

# میدان تنش در نزدیکی لبه‌ی آزاد لایه‌های چندسازه‌ی متقارن

مسعود طهانی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

اصغر تئیر (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این پژوهش با استفاده از یک نظریه‌ی لایه‌ی<sup>۱</sup> که قادر به در نظر گرفتن تنش‌های عرضی و عمودی است، میدان تنش سه‌بعدی در نزدیکی لبه‌ی آزاد لایه‌های چندسازه‌ی متوازن<sup>۲</sup> تحت کرنش محوری یکنواخت<sup>۳</sup> بررسی شد. با این فرض که صفحات با طول بلند و لایه‌گذاری متقارن هستند، معادلات حاکمه‌ی تعادل با استفاده از اصل حداقل مجموع انرژی پتانسیل به دست آمد و به صورت تحلیلی حل شد و در نهایت، نتایج به دست آمده با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه شد. نتایج به دست آمده، بیانگر دقت خوب تئوری لایه‌ی استفاده شده در تحلیل میدان تنش سه‌بعدی است.

## مقدمه

مواد مرکب، به علت داشتن نسبت استحکام به وزن بالا، به‌طور وسیعی در صنایع هوایمایی، دریایی و خودروسازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا پیش‌بینی توزیع تنش در سازه‌های مرکب از اهمیت ویژه‌ی برخوردار است. به‌خصوص در نزدیکی لبه‌های آزاد، توزیع تنش پیچیده است و معمولاً باعث جدایش لایه‌ها<sup>۴</sup>، و در نتیجه کاهش سختی و استحکام سازه، و در نهایت از کارافتادگی کلی آن می‌شود. لذا جدایش لایه‌ها یکی از موانع مهم در کاربرد وسیع مواد مرکب در سازه‌های مهندسی است.

مطالعات محققان نشان می‌دهد وضعیت تنش در نزدیکی لبه‌ی آزاد ورق‌های مرکب، به علت وجود ناپیوستگی مادی در جهت ضخامت پیچیده بوده و با تغییرات شدید مواجه است. لذا وضعیت تنش در لایه‌ی مرزی (نزدیکی لبه‌ی آزاد) سه‌بعدی است و نمی‌توان از نظریه‌ی لایه‌بندی کلاسیک<sup>۵</sup> (CLT) استفاده کرد، بلکه باید نظریه‌های کامل‌تری را مورد استفاده قرار داد. به‌علت موجود نبودن حل دقیق معادلات کشسانی محققان بسیاری با روش‌های مختلف تقریبی (تحلیلی یا عددی) سعی کرده‌اند میدان تنش سه‌بعدی در لایه‌ی مرزی ورق‌های مرکب را تحلیل کنند.<sup>۶-۱۱</sup>

محققان برای اولین بار تنش‌های برشی برون‌صفحه‌ی را در یک ورق چندسازه‌ی مورد بررسی قرار دادند.<sup>۱۱</sup> آنها ورق را به‌صورت لایه‌های ناهمسانگرد که توسط لایه‌های همسانگرد جدا شده، مدل کردند. همچنین، برای یک صفحه‌ی مرکب با طول بلند و لایه‌گذاری متقارن که تحت کرنش محوری کششی قرار داشت، تنش‌های برون‌صفحه‌ی را به‌طور کامل (تنش‌های برشی و تنش عمودی) به دست

آوردند.<sup>۱۲</sup> آنها معادلات دو بعدی کشسانی خطی را با استفاده از روش تفاضل محدود حل کردند. از روش‌های تقریبی تحلیلی می‌توان به استفاده از نظریه‌ی صفحه‌ی مرتبه بالا<sup>۱۳</sup>، روش آشفتگی<sup>۱۴</sup>، روش لایه‌ی مرزی<sup>۱۵</sup>، حل تقریبی کشسانی<sup>۱۶</sup> اشاره کرد. همچنین پاگانو از یک روش تقریبی براساس فرض تنش‌های درون‌صفحه‌ی استفاده از اصل تغییراتی ریسر استفاده کرد.<sup>۱۷</sup> وانگ و چوی با استفاده از تنش لختیستیکی و نظریه‌ی کشسانی ناهمسانگرد، منفرد بودن<sup>۱۸</sup> وضعیت تنش را در لایه‌ی مرزی بررسی کردند.<sup>۱۹</sup> آنها نشان دادند که ضریب‌های شدت تنش لایه‌ی مرزی<sup>۲۰</sup> تابعی از متغیرهای لایه‌گذاری، پارامترهای هندسی و شرایط بارگذاری است. این ضریب‌ها برای تخمین جدایش بین لایه‌ی و ایجاد ترک‌های عرضی قابل استفاده‌اند. محققان براساس اصل حداقل انرژی مکمل و روش تعادل نیرویی، ورق مرکب تحت بار محوری را مورد بررسی قرار دادند.<sup>۲۱</sup> در ادامه، رُز و هراکوویچ روش به‌کار گرفته شده توسط این محققان را با افزودن عباراتی به میدان تنش بهبود دادند.<sup>۲۲</sup> همچنین دیگر محققان روش ارائه شده توسط آنان را برای صفحات با لایه‌گذاری کلی تحت بارگذاری‌های مختلف بسط دادند.<sup>۲۳</sup> چو و کیم با استفاده از اصل کار مجازی مکمل و روش کانتروویچ میدان تنش سه‌بعدی را محاسبه کردند.<sup>۲۴</sup> آنها با استفاده از تکرارهای پی در پی (حداقل دو تکرار) تنش‌های برون‌صفحه‌ی را با دقت خوبی محاسبه کردند.

از میان روش‌های عددی، روش اجزاء محدود<sup>۲۵-۲۶</sup> بیشتر از سایر روش‌ها مورد توجه بوده است. محققان عدم تطابق نتایج به‌دست آمده از روش‌های مختلف (اجزاء محدود، اختلاف محدود و

به طور خلاصه می توان گفت اکثر روش های مورد استفاده در مقالات از دقت کافی برخوردار نیستند، یا کارآیی کمی دارند. از طرف دیگر، روش لایه‌ی ارائه شده توسط ردی<sup>[۲۲]</sup> بسیار ساده و سر راست است و دقت و کارآیی آن در نمونه‌هایی بررسی و تأیید شده است.<sup>[۲۰]</sup> لذا در این مقاله برای به دست آوردن توصیف دقیقی از میدان پیچیده و سه بعدی تنش در نزدیکی لبه‌های آزاد لایه‌های چندسازه‌ی با لایه‌گذاری متقارن تحت کرنش محوری یکنواخت از روش لایه‌ی ردی استفاده خواهد شد. به کمک اصل حداقل انرژی پتانسیل، معادلات تعادل به دست آمده و سپس این معادلات به صورت تحلیلی حل خواهد شد. در نهایت نتایج به دست آمده با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه خواهد شد.

