathbf{W}) \end{cases} \qquad (۵)$$

چنان تقسیم می‌کنیم که در آن $v = (x_1, \dots, x_k)$ و $\mathbf{W} = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ و $\mathbf{F}_v = (f_1, \dots, f_k)$ و $\mathbf{F}_w = (f_{k+1}, \dots, f_n)$، و نیز هر سیستم به‌صورت

$$\begin{cases} v_1 = v \\ \dot{\mathbf{W}}_1 = \mathbf{F}_w(v, \mathbf{W}_1) \end{cases} \qquad (۶)$$

باشد که در آن $v_1 = (y_1, \dots, y_k)$ و $\mathbf{W}_1 = (y_{k+1}, \dots, y_n)$. در این صورت، این سیستم به‌عنوان یک سیستم بازتاب با سیستم حرکت (۵) هم‌سنگ می‌شود. باید توجه داشت که v_1 متغیرهایی از سیستم بازتاب است که آنها را با متغیرهای متناظرشان در سیستم حرکت مساوی قرار داده و معادلات متناظر آنها را حذف کرده‌ایم. با توجه به این مفروضات در مثال بالا داریم:

$$v = (x_1), \mathbf{W} = (x_2, x_3), v_1 = (y_1), \mathbf{W}_1 = (y_2, y_3),$$

$$\dot{v} = \sigma(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1),$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - b x_3 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r x_1 - y_2 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - b y_3 \end{bmatrix}$$

حال اگر زیرسیستم $\mathbf{e} = w_1 - w$ به‌طور مجانبی در مبدأ پایدار باشد، آنگاه هم‌سنگی بین دو سیستم حرکت و بازتاب ۵ و ۶ اتفاق خواهد افتاد.[۱۶] لذا برای اثبات تحلیلی وقوع هم‌سنگی در مثال بالا داریم:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_2 - x_1 e_3 \\ x e_2 - b e_3 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن تابع $v=\frac{1}{2}(e_2^2+e_3^2)$ خواهیم داشت:

$$\dot{v}=e_2\dot{e}_2+e_3\dot{e}_3=-(e_2^2+be_3^2)\leq 0$$

و این بدان معناست که زیرسیستم $\mathbf{e}$ به طور مجانبی در مبدأ پایدار است و لذا هم‌سنگی به وقوع خواهد پیوست.

در هم‌سنگی به‌روش فوق دو نقصان وجود دارد. ابتدا این که تعداد سیستم‌های بازتاب که در این روش تولید می‌شوند محدود به $\frac{n(n-1)}{2}$ است که در عمل تعدادی از آنها نیز فاقد شرایط هم‌سنگی‌اند و دیگر این که در این روش به علت حذف بعضی از معادلات سیستم بازتاب، سیستم از شکل اصلی خود خارج می‌شود. لذا در ادامه ما روش مناسب‌تری برای ایجاد هم‌سنگی معرفی می‌کنیم.

روش جداسازی فعال ـ غیرفعال[3]

در این روش تابعی از متغیرهای سیستم حرکت را در سیستم بازتاب جایگزین می‌کنیم. لذا سیستم حرکت، به‌عنوان سیستمی فعال، در سیستم بازتاب تأثیر مستقیم می‌گذارد ولی سیستم بازتاب به طور مستقیم در سیستم حرکت تأثیری ندارد. به‌همین علت آن را غیرفعال گویند.

در این روش اگر فرض کنیم که $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ سیستم حرکت باشد و $\mathbf{s}=h(\mathbf{x})$ تابعی باشد که باعث ایجاد هم‌سنگی می‌شود، برای به‌دست آوردن تابع بازتاب ابتدا سیستم حرکت را به‌صورت $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{s})$ بازنویسی کرده و سپس با تغییر $\mathbf{x}$ به $\mathbf{y}$ سیستم بازتاب به‌صورت $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{s})$ به‌دست می‌آید. مثلاً سیستم لورنز را به عنوان سیستم حرکت در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-10x_1+10x_2\\ \dot{x}_2&=28x_1-x_2-x_1x_3\\ \dot{x}_3&=x_1x_2-2.666x_3\end{aligned}\tag{7}$$

حال با داشتن تابع $\mathbf{s}=10x_2$، سیستم فوق را چنین بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-10x_1+\mathbf{s}\\ \dot{x}_2&=28x_1-x_2-x_1x_3\\ \dot{x}_3&=x_1x_2-2.666x_3\end{aligned}\tag{8}$$

با توجه به این سیستم، سیستم بازتاب چنین است:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=-10y_1+\mathbf{s}\\ \dot{y}_2&=28y_1-y_2-y_1y_3\\ \dot{y}_3&=y_1y_2-2.666y_3\end{aligned}\tag{9}$$

در این صورت، مشاهده می‌شود که:

$$\mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{x}\Rightarrow\dot{\mathbf{e}}=\dot{\mathbf{y}}-\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{e},\mathbf{s})-\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{s})$$

حال اگر $\dot{\mathbf{e}}$ در مبدأ به‌طور مجانبی پایدار باشد، آنگاه هم‌سنگی رخ خواهد داد. در این حالت برای مقادیر کوچک $\mathbf{e}$ داریم:

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{e},\mathbf{s})-\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{s})=\mathbf{Df}(\mathbf{x},\mathbf{s}).\mathbf{e}$$

پس به‌منظور بررسی پایداری سیستم می‌توانیم از سیستمِ خطیِ آن استفاده کنیم. در این صورت، اگر تمام مقادیر ویژه این سیستم خطی منفی باشد، آنگاه مبدأ به‌طور مجانبی پایدار بوده و هم‌سنگی رخ خواهد داد. همچنین می‌توان از تابع لیاپانوف برای بررسی پایداری سیستم استفاده کرد.[17] اما به‌دست آوردن این تابع در بسیاری از موارد امکان‌پذیر نیست. حال به‌منظور اثبات هم‌سنگی در مثال قبل داریم:

$$\dot{e}_1=-10e_1\Rightarrow e_1=\exp-(10t)$$

پس هنگامی که t به سمت بی‌نهایت میل کند، e_1 به سمت صفر میل خواهد کرد. اما برای زیرسیستم (e_2,e_3) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2&=-e_2-x_1e_3\\ \dot{e}_3&=x_1e_2-2.666e_3\end{aligned}$$

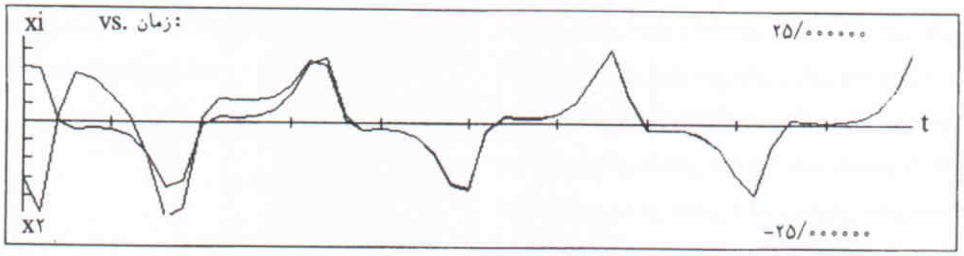
با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف $v=e_2^2+e_3^2$ خواهیم داشت:

$$\dot{v}=-2(e_2^2+2.666e_3^2)\leq 0$$

و این وجود هم‌سنگی را اثبات می‌کند.

همان‌گونه که بیان شد، به‌دست آوردن تابع لیاپانوف برای اثبات پایداری سیستم $\mathbf{e}$ همیشه امکان‌پذیر نیست. در این صورت روش عددی برای محاسبه‌ی توان‌های لیاپانوف سیستم $\mathbf{e}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.[18] اگر تمام توان‌های لیاپانوف منفی باشند، آنگاه‌هم‌سنگی رخ خواهد داد. مثلاً در سیستم فوق توان‌های لیاپانوف سیستم $\mathbf{e}$ عبارت‌اند از: $\lambda_1=-10$، $\lambda_2=-1.805$ و $\lambda_3=-1.861$[16]، که مؤید وجود هم‌سنگی بین دو سیستم است. شکل ۴ نشانگر هم‌سنگی بین x_2 و y_2 است.