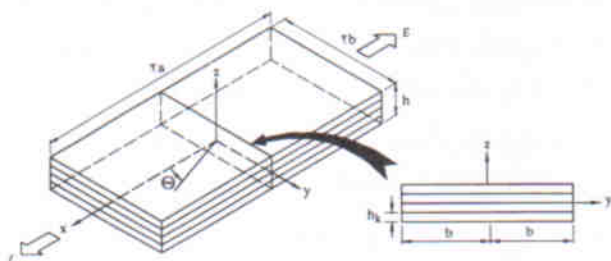
### روش تحقیق

هدف از این تحقیق محاسبه‌ی نسبتاً دقیق تنش‌های بین لایه‌ی در یک صفحه‌ی مرکب با لایه‌گذاری متقارن تحت کرنش کششی یکنواخت (در راستای  $x$ ) است. طول صفحه‌ی مورد نظر  $2a$ ، پهنای آن  $2b$  و ضخامت آن  $h$  است و فرض بر این است که طول صفحه در مقایسه با سایر ابعاد آن بزرگ باشد (شکل ۱). سیستم محورهای مختصات مطابق با شکل ۱ در نظر گرفته شده است.

### میدان جابه‌جایی و کرنش‌ها

محققان با انتگرال‌گیری از معادلات کرنش - جابه‌جایی و با فرض مستقل بودن میدان کرنش از متغیر  $x$  (این فرض در نواحی دور از ابتدا و انتهای صفحه‌ی مرکب صحیح است) و با اعمال شرایط تقارن نسبت به صفحات  $x-y$  و  $x-z$  (شکل ۱) برای لایه‌های متقارن متوازن<sup>۱۱</sup> کلی‌ترین شکل میدان جابه‌جایی را به دست آوردند:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \varepsilon x + U(y, z) \\ u_y(x, y, z) &= V(y, z) \\ u_z(x, y, z) &= W(y, z) \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۱. هندسه‌ی صفحه‌ی مرکب و دستگاه مختصات.

روش آشفته‌گی، شامل یکسان‌نبودن علامت تنش‌ها، علاوه بر اندازه‌ی آنها در لبه‌ی آزاد، را بررسی کردند.<sup>[۱۹]</sup> آنها نشان دادند که نتایج روش اجزاء محدود از لحاظ علامت در لبه‌ی آزاد صحیح است، همچنین دقت نتایج، به جز در دو المان نزدیک لبه‌ی آزاد، خوب است. با توجه به اینکه می توان اندازه‌ی المان‌ها در نزدیکی لبه‌ی آزاد را کوچک انتخاب کرد روش اجزاء محدود در بررسی تنش‌های موضعی بین لایه‌ی قابل اعتماد است.

عده‌ی نیز با استفاده از نظریه‌ی لایه‌ی تنش‌های برون صفحه‌ی را با دقت خوبی محاسبه کردند.<sup>[۲۰]</sup> آنها مزیت روش لایه‌ی، نسبت به روش اجزاء محدود را حجم محاسبات کمتر و دقتی مشابه روش اجزاء محدود عنوان کردند. اسپیلکر و چو به منظور ارضاء دقیق شرایط سطح آزاد (در لبه‌ها، سطح بالایی و سطح زیرین لایه‌های چندسازه‌ی) و پیوستگی میدان جابه‌جایی و تنش‌های برون صفحه‌ی، روش اجزاء محدود هیبرید<sup>۸</sup> را در محاسبه‌ی تنش‌های بین لایه‌ی به کار بردند.<sup>[۲۱]</sup>

نظریه‌های به کار رفته در تحلیل میدان تنش سه بعدی را می توان به دو دسته کلی تقسیم کرد: ۱. نظریه‌های مبتنی بر فرض میدان جابه‌جایی؛ ۲. نظریه‌های مبتنی بر فرض تنش. از میان روش‌های به کار گرفته شده، روش‌های مبتنی بر فرض میدان جابه‌جایی بر روش‌های مبتنی بر فرض میدان تنش ارجحیت بیشتری دارد، زیرا ساده و سرراست‌اند و به منظور حل عددی معادلات، به آسانی قابل تبدیل به روش اجزاء محدودند. این روش‌ها را می توان به دو گروه کلی دسته‌بندی کرد: ۱. روش‌های تک لایه‌ی هم‌ارز<sup>۹</sup> (ESL)؛ ۲. روش‌های لایه‌ی. روش‌های تک لایه‌ی هم‌ارز توصیف نسبتاً دقیقی از پارامترهای کلی نظیر خیز، فرکانس‌های طبیعی، نیروی کماتش و... ارائه می دهد. اما این نظریه‌ها برای محاسبه‌ی دقیق میدان تنش سه بعدی کافی نیست. در این نظریه‌ها به علت پیوسته بودن میدان جابه‌جایی در کل ضخامت سازه‌ی مرکب، کرنش‌های عرضی در راستای ضخامت و در مرز تماس دو ماده‌ی مختلف پیوسته است، لذا تنش‌های عرضی در سطح مشترک لایه‌ها ناپیوسته خواهد بود، در صورتی که این تنش‌ها باید پیوسته باشند. برخلاف نظریه‌های ESL، نظریه‌های لایه‌ی در هر لایه از یک میدان جابه‌جایی استفاده می کند که دارای پیوستگی از نوع  $C^0$  در کل ضخامت است. در نتیجه میدان تنش از لحاظ سینماتیکی صحیح است. بدین معنی که کرنش‌های درون صفحه‌ی پیوسته و کرنش‌های برون صفحه‌ی ناپیوسته‌اند. لذا ممکن است تنش‌های برون صفحه‌ی در کل ضخامت سازه‌ی مرکب، به خصوص زمانی که تعداد لایه‌های عددی<sup>۱۱</sup> افزایش می یابد، پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_y = \frac{dV_k}{dy} \phi_k, \quad \varepsilon_z = W_k \frac{d\phi_k}{dz} \\ \gamma_{yz} = V_k \frac{d\phi_k}{dz} + \frac{dW_k}{dy} \phi_k, \quad \gamma_{xz} = U_k \frac{d\phi_k}{dz}, \quad \gamma_{xy} = \frac{dU_k}{dy} \phi_k \end{aligned} \quad (4)$$

### معادلات تعادل

با استفاده از اصل حداقل مجموع انرژی پتانسیل<sup>[۲۴]</sup>،  $2(N+1)$  معادله‌ی تعادل زیر، مربوط به  $2(N+1)$  مجهول  $U_k, V_k$  و  $W_k$  ( $k=1, 2, \dots, N+1$ ) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta U_k: \frac{dM_{xy}^k}{dy} - Q_x^k = 0 \\ \delta V_k: \frac{dM_y^k}{dy} - Q_y^k = 0 \quad k=1, 2, \dots, N+1 \\ \delta W_k: \frac{dR_y^k}{dy} - N_z^k = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

در این روابط برآیند کلی تنش<sup>۱۳</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (N_z^k, Q_y^k, Q_x^k) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}) \frac{d\phi_k}{dz} dz \\ (M_x^k, M_y^k, M_{xy}^k, R_y^k) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}) \phi_k dz \end{aligned} \quad (6)$$

برای لایه‌های چندسازه‌ی مستطیلی، شرایط مرزی در نظریه‌ی لایه‌ی در لبه‌های  $y = \pm b$  شامل تعیین  $U_k$  یا  $M_{xy}^k$  یا  $V_k$  یا  $M_y^k$  و  $W_k$  یا  $R_y^k$  است. از آنجا که در این نوشتار لایه‌های چند سازه‌ی طویل در نظر گرفته شده است ( $2a > b$ ) می‌توان از عبارت  $M_x^k|_{x=a}$  در معادله‌ی ۵ صرف نظر کرد.

### معادلات حاکم بر تعادل

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر تعادل باید برآیندهای کلی تنش ذکر شده در روابط ۶ بر حسب میدان جابه‌جایی محاسبه شود. بدین منظور، فرض شده که لایه‌های چندسازه‌ی از لایه‌های ناهمسانگرد تشکیل شده است. لذا از روابط تنش- کرنش زیر برای لایه‌ی  $k$ ام نسبت به محورهای مختصات  $x-y-z$  استفاده می‌شود:<sup>[۲۵]</sup>

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{C}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (7)$$

که در آن  $[\bar{C}]^{(k)}$  ماتریس سختی لایه‌ی  $k$ ام در دستگاه مختصات

در روابط فوق  $u_1, u_2$  و  $u_3$  به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در جهات  $x, y$  و  $z$ ،  $\varepsilon$  کرنش کششی اعمال شده به صفحه در راستای  $x$  و  $U, V, W$  توابع مجهولی از مختصات  $y$  و  $z$  است.

به منظور بسط یک نظریه‌ی لایه‌ی که قادر به پیش‌بینی نسبتاً دقیق تمامی مؤلفه‌های تنش باشد، لازم است میدان جابه‌جایی توصیف درستی از مؤلفه‌های کرنش را فراهم کند، یعنی در کل ضخامت کرنش‌های درون صفحه‌ی پیوسته و کرنش‌های عرضی ناپیوسته باشد. در مدل‌سازی اثر ناحیه مرزی در نظر گرفتن کرنش عمودی عرضی به دو دلیل مهم است<sup>[۲۰]</sup>: نخست این که تنش عمودی عرضی در این ناحیه از اهمیت خاصی برخوردار است، زیرا مؤلفه‌ی از میدان تنش است که مستقیماً بر حذف لایه‌بندی اثر دارد. دوم این که مدل‌های لایه‌ی که کرنش‌های عمودی عرضی را در نظر نمی‌گیرند قادر به ارضای شرط مرزی سطح آزاد برای مؤلفه‌های تنش برشی عرضی نیستند. به همین علت در این نوشتار از نظریه‌ی لایه‌ی ردی استفاده می‌شود. این میدان جابه‌جایی چنین بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) = \varepsilon x + U_k(y) \phi_k(z) \\ u_2(x, y, z) = V_k(y) \phi_k(z) \quad k=1, 2, \dots, N+1 \\ u_3(x, y, z) = W_k(y) \phi_k(z) \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط فوق  $U_k, V_k$  و  $W_k$  ( $k=1, 2, \dots, N+1$ ) بیان‌کننده‌ی جابه‌جایی نقاط روی صفحه‌ی  $k$ ام در جهات  $x, y$  و  $z$  بوده و  $\phi_k(z)$  تابع پیوسته‌ی از مختصه‌ی  $z$  است (تابع دورن‌یابی). بسته به درجه‌ی تابع دورن‌یابی (خطی، مرتبه‌ی دو، مرتبه‌ی سه و...)، معادله‌ی ۲ میدان جابه‌جایی پیوسته‌ی در هر لایه از لایه‌های چندسازه‌ی را بیان می‌کند. تابع دورن‌یابی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_k(z) = \begin{cases} 0 & z \leq z_{k-1} \\ \Psi_{k-1}^2(z) & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \Psi_k^1(z) & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, N+1 \quad (3)$$

که  $\Psi_k^j$  ( $j=1, 2$ ) تابع دورن‌یابی لاگرانژی موضعی<sup>۱۲</sup> مربوط به گره‌ی  $j$ ام لایه‌ی  $k$ ام است، و  $N$  تعداد لایه‌های عددی (یا ریاضی) در نظر گرفته شده در کل ضخامت ورق مرکب است. توجه کنید که اندیس‌های تکراری در معادله‌ی ۲ بیانگر عملگر مجموع روی آن اندیس است.<sup>[۲۳]</sup> با جایگذاری معادله‌ی ۲ در روابط کرنش- جابه‌جایی خطی کشسانی<sup>[۲۴]</sup> مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi_k^1 = \frac{z_{k+1} - z}{h_k}, \quad \psi_k^2 = \frac{z - z_k}{h_k} \quad (11)$$

که در آن  $h_k$  ضخامت لایه  $k$ ام است. با انتگرال گیری از معادلات ۹ عبارات صلیبت به صورت زیر به دست می آید:

$$(A_{pq}^{kj}, B_{pq}^{kj}, D_{pq}^{kj}) = \begin{cases} \left( -\frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}}, -\frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2}, \frac{h_{k-1} \bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{6} \right) & \text{اگر } j=k-1 \\ \left( \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}} + \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{h_k}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2} - \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2}, \frac{h_{k-1} \bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{3} + \frac{h_k \bar{C}_{pq}^{(k)}}{3} \right) & \text{اگر } j=k \\ \left( -\frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{h_k}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2}, \frac{h_k \bar{C}_{pq}^{(k)}}{6} \right) & \text{اگر } j=k+1 \\ \left( *, *, * \right) & \text{اگر } j > k+1 \text{ یا } j < k-1 \end{cases}$$

$$(A_{pq}^k, B_{pq}^k) = \begin{cases} \left( -\bar{C}_{pq}^{(1)}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(1)} h_1}{2} \right) & \text{اگر } k=1 \\ \left( \bar{C}_{pq}^{(k-1)} - \bar{C}_{pq}^{(k)}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)} h_{k-1}}{2} + \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)} h_k}{2} \right) & \text{اگر } 1 < k < N+1 \\ \left( \bar{C}_{pq}^{(N)}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(N)} h_N}{2} \right) & \text{اگر } k=N+1 \end{cases} \quad (12)$$