مزیت این روش این است که هیچکدام از توابع حذف نمی‌شود و لذا سیستم شکل اصلی خود را از دست نمی‌دهد. مزیت دیگر این روش این است که محدودیتی برای ساختن h به‌جز پیوستگی آن وجود ندارد. این تابع باید به‌گونه‌یی انتخاب شود که هم‌سنگی ایجاد شود. البته روش کلی و هماهنگی برای ساختن این تابع وجود ندارد، بلکه بایستی به کمک روش آزمون و خطا، و با استفاده از تجربه این تابع را ساخت. روش‌هایی توسط رالکوف و همکارانش ابداع



شکل ۴. سری زمانی x_2 و y_2 هم‌سنگی سیستم لورنز را به‌روش جداسازی فعال ـ غیرفعال با تابع $S=10x_2$ نشان می‌دهد.

شده[۱۲] اما این روش کلی نیست ـــ وجود این تابع منحصر به فرد نیست.

در ادامه، هم‌سنگی در سیستم‌های غیریکسان را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

هم‌سنگی در سیستم‌های غیریکسان

تاکنون سیستم‌هایی که هم‌سنگی را در آنها بررسی کردیم یکسان بوده‌اند ولی این بدان معنا نیست که هم‌سنگی بین سیستم‌های غیریکسان رخ نمی‌دهد. هم‌سنگی بین سیستم‌های غیریکسان اولین بار توسط افری مویچ در سال ۱۹۸۶ مطالعه شد[۹] که سپس، در سال ۱۹۹۵، رالکوف آن را «هم‌سنگی عمومی» نامید.[۱۲] افری‌مویچ دو سیستم را هم‌سنگ نامید اگر وقتی $t\to\infty$، بین سیستم حرکت و سیستم بازتاب هم‌شکلی موجود باشد. به‌عبارتی دیگر، دو سیستم را هم‌سنگ نامید مشروط بر آن که بین سیستم حرکت **x** و سیستم بازتاب **y** تابع H موجود باشد به طوری که:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\mathbf{y}(t)-\mathrm{H}(\mathbf{x}(t))\right\|=0$$

مثلاً با در نظر گرفتن سیستم روسلر:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2-x_3\\ \dot{x}_2&=x_1+ax_2\\ \dot{x}_3&=b+x_3(x_1-c)\end{aligned}\tag{۱۰}$$

سیستم بازتابی به‌صورت:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=-rf^{-1}(y_2)-y_3\\ \dot{y}_2&=\left[x_1+af^{-1}(y_2)\right]/(f^{-1})'(y_2)\\ \dot{y}_3&=br-r(cy_3-x_3x_1)\end{aligned}\tag{۱۱}$$

برای آن طراحی می‌کنیم. در اینجا f^{-1} و $(f^{-1})'$ به ترتیب معکوس و مشتق تابع معکوس، تابع معکوس‌پذیر $f:\Re\to\Re$ هستند. ادعا می‌کنیم تابع:

$$\mathrm{H}(\mathbf{x})=(rx_1,f(x_2),rx_3)\tag{۱۲}$$

بین این دو سیستم ایجاد هم‌سنگی عمومی می‌کند. برای اثبات این موضوع باید نشان داد که وقتی $t\to\infty$ آنگاه $y_2-f(x_2)=0$، $y_1-rx_1=0$ و $y_3-rx_3=0$. حال برای اثبات $y_2-f(x_2)=0$ بایستی $e_2=f^{-1}(y_2)-x_2$ به سمت صفر میل کند. زیرا دراین صورت خواهیم داشت $f^{-1}(y_2)=x_2$ یا $y_2=f(x_2)$، و لذا $y_2-f(x_2)=0$. در مورد e_2 داریم:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2&=\left[f^{-1}(y_2)\right]'-x_2=\dot{y}_2(f^{-1})'(y_2)-\dot{x}_2\\ &=x_1+af^{-1}(y_2)-x_1-ax_2=a(f^{-1}(y_2)-x_2)=ae_2\end{aligned}$$

که واضح است اگر $a<0$ آنگاه $e_2\to0$ میل می‌کند، یعنی $f^{-1}(y_2)=x_2$. به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\dot{e}_3=y_3-ax_3=-rce_3$$

که اگر $rc>0$ باشد آنگاه $e_3\to0$. در این صورت چون:

$$\dot{e}_1=-re_2-e_3$$

و $e_2\to0$ و $e_3\to0$، آنگاه $e_1\to0$، میل خواهد کرد و با توجه به تعاریف e_1، e_2 و e_3 داریم:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\mathbf{y}(t)-\mathrm{H}(\mathbf{x}(t))\right\|=0$$

روشن است که هم‌سنگی برای تمام مقادیر اولیه رخ می‌دهد. همچنین می‌توان تابع f را مثلاً تابع نمایی انتخاب کرد. اما در عمل یافتن تابع H بسیار مشکل است. قضیه‌ی زیر در اثبات وجود هم‌سنگی بین دو سیستم حرکت و بازتاب ما را یاری می‌کند.

قضیه: هم‌سنگی عمومی بین دو سیستم حرکت و بازتاب در صورتی رخ خواهد داد که زیرمجموعه‌یی مانند B وجود داشته باشد به‌طوری که برای تمام مقادیر اولیه‌ی واقع در این مجموعه سیستم بازتاب به‌طور مجانبی پایدار باشد. یعنی تفاضل جواب‌های سیستم بازتاب به‌ازاء دو مقدار اولیه‌ی موجود در این مجموعه به سمت صفر میل کند.[۱۹] به‌کمک این قضیه می‌توان تعریف جدیدی از هم‌سنگی عمومی ارائه داد:

اگر فرض کنیم $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})(\mathbf{x}\in\Re^n)$ و $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})(\mathbf{y}\in\Re^m)$ به‌ترتیب سیستم‌های حرکت و بازتاب باشند، آنگاه هم‌سنگی عمومی

بین این دو سیستم رخ خواهد داد اگر مجموعه‌یی مانند B از $\Re^n \times \Re^n$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\forall (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_{10}), (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_{20}) \in B: \lim_{t \to \infty} \| \mathbf{y}(t : \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_{10}) - \mathbf{y}(t : \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_{20}) \| = 0 \qquad (۱۳)$$

در مثال زیر:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2 + x_1(x_2 - 4) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_2 + 0/45 x_3 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

و

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\sigma (y_1 - y_2) \\ \dot{y}_2 &= -r\mathbf{u}(\mathbf{x}) - y_2 - \mathbf{u}(\mathbf{x}) y_3 \\ \dot{y}_3 &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) y_2 - b y_3 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ یک تابع اسکالر دلخواه از x_1 و x_2 و x_3 است و پارامترهای σ و b مثبت فرض شده‌اند. برای این که نشان دهیم بین این دو سیستم آشوب‌ناک هم‌سنگی رخ خواهد داد، فرض می‌کنیم $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$ که در آن $\bar{\mathbf{y}}$ یک بازنویسی از سیستم بازتاب با متغیرهای $\bar{y}_1$ و $\bar{y}_2$ و $\bar{y}_3$ باشد. حال با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف:

$$v = (e_1^2/\sigma + e_2^2 + e_3^2)/2$$

و با توجه به این که:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\sigma e_1 + \sigma e_2 \\ \dot{e}_2 &= -e_2 - \mathbf{u}(\mathbf{x}) e_3 \\ \dot{e}_3 &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) e_2 - b e_3 \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -e_1^2 + e_1 e_2 - e_2^2 - b e_3^2 \\ &= -(e_1 - e_2/2)^2 - 3e_2^2/4 - b e_3^2 \leq 0 \end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر، سیستم بازتاب برای تمام مقادیر اولیه به‌طور مجانبی پایدار است و لذا طبق قضیه‌ی قبل هم‌سنگی رخ خواهد داد. به کمک قضیه‌ی فوق می‌توان روش جدیدی معروف به «روش سیستم کمکی» برای اثبات هم‌سنگی بیان کرد. بدین صورت که ما سیستم جدیدی با متغیر z، دقیقاً مانند سیستم بازتاب، می‌نویسیم که تنها فرق این دو در مقادیر اولیه و نمایش متغیرهاست. لذا با توجه به قضیه‌ی قبل، اگر بین دو سیستم بازتاب و سیستم کمکی هم‌سنگی یکسان رخ بدهد، آنگاه بین دو سیستم حرکت و سیستم بازتاب هم‌سنگی عمومی رخ خواهد داد. مثلاً سیستم کمکی برای مثال قبل عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\sigma (z_1 - z_2) \\ \dot{z}_2 &= r\mathbf{u}(\mathbf{X}) - z_2 - \mathbf{u}(\mathbf{X}) z_3 \\ \dot{z}_3 &= \mathbf{u}(\mathbf{X}) z_2 - b z_3 \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در ادامه‌ی بحث، هم‌سنگی عمومی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