معادلات تعادل ۱۰ را به صورت تحلیلی می توان حل کرد. ولی به دلیل وجود مقادیر ویژه صفر تکراری روش حل پیچیده خواهد بود. [۱۲] اما در این تحقیق با ابداع روشی کارآمد حل این نوع مسائل بسیار ساده شده است. بدین منظور معادلات ۱۰ را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \delta U_k: D_{\phi\phi}^{kj} U_j'' - A_{\phi\phi}^{kj} U_j + D_{\psi\psi}^{kj} V_j'' - A_{\psi\psi}^{kj} V_j + (B_{\psi\psi}^{kj} - B_{\psi\phi}^{jk}) W_j' &= \alpha^{kj} U_j \\ \delta V_k: D_{\psi\psi}^{kj} U_j'' - A_{\psi\psi}^{kj} U_j + D_{\phi\phi}^{kj} V_j'' - A_{\phi\phi}^{kj} V_j + (B_{\phi\phi}^{kj} - B_{\phi\psi}^{jk}) W_j' &= \alpha^{kj} V_j \\ \delta W_k: (B_{\psi\phi}^{kj} - B_{\phi\psi}^{jk}) U_j' + (B_{\phi\psi}^{kj} - B_{\psi\phi}^{jk}) V_j' + D_{\psi\psi}^{kj} W_j'' - A_{\psi\psi}^{kj} W_j &= A_{\psi\psi}^k + \alpha^{kj} W_j \end{aligned} \quad (13)$$

که در روابط فوق  $\alpha^{kj} = \alpha \int_{-h/2}^{h/2} \phi_k \phi_j dz$  و  $\alpha$  یک عدد اختیاری

دوران یافته است. [۱۲] با جایگذاری معادلات ۴ در رابطه ی ۷ و جایگذاری نتایج حاصل در معادلات ۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (N_z^k, M_y^k, M_{xy}^k) &= (A_{12}^k, B_{12}^k, B_{1\phi}^k) \varepsilon + \\ & (B_{22}^{jk}, D_{22}^{kj}, D_{2\phi}^{kj}) \frac{dV_j}{dy} + (A_{22}^{kj}, B_{22}^{kj}, B_{2\phi}^{kj}) W_j + \\ & (B_{2\phi}^{jk}, D_{2\phi}^{kj}, D_{\phi\phi}^{kj}) \frac{dU_j}{dy}, (Q_y^k, Q_z^k, R_y^k) = (A_{\phi\phi}^{kj}, A_{\phi\psi}^{kj}, B_{\phi\psi}^{kj}) V_j + \\ & (B_{\phi\phi}^{jk}, B_{\phi\psi}^{kj}, D_{\phi\psi}^{kj}) \frac{dW_j}{dy} + (A_{\phi\psi}^{kj}, A_{\psi\psi}^{kj}, B_{\phi\psi}^{kj}) U_j \end{aligned} \quad (8)$$

در روابط فوق عبارات صلیبت چنین است:

$$\begin{aligned} A_{pq}^k &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} \frac{d\phi_k}{dz} dz, \quad B_{pq}^k = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} \phi_k dz \\ A_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} \frac{d\phi_k}{dz} \frac{d\phi_j}{dz} dz, \\ B_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} \phi_k \frac{d\phi_j}{dz} dz \\ D_{pq}^{kj} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} \phi_k \phi_j dz \end{aligned} \quad (9)$$

در نهایت، با جایگذاری روابط ۸ در معادلات تعادل ۵، معادلات حاکم بر تعادل چنین به دست می آید:

$$\begin{aligned} \delta U_k: D_{\phi\phi}^{kj} U_j'' - A_{\phi\phi}^{kj} U_j + D_{\psi\psi}^{kj} V_j'' - A_{\psi\psi}^{kj} V_j + \\ (B_{\psi\psi}^{kj} - B_{\psi\phi}^{jk}) W_j' = 0 \\ \delta V_k: D_{\psi\psi}^{kj} U_j'' - A_{\psi\psi}^{kj} U_j + D_{\phi\phi}^{kj} V_j'' - A_{\phi\phi}^{kj} V_j + \\ (B_{\phi\phi}^{kj} - B_{\phi\psi}^{jk}) W_j' = 0 \\ \delta W_k: (B_{\psi\phi}^{kj} - B_{\phi\psi}^{jk}) U_j' + (B_{\phi\psi}^{kj} - B_{\psi\phi}^{jk}) V_j' + D_{\psi\psi}^{kj} W_j'' \\ - A_{\psi\psi}^{kj} W_j = A_{\psi\psi}^k \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط فوق نماد پریم (' ) بیانگر مشتق کامل نسبت به متغیر  $y$  است.

### حل تحلیلی

در این نوشتار به منظور تعیین روش حل تحلیلی، از تابع درون یابی لاگرانژ خطی استفاده می شود. البته استفاده از مراتب بالاتر تابع درون یابی مانعی برای حل تحلیلی به وجود نمی آورد. این تابع چنین تعریف می شود:

$$\{\xi\} = [U] [\cosh(\lambda y) \{K\} - [B]^{-1} \{F\}]$$

$$\{\eta\} = [A]^{-1} [U] [\lambda] [\sinh(\lambda y)] \{K\} \quad (20)$$

در روابط فوق ماتریس‌های قطری  $[\sinh(\lambda y)]$  و  $[\cosh(\lambda y)]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\sinh(\lambda y)] = \text{diag} (\sinh(\lambda_1 y), \sinh(\lambda_2 y), \dots, \sinh(\lambda_{2(N+1)} y))$$

$$[\cosh(\lambda y)] = \text{diag} (\cosh(\lambda_1 y), \cosh(\lambda_2 y), \dots, \cosh(\lambda_{2(N+1)} y)) \quad (21)$$

همچنین بردار  $\{K\}$  در معادلات  $20$ ،  $2(N+1)$  ضریب ثابت مجهول است که در حالت کلی می‌تواند اعداد مختلط باشند. این مجهولات با ارضای شرایط مرزی  $M_{xy}^k = M_y^k = R_y^k = 0$  در یکی از لبه‌های آزاد لایه‌های چندسازه‌ی در  $y=b$  یا  $y=-b$  دست می‌آید. با مشخص شدن این ضرایب میدان جابه‌جایی به‌طور کامل مشخص می‌شود. سپس با استفاده از روابط تنش - کرنش مؤلفه‌های درون‌صفحه‌ی تنش مشخص می‌شود. برای به دست آوردن مؤلفه‌های برون‌صفحه‌ی تنش، می‌توان از روابط تنش - کرنش یا فرم انتگرال‌گیری شده‌ی معادلات موضعی تعادل (معادلات کشسانی) استفاده کرد. در این تحقیق از روش دوم استفاده شده است.