هم‌سنگی عمومی

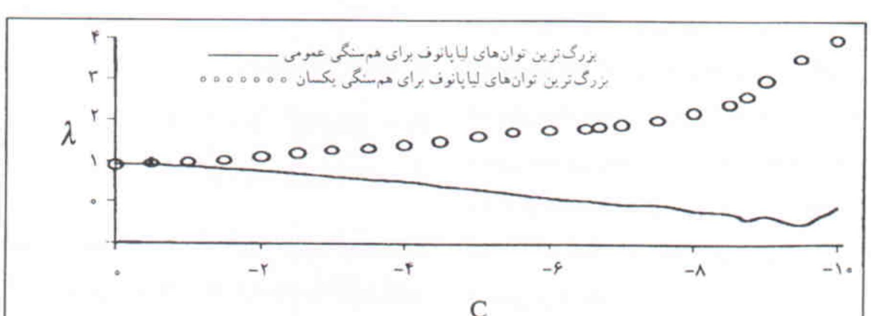
به‌طور کلی هم‌سنگی عمومی بین دو سیستم غیریکسان رخ می‌دهد. گاهی نیز، در حالی که هم‌سنگی یکسان بین سیستم‌ها وجود ندارد، هم‌سنگی عمومی بین آنها رخ می‌دهد. به سیستم‌های لورنز زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= 28 x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - 2/666 x_3 \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

و

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -10 (y_2 - y_1) + c (x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= 28 y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - 2/666 y_3 \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

این دو سیستم با تغییر c رفتاری متفاوت نشان می‌دهند. به عنوان



شکل ۵. بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف سیستم‌های ۱۶ و ۱۷ متن بر حسب c. در سیستم لورنز نمودار ممتد بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف را برای هم‌سنگی عمومی و نمودار نقطه‌چین بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف را برای هم‌سنگی یکسان نشان می‌دهد.

مثال برای $c>7/7$ هم‌سنگی یکسان بین دو سیستم خواهیم داشت. شکل ۵ بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف را به‌ازاء مقادیر c برای حالات هم‌سنگی یکسان و هم‌سنگی عمومی نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود که برای $-10<c<-6/7$ بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف سیستم فوق،در حالتی که مطابق تعریف هم‌سنگیِ یکسانِ زوج شده باشند، مثبت است و در حالی که مطابق تعریف هم‌سنگیِ عمومیِ زوج شده باشند، منفی هستند. این بدان معناست که بین دو سیستم هم‌سنگی یکسان وجود ندارد، در حالی که هم‌سنگی عمومی وجود دارد. توجه داشته باشیم که بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف در شکل ۵ برای حالت هم‌سنگی یکسان در سیستم شش‌بعدی و در حالت هم‌سنگی عمومی در یک سیستم نه‌بعدی محاسبه شده است.[16]

خواصی از هم‌سنگی عمومی

با توجه به تعریف هم‌سنگی عمومی بین دو سیستم زوج شده، که در ابتدای این بخش بیان شد، بررسی بعضی از خواص این هم‌سنگی از اهمیت خاصی برخوردار است. اولین خاصیت در رابطه با تابع H است. توجه داریم که با داشتن $\mathbf{x}$ و تابع H، مؤلفه‌های $\mathbf{y}$ قابل پیش‌بینی است و این در حالی است که اگر تابع H وارون‌پذیر باشد، آنگاه با داشتن H و $\mathbf{y}$، مولفه‌های $\mathbf{x}$ قابل پیش‌بینی‌اند.