### نتایج و بحث

روش حل بیان شده در قسمت قبل، برای تحلیل میدان تنش سه بعدی در لایه‌های چندسازه‌ی متوازن متقارن  $[\pm 45^\circ]_s$ ،  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$  و  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$  استفاده شده است. در تمامی نتایج عددی، لایه‌های چندسازه‌ی با پهنا  $2b$ ، ضخامت  $h$  و نسبت پهنا به ضخامت  $4(2b/h)$  که تحت کرنش یکنواخت تک‌محوری قرار گرفته، در نظر گرفته شده است. تمام لایه‌ها دارای ضخامت یکسانی بوده  $(h_i)$  و به صورت همگن و ناهمسانگرد از جنس گرافیت - اپوکسی با خواص مکانیکی زیر فرض شده است: [17, 21]

$$E_1 = 137/9 \text{ GPa}, \quad E_2 = E_3 = 14/48 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5/16 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0/21 \quad (22)$$

که در آن ۱ موازی امتداد فیبرها، ۲ عمود بر امتداد فیبرها و ۳ در امتداد ضخامت لایه‌هاست. در نتایج ارائه شده در زیر از ۶ لایه‌ی عددی در هر لایه‌ی فیزیکی استفاده شده است. [17]

است به نحوی که  $k_j$  نسبت به سختی‌های  $A_{33}^{kj}$ ،  $A_{44}^{kj}$  و  $A_{55}^{kj}$  کوچک باشد. عبارات اضافه‌شده به طرف راست معادلات ۱۰ مشابه عبارات اینرسی در معادلات حرکت ورق‌های مرکب در نظریه‌ی لایه‌ی است. این عبارات، در معادلات ۱۳، مقادیر ویژه‌ی صفر تکراری را حذف می‌کند. لذا به راحتی می‌توان از روش‌های معمول معادلات مقدار ویژه، برای حل این معادلات نیز استفاده کرد. لازم به ذکر است که حل معادلات به دست آمده حساسیت بسیار کمی به مقدار عددی دارد.

با توجه به این که شرایط مرزی در لبه‌های آزاد  $(y=b)$  و  $(y=-b)$  صفحه یکسان است، می‌توان متغیرهای حالت را به نحوی تعریف کرد که حجم محاسبات کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. به همین علت متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\eta_1(y)\} = \{U(y)\}, \quad \{\xi_1\} = \{U'(y)\} = \{\eta_1'(y)\}$$

$$\{\eta_2(y)\} = \{V(y)\}, \quad \{\xi_2\} = \{V'(y)\} = \{\eta_2'(y)\}$$

$$\{\xi_3(y)\} = \{W(y)\}, \quad \{\eta_3\} = \{W'(y)\} = \{\xi_3'(y)\} \quad (14)$$

که در آن:

$$\{\eta_1\}^T = [U_1, U_2, \dots, U_{N+1}] \quad (15)$$

همچنین  $\{\eta_1\}$ ،  $\{\eta_2\}$ ،  $\{\xi_1\}$ ،  $\{\xi_2\}$  و  $\{\xi_3\}$  مشابه روابط ۱۵ تعریف می‌شود. جایگذاری معادلات ۱۴ در معادلات تعادل ۱۳، دو دستگاه معادله‌ی مرتبه یک به صورت زیر را پدید می‌آورد:

$$\{\xi'\} = [A] \{\eta\}, \quad \{\eta'\} = [B] \{\xi\} + \{F\} \quad (16)$$

در روابط فوق:

$$\{\eta\}^T = [\{\eta_1\}^T, \{\eta_2\}^T, \{\eta_3\}^T], \quad \{\xi\}^T = [\{\xi_1\}^T, \{\xi_2\}^T, \{\xi_3\}^T] \quad (17)$$

ضرایب ماتریس‌های  $[A]$ ،  $[B]$  و  $\{F\}$  در معادلات ۱۶ در ضمیمه آورده شده است. اکنون روابط ذیل را تعریف می‌کنیم:

$$[A][B] = [C], \quad [C][U] = [U][\Lambda^2] \quad (18)$$

در روابط ۱۸،  $[\Lambda^2]$  ماتریس مقادیر ویژه و  $[U]$  ماتریس بردارهای ویژه متعلق به  $[C]$  است. در حالت کلی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌تواند اعداد مختلط باشند. ماتریس قطری مقادیر ویژه چنین است:

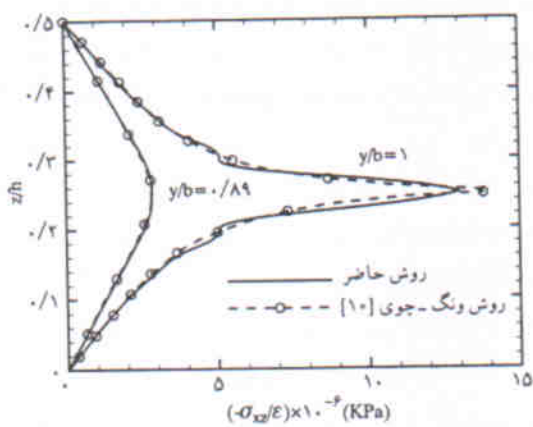
$$[\Lambda^2] = \text{diag} (\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_{2(N+1)}^2) \quad (19)$$

با توجه به این که باید  $\xi$ ها توابع زوجی از  $y$  و  $\eta$ ها توابع فردی از  $y$  باشند (روابط ۱۴)، حل معادلات ۱۶ به صورت زیر می‌باشد:

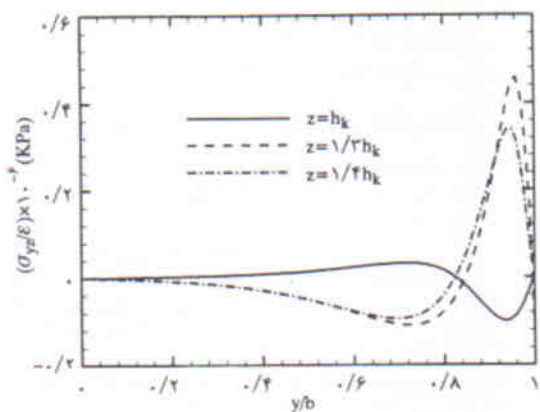
چندسازه‌یی از لبه‌ی آزاد ایجاد می‌شود. به همین دلیل لایه‌ی مرزی تنش، معمولاً به اندازه‌ی ضخامت لایه‌ی چندسازه‌یی در نظر گرفته می‌شود.

شکل ۲ توزیع تنش  $\sigma_z$  در راستای پهنای لایه‌ی چندسازه‌یی  $[\pm 45^\circ]_s$  در سطوح مشترک  $45^\circ/-45^\circ$  و  $45^\circ/-45^\circ$  را نشان می‌دهد. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با نتایج حل تقریبی کشسانی توسط وانگ و چوی<sup>[۱۰]</sup> بیانگر دقت بسیار خوب نظریه‌ی به کار گرفته شده است. تنش‌های برون صفحه‌یی ایجاد شده در لبه‌ی آزاد لایه‌های چندسازه‌یی ( $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_z$ )، عامل اصلی حذف لایه‌بندی در این نوع لایه‌گذاری است.

توزیع تنش‌های برون صفحه‌یی در راستای ضخامت لایه‌ی چندسازه‌یی با نتایج موجود در سایر مقالات نیز بررسی شده است. به عنوان مثال، توزیع تنش برون صفحه‌یی  $\sigma_{xz}$  در شکل ۳ الف نشان داده شده است. نتایج به دست آمده تطابق خوبی با گزارشات حل تحلیلی<sup>[۱۰]</sup> هم در نواحی دور از لبه‌ی آزاد و هم در لبه‌ی آزاد، دارد.

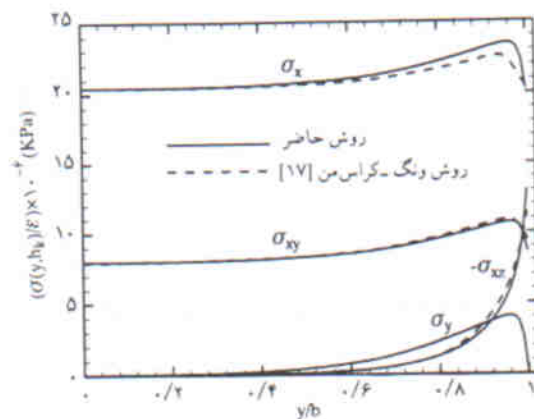


الف)  $\sigma_{xz}$  در راستای ضخامت؛

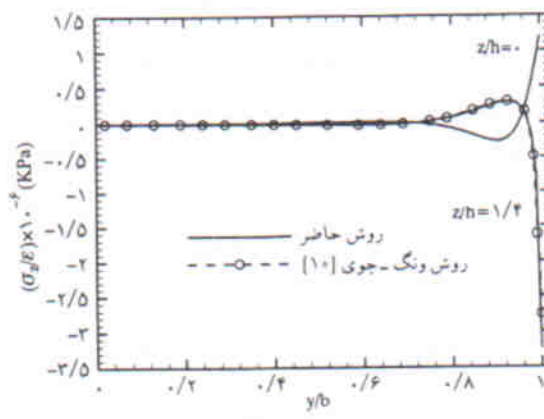


ب)  $\sigma_{yz}$  در راستای پهنای ورق مرکب  $[\pm 45^\circ]_s$ ؛  
شکل ۳. توزیع تنش‌های برون صفحه‌یی.

توزیع تنش‌های درون و برون صفحه‌یی در راستای پهنای صفحه‌ی مرکب  $[\pm 45^\circ]_s$  در سطح مشترک  $45^\circ/-45^\circ$  در شکل ۲ الف نشان داده شده است. با توجه به شکل، تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده در این پژوهش (حل تحلیلی) با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود<sup>[۱۷]</sup> مشاهده می‌شود. وجود این تطابق نشان دهنده‌ی دقت و صحت نظریه‌ی به کار گرفته شده است. مشاهده می‌شود تنش برشی درون صفحه‌یی  $\sigma_{xy}$  و تنش‌های محوری  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  در فواصل دور از لبه‌ی آزاد به حل نظریه‌ی کلاسیک صفحات (CLT) همگرا می‌شود. همچنین هر سه مؤلفه‌ی درون صفحه‌یی تنش دارای تغییرات شدید در لبه‌ی آزاد است و به منظور برقراری تعادل، تنش‌های برون صفحه‌یی ایجاد می‌شود. با توجه به این شکل، تنش بین لایه‌یی  $\sigma_{xz}$  دارای تغییرات شدید در نزدیکی لبه‌ی آزاد است و در نواحی دور از لبه‌ی آزاد به سمت صفر (حل CLT) میل می‌کند. همان‌گونه که در شکل مشخص است، تغییرات در مؤلفه‌های تنش و به خصوص تنش‌های بین لایه‌یی حدوداً در فاصله‌یی به اندازه‌ی ضخامت لایه‌ی



(الف)

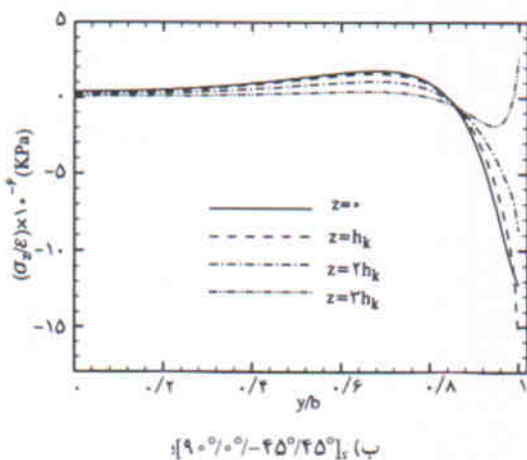
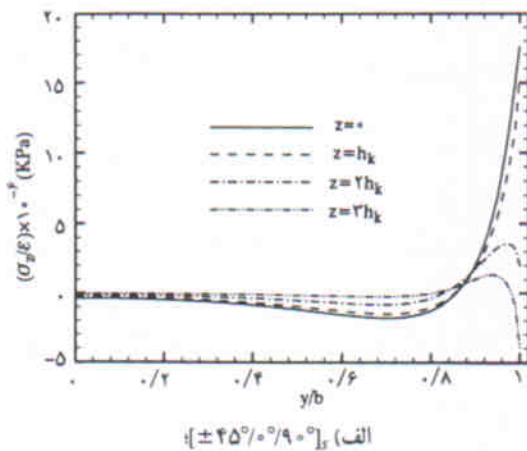


(ب)

شکل ۲. توزیع مؤلفه‌های مختلف تنش در راستای پهنای ورق مرکب  $[\pm 45^\circ]_s$ .