خاصیت دیگر را می‌توان در قضیه‌ی فوق جست‌وجو کرد. یعنی این که اگر سیستم بازتاب به‌طور مجانبی پایدار باشد، آنگاه هم‌سنگی عمومی بین دو سیستم حرکت و بازتاب رخ خواهد داد. لذا اگر سیستم بازتاب به‌طور مجانبی پایدار باشد، آنگاه سیستم حرکت در هم‌سنگی عمومی می‌تواند هر سیستم دلخواهی باشد. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2+x_1(x_2-4)\\ \dot{x}_2 &= -x_1-x_2\\ \dot{x}_3 &= x_2+0/45\,x_3\end{aligned} \qquad (20)$$

و

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\sigma(y_1-y_2)\\ \dot{y}_2 &= r\mathbf{u}(\mathbf{x})-y_2-\mathbf{u}(\mathbf{x})y_3\\ \dot{y}_3 &= \mathbf{u}(\mathbf{x})y_2-by_3\end{aligned} \qquad (21)$$

برای این مثال قبلاً نشان دادیم که برای تمام توابع $\mathbf{u}$ و تمام مقادیر اولیه سیستم بازتاب به‌طور مجانبی پایدار است. لذا با وجود این که هر دو سیستم کاملاً متفاوت‌اند هم‌سنگی عمومی رخ خواهد داد. اما خاصیت دیگر این که، می‌دانیم اگر بین سیستم $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ و $\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ناهمشکلی C^k وجود داشته باشد، آنگاه این دو سیستم معادل‌اند. اگرچه به نظر می‌رسد ارتباط تنگاتنگی بین هم‌سنگی و معادل بودن دو سیستم وجود داشته باشد. باید اضافه کرد که وجود یکی از این دو، دلیل بر وجود دیگری نیست. برای مشاهده‌ی این موضوع به دو مثال زیر توجه کنید. اولین مثال نشان می‌دهد که هرچند دو سیستم معادل‌اند ولی هم‌سنگی بین آنها وجود ندارد.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma(x_1-x_2)\\ \dot{x}_2 &= -r\,x_1-x_2-x_1x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1x_2-bx_3\end{aligned} \qquad (22)$$

و

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -\sigma(y_1-y_2)\\ \dot{y}_2 &= -ry_1-y_2-y_1\mathbf{u}(\mathbf{x})\\ \dot{y}_3 &= y_1y_2-by_3\end{aligned} \qquad (23)$$

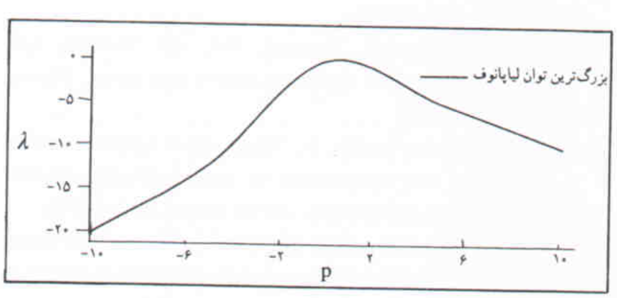
که در آن $\mathbf{u}=(x_3)$، $\sigma=16$، $b=4$ و $r=45/92$ است. بدیهی است که در این مثال سیستم بازتاب پایدار نیست، لذا هم‌سنگی رخ نمی‌دهد. اما دو سیستم تحت رابطه $y_1=kx_1$، $y_2=kx_2$ و $y_3=k^2x_3$ با هم معادل‌اند. توجه شود که k یک مقدار ثابت است و به شرایط اولیه بستگی دارد.

مثال بعدی نشان می‌دهد که وقوع هم‌سنگی عمومی دلیلی بر معادل بودن دو سیستم نیست. بنابراین سیستم حرکت را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_2-\alpha\left[mx_1-m_2\left|x_2-1\right|-\left|x_1-1\right|\right]\\ \dot{x}_2 &= x_1-x_2-x_3\\ \dot{x}_3 &= -\beta\,x_2\end{aligned} \qquad (24)$$

که در آن $\alpha=9$، $\beta=\frac{100}{7}$، $m_1=0/2857$ و $m_2=0/2143$.
سیستم بازتاب را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{y}=-y^3/10-y(\mathbf{u}(\mathbf{x})-p), \qquad (25)$$



شکل ۶. بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف سیستم (۲۳) متن بر حسب p.

که در آن تابع $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (x_1)$ است. شکل ۶ بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف را برای مقادیر p نشان می‌دهد.[۲۰] همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بزرگ‌ترین توان‌های لیاپانوف سیستم بازتاب منفی است؛ لذا سیستم به‌طور مجانبی پایدار است و بنابراین هم‌سنگی عمومی رخ خواهد داد. روشن است که هیچ ناهمشکلی به صورت $H:\Re^3 \to \Re$ وجود ندارد.