در نزدیکی لبه‌ی آزاد تا ۲۵ درصد مقدار آن در ناحیه درونی صفحه (حل CLT) افزایش می‌یابد. لذا این نکته باید در تخمین مقاومت ورق مرکب در نظر گرفته شود. همچنین دیده می‌شود که  $\sigma_{xz}$  در نزدیکی لبه‌ی آزاد با تغییرات شدیدی همراه است.

شکل ۵ توزیع تنش برون صفحه‌ی  $\sigma_z$  در سطوح مشترک مختلف لایه‌ی چندسازه‌ی  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_5$  را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، مقدار  $\sigma_z$  در لبه‌ی آزاد در سطح مشترک  $z=0$  حداکثر است، در سطوح مشترک بالاتر کاهش یافته و در  $z=3h_k$  منفی شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود توزیع تنش  $\sigma_z$  در لایه‌ی چندسازه‌ی  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ/45^\circ/45^\circ]$  شبیه به توزیع تنش  $\sigma_z$  در  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_5$  نیست (شکل ۵ ب). مقایسه شکل‌های ۵ الف و ۵ ب نشان‌دهنده‌ی اختلاف زیاد این دو لایه‌گذاری است. لازم به ذکر است نتایج شکل‌های ۵ الف و ۵ ب تطابق بسیار خوبی با دیگر نتایج ارائه شده دارد<sup>[۱۷]</sup> (این نتایج در شکل نشان داده نشده است).

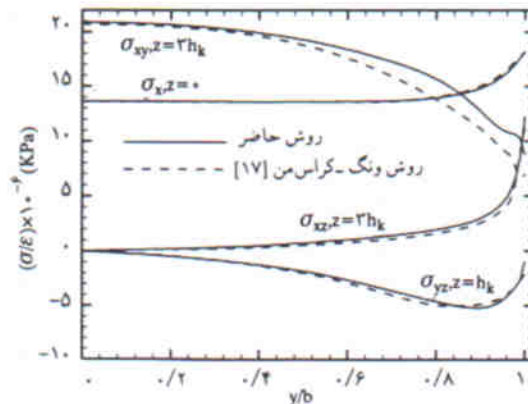


شکل ۵. توزیع برون صفحه‌ی  $\sigma_z$  در راستای پهنا و در سطوح مشترک مختلف ورق مرکب.

لازم به ذکر است که محققان اندازه‌ی  $\sigma_{xz}$  را به علت منفرد بودن تنش در محل برخورد سطح مشترک  $45^\circ/-45^\circ$  با لبه‌ی آزاد نامحدود ذکر کرده‌اند.<sup>[۱۱]</sup> در نتایج به دست آمده توسط نظریه‌ی لایه‌ی مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد لایه‌های عددی، تنش  $\sigma_{xz}$  در محل برخورد سطح مشترک  $45^\circ/-45^\circ$  با لبه‌ی آزاد افزایش پیدا می‌کند. این رفتار بیانگر امکان منفرد بودن تنش‌ها در این نقطه است. نتایج رسم شده در شکل ۳ الف با در نظر گرفتن ۱۰ لایه‌ی عددی در هر لایه‌ی فیزیکی به دست آمده است. بدیهی است با افزایش تعداد لایه‌های عددی، نتایج تطابق بهتری با نتایج ارائه شده‌ی محققان پیدا می‌کند.<sup>[۱۱]</sup>

شکل ۳ ب توزیع تنش  $\sigma_{yz}$  در راستای پهنای ورق مرکب  $[\pm 45^\circ]_5$  در موقعیت‌های مختلف از ضخامت صفحه را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل،  $\sigma_{yz}$  در نواحی درونی ورق مرکب صفر بوده، در نزدیکی لبه‌ی افزایش پیدا می‌کند و در لبه‌ی آزاد به سمت صفر میل می‌نماید. در ورق مرکب با لایه‌گذاری  $[\pm 45^\circ]_5$ ، این مؤلفه‌ی تنش، در مقایسه با دو مؤلفه‌ی دیگر تنش‌های برون صفحه‌ی  $(\sigma_z, \sigma_{xz})$ ، از لحاظ اندازه کوچک‌تر است. لذا در این نوع لایه‌گذاری، تنش‌های برون صفحه‌ی  $\sigma_z$  و  $\sigma_{xz}$  عوامل اصلی جدایش لایه‌هاست.

شکل ۴ توزیع تنش‌های  $\sigma_x$  در  $\sigma_{xy}$ ،  $z=0$  در  $\sigma_{xz}$ ،  $z=3h_k$  در  $\sigma_{yz}$  و  $z=3h_k$  را در راستای پهنای ورق مرکب  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_5$  نشان می‌دهد. در این شکل نتایج به دست آمده از روش اجزاء محدود نیز آورده شده است.<sup>[۱۷]</sup> این شکل بیانگر تطابق خوب نتایج، به خصوص در نواحی دور از لبه‌ی آزاد است. توزیع تنش  $\sigma_{xy}$  نشان می‌دهد لایه‌ی مرزی در این نوع لایه‌گذاری پهن‌تر از لایه‌ی مرزی ورق مرکب  $[\pm 45^\circ]_5$  است. با توجه به شکل، مقدار تنش  $\sigma_x$



شکل ۴. توزیع مؤلفه‌های مختلف تنش در راستای پهنای ورق مرکب  $[\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ]_5$ .

دقت و صحت نظریه‌ی استفاده شده در پیش‌بینی تنش‌های برون‌صفحه‌یی را نشان می‌دهد. مزیت روش استفاده شده نسبت به روش اجزاء محدود، حجم محاسبات کمتر و دقتی مشابه با آن است. به‌علاوه خطاهای عددی موجود در روش‌های حل عددی به‌علت تحلیلی بودن نظریه‌ی ارائه شده وجود ندارد. لذا نتایج به دست آمده از این نظریه می‌تواند به‌عنوان مرجعی برای ارزیابی روش‌های تقریبی عددی به‌کار رود.

## نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از یک نظریه‌ی لایه‌یی، توزیع تنش در ورق‌های مرکب متوازن با طول بلند و لایه‌گذاری متقارن تحت اثر کرنش تک‌محوری کششی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده از این نظریه با نتایج ارائه شده در سایر مقالات (روش حل عددی اجزاء محدود و روش تحلیلی تقریبی کشسانی) مقایسه شد. تطابق خوب به دست آمده بین نتایج،

## پانوش

1. layerwise theory
2. balanced composite laminates
3. uniform axial strain
4. delamination
5. classical lamination theory
6. singularity
7. boundary-layer stress intensity factors
8. hybrid-stress finite element
9. equivalent single layer theories
10. numerical layers
11. balanced symmetric laminates
12. local lagrangian interpolation function
13. generalized stress resultants

## منابع

1. Puppo, A.H. and Evensen, H.A., "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plane stress", *J. of Compo. Mater.*, **4**, pp 204-220 (1970).
2. Pipes, R.B. and Pagano, N.J., "Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension", *J. of Compo. Mater.*, **4**, pp 538-548 (1970).
3. Pagano, N.J., "On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate", *J. of Compo. Mater.*, **8**, pp 65-81 (1974).
4. Hsu, P.W. and Herakovich, C. T., "Edge effects in angle-ply composite laminates", *J. of Compo. Mater.*, **11**, pp 422-428 (1977).
5. Tang, S., and Levy, A., "A boundary layer theory: part II: extension of laminated finite strip", *J. of Compo. Mater.*, **9**, pp. 42-52 (1975).
6. Pipes, R.B. and Pagano, N.J., "Interlaminar stresses in composite laminates-an approximate elasticity solution", *J. of Appl. Mech.*, **41**, pp 668-672 (1974).
7. Pagano, N.J., "Stress fields in composite laminates", *Int. J. of Solids and Struct.*, **14**, pp 385-400 (1978).
8. Pagano, N.J., "Free edge stress fields in composite laminates", *Int. J. of Solids and Struct.*, **14**, pp 401-406 (1978).
9. Wang, S.S. and Choi, I., "Boundary-layer effects in composite laminates: Part 1- Free-edge stress singularities", *J. of Appl. Mech.*, **49**, pp 541-548 (1982).
10. Wang, S.S. and Choi, I., "Boundary-layer effects in composite laminates: Part 2- Free-edge stress solutions and basic characteristics", *J. of Appl. Mech.*, **49**, pp 549-560 (1982).
11. Kassapoglou, C. and Lagace, P.A., "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials", *J. of Appl. Mech.*, **53**, pp 744 -750 (1986).
12. Rose, C.A. and Herakovich, C.T., "An approximate solution for interlaminar stresses in composite laminates", *Compo. Eng.*, **3**(3), pp 271-285 (1993).
13. Kassapoglou, C., "Determination of interlaminar stresses in composite laminates under combined loads", *J. of Reinforced Plastics and Compo.*, **9**, pp 33-58 (1990).
14. Lin, C.C., Hsu, C.Y., and Ko, C.C., "Interlaminar stresses in general laminates with straight edges", *AIAA J.*, **33**, (8), pp. 1471-1476 (1995).
15. Cho, M. and Kim, H.S., "Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loadings", *Int. J. of Solids and Struct.*, **37**(3), pp. 435-459 (2000).
16. Rybicki, E.F., "Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading", *J. of Compo. Mater.*, **5**, pp 354-360 (1971).
17. Wang, A.S.D. and Crossman, F.W., "Some new results on edge effect in symmetric composite laminates", *J. of Compo. Mater.*, **11**, pp 92-106 (1977).
18. Gaudenzi, P., Mannini, A., and Carbonaro, R., "Multi-layer higher-order finite elements for the analysis of free-edge stresses in composite laminates", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **41**, pp 851-873 (1998).
19. Whitcomb, J.D., Raju, I.S., and Goree, J.D., "Reliability of the finite element method for calculating free edge stresses in composite laminates", *Comput. Struct.*, **15**, (1) pp 23-37 (1982).
20. Robbins, D.H. and Reddy, J.N. "Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, **36**, pp 655-677 (1993).
21. Spilker, R.L. and Chou, S.C., "Edge effects in symmetric composite laminates: importance of satisfying the



- traction-free-edge condition", *J. of Compo. Mater.*, **14**, pp 2-20 (1980).
22. Reddy, J.N., "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates", *Commun. in Appl. Numer. Meth.*, **3**, pp 173-180 (1987).
23. Nosier, A., Kapania, R.K., and Reddy, J. N., "Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory", *ALAA J.*, **13**, (12) pp 2335-2346 (1993).
24. Fung, Y.C., "Foundations of solid mechanics", *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*, 1st Edn. (1965).
25. Herakovich, C.T., *Mechanics of Fibrous Composites*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1st Edn. (1998).
26. Gopal, M., *Modern Control System Theory*, New Age International (P) Limited, Publishers, 2nd Edn. (1993).
27. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, New York, 1st Edn. (1997).

ضمیمه

ماتریس‌های  $[A]$ ،  $[B]$  و  $\{F\}$  که در روابط ۱۶ آمده است چنین‌اند:

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_1] & [a_2] & [a_3] \\ [b_1] & [b_2] & [b_3] \\ [c_1] & [c_2] & [I] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [c_1] & [c_2] & [c_3] \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{d\} \end{bmatrix}$$

که  $[I]$  و  $[0]$  به ترتیب ماتریس صفر و ماتریس واحد به ابعاد  $(N+1) \times (N+1)$  و  $\{0\}$  بردار صفر با  $N+1$  عضو است. ضرایب دیگر ماتریس‌های فوق چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} [a_1] &= [\bar{a}_1]^{-1} [\bar{a}_2], & [a_2] &= [\bar{a}_1]^{-1} [\bar{a}_3] \\ [a_3] &= [\bar{a}_1]^{-1} [\bar{a}_4], & [b_1] &= [D_{22}]^{-1} ([A_{25}] - [D_{26}][a_1]) \\ [b_2] &= [D_{22}]^{-1} ([A_{24}] + [\alpha] - [D_{26}][a_2]), & [b_3] &= [D_{22}]^{-1} ([B_{23}]^T - [B_{22}] - [D_{26}][a_2]) \\ [c_1] &= [D_{22}]^{-1} ([B_{26}]^T - [B_{25}]), & [c_2] &= [D_{22}]^{-1} ([B_{23}]^T - [B_{24}]) \\ [c_3] &= [D_{22}]^{-1} ([A_{23}] + [\alpha]), & \{d\} &= [D_{22}]^{-1} \{A_{13}\}e \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} [\bar{a}_1] &= [D_{22}] - [D_{26}][D_{22}]^{-1}[D_{26}], & [\bar{a}_2] &= [A_{25}] + [\alpha] - [D_{26}][D_{22}]^{-1}[A_{24}] \\ [\bar{a}_3] &= [A_{25}] - [D_{26}][D_{22}]^{-1}([A_{24}] + [\alpha]), & [\bar{a}_4] &= [B_{26}]^T - [B_{22}] + [D_{26}][D_{22}]^{-1}([B_{23}] - [B_{24}]^T) \end{aligned}$$