نتیجه‌گیری

به نظر می‌رسد که هم‌سنگی در سیستم‌های آشوب‌ناک، به‌دلیل حساسیت نسبت به مقادیر اولیه، شکننده باشد. اما همان‌گونه که در این مقاله مشاهده شد این چنین نیست. در واقع نشان داده شد که روش‌هایی برای ایجاد هم‌سنگی پایدار در بین سیستم‌های آشوب‌ناک وجود دارد. با وجود محدودیت‌هایی در روش پیکارو و کارول این روش برای ایجاد روش‌های کارآمدتری همانند روش جداسازی فعال ـ غیرفعال به‌کار گرفته شد. در این رابطه باید توجه داشت توابعی که در این روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند از راه آزمون و خطا به دست آمده و روش خاصی برای ایجاد آنها وجود ندارد. این توابع در هم‌سنگی عمومی بین فضاهای فاز سیستم حرکت و بازتاب تعریف می‌شوند. به دست آوردن چنین توابعی همواره میسر نخواهد بود، به همین دلیل گاهی با ایجاد یک سیستم کمکی می‌توان بین دو سیستم آشوب‌ناک هم‌سنگی ایجاد کرد، که در این صورت هم‌سنگی را عمومی می‌نامند. گاهی نیز بین سیستم‌های یکسان هم‌سنگی عمومی رخ می‌دهد و این در حالی است که هم‌سنگی یکسان بین آنها وجود ندارد.

پانوشت

1. Identical Synchronization
2. General Synchronization
3. Active-Passive Decomposition

منابع

1. Huygens, C. *Die penduluhr: Horologium Oscilatorium* (1673).
2. Rayleigh, J. *The theory of sound*, Dover Publication (1945).
3. Vanderpole, B. *Phill. Mag,* **7** (3) p 65 (1927).
4. Fujisaka, H. and Yamada, T. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems", *Prog. Theory Phys,* **69** (1), p 32. (1983) .
5. Fujisaka, H. and Yamada, T. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems II" *Prog. Theory Phys,* **70** (5), p 1240 (1983).
6. Fujisaka, H. and Yamada, T. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems III" *Prog. Theory Phys,* **72** (4), p 883 (1984).
7. Fujisaka, H. and Yamada, T. "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems IV" *Prog. Theory Phys,* **74** (5), p 918 (1985).
8. Pikovsky, A. S. "On the interaction of strang attractors" *Phys. Rev. ,B* **55**, p 149 (1984).
9. Afraimovich, V.S., Verichev, N.N. and Rabinovich, M.I. "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative system" *Radiophys. Quantum Electron,* **20**, p 795 (1986).
10. Pecara, L. M. and Carroll, T.L. "Synchronization in chaotic systems", *Phys . Rev. Lett.* **64** (8), p 821 (1990).
11. He, R. and Vaidya, P.G. "Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems", *Phys. Rev.* A, **46** (12), p 7387 (1992).
12. Rulkov, N., Sushchik, M., Tsimring, L. and Abarbanel, H. "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", *Phys. Rev. E,* **51**, p 980 (1995).
13. Schuster, H.G. *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim, 3rd Edition (1995).
14. Schiff, S.J., So, P., Chang, T., Buke, R.E. and Sauer, T. "Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble", *Phys Rev. E*, **54** (6), p 6708 (1996).
15. Brindley, J. and Kapitaniak, T. *AIP Conf. Proc* (USA) pp 375-605 (1996).
16. Parlitz, U. and Kocarev, L. "Synchronization of chaotic systems", *Hand Book of Chaos Control,* WILEY-VCH Publ (1999).
17. Parlitz, U., Kocarev, L., Stojanovski, T. and Preckel, H. "Encoding messages using chaotic synchronization", *Phys. Rev.* E, **53** (5), p 4351 (1996).
18. Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A. "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D,* **16**, p 285 (1985).
19. Kocarev, L. and Parlitz, U. "Genoralized synchronization, perdictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", *Phys. Rev. lett* **76** (11), p 1816 (1992).
20. Parlitz, U., Junge, L. and Kocarev, L. "Synohronization-based parameter estimation from time series", *Phys. Rev. E*, **54** (6), p 6253 (1996).