

حل مسائل هدایت حرارتی معکوس با استفاده از روش

تقابل دوگانه اجزاء مرزی^۱

فرشاد کوثری (دانشیار)

علی بیهبانی‌نیا (دکتری)

دانشکده‌ی فنی - گروه مکانیک، دانشگاه تهران

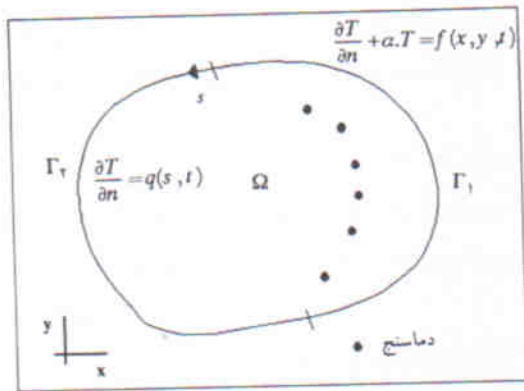
در نوشتار حاضر، روش تقابل دوگانه اجزاء مرزی (DRBEM) همراه با روش تخمین توابع متوالی^۲ (SFEM) برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی به کار گرفته شده است. مسئله‌ی که مورد توجه قرار گرفته است، تخمین شار حرارتی مجهول به صورت تابعی از زمان و مکان است. همچنین در این نوشتار فرمول‌بندی جدیدی از روش تخمین توابع متوالی بر اساس استفاده از چندجمله‌ی‌ها ارائه شده است. نتایج به دست آمده حاکی از این است که استفاده از چندجمله‌ی‌ها باعث کاهش حساسیت روش به محل قرارگیری دماسنج می‌شود. بررسی حساسیت به روش خطاهای اندازه‌گیری بیانگر این نکته است که روش قادر به تخمین شار حرارتی در حالتی است که خطاهای اندازه‌گیری حداکثر ۲٪ دمای پیش‌بینی اندازه گرفته شده باشد. این بررسی همچنین نشان می‌دهد که مقدار مناسب برای تعداد گام‌های آینده بستگی به خطاهای اندازه‌گیری دارد.

مقدمه

مسائل معکوس هدایت حرارتی انواع مختلفی دارند. که می‌توان آنها را به مسائل تخمین شرط مرزی، شرط اولیه، خواص ترموفیزیکی و هندسه تقسیم کرد.^۱ روش‌های تخمین شرط مرزی مجهول، زمانی به کار می‌روند که اندازه‌گیری مستقیم امکان‌پذیر نباشد. مثلاً در بسیاری از کاربردها قرار دادن مستقیم دماسنج بر روی یک سطح امکان‌پذیر نیست. در این حالت می‌توان با قرار دادن دماسنج بر روی سطوح دیگر و با استفاده از روش‌های معکوس، شرط مرزی مورد نظر را تخمین زد.

هر الگوریتم معکوس نیاز به یک روش تنظیم^۲ و یک روش برای مجزاسازی معادلات حاکم دارد. در این میان روش مجزاسازی مورد استفاده از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا روش‌های معکوس معمولاً با نوعی تکرار انجام می‌گیرند، بنابراین به ازای هر گام زمانی حل معکوس، حل مستقیم ممکن است چندین بار انجام شود. به همین منظور، ممکن است روش‌های مجزاسازی مختلف مانند روش دیفرانسیل محدود، اجزاء محدود و اجزاء مرزی به کار گرفته شوند. در این میان روش اجزاء مرزی نسبت به دیگر روش‌های مجزاسازی دارای امتیازات قابل توجهی است. این امتیازات را به‌طور خلاصه می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد: کاهش ابعاد مسئله در اثر انتقال معادلات حاکم به مرز، سهولت در حل مسائل با هندسه پیچیده در اثر عدم نیاز به شبکه‌بندی داخلی، و سهولت در انتخاب محل

دماسنج‌ها.^{۱،۲} به‌علت امتیازات ذکر شده، روش اجزاء مرزی در چند سال اخیر مورد توجه قرار گرفته است. کاربرد روش اجزاء مرزی برای مسائل پایدار هدایت حرارتی به آسانی صورت می‌گیرد.^۳ ولی کاربرد این روش برای مسائل ناپایدار کمی پیچیده‌تر است. این پیچیدگی در اثر وجود ترم مشتق زمانی دما ایجاد می‌شود. در این ارتباط چندین روش ارائه شده است که دو روش آن کاربرد بیشتری یافته‌اند. در روش اول از حل اساسی معادله‌ی هدایت حرارتی به صورت تابعی از زمان^۴ (TDBEM) استفاده می‌شود. در این روش در معادلات انتگرالی یک انتگرال بر روی سطح که شرایط اولیه را داراست، باقی می‌ماند که باعث می‌شود امتیاز اصلی روش که عدم نیاز به شبکه‌بندی داخلی است از بین برود. برای حل این مشکل روشی پیشنهاد شده که در آن انتگرال‌گیری در هر گام زمانی از زمان صفر آغاز می‌شود و با صفر کردن شرط اولیه یکنواخت این انتگرال حذف می‌شود. با وجود اینکه در این روش نیاز به حل معادلات حاکم در داخل ناحیه‌ی حل نیست با افزایش تعداد گام‌های زمانی، زمان و حافظه‌ی رایانه‌ی مورد نیاز افزایش قابل توجه می‌یابد زیرا برای انجام انتگرال‌گیری بر روی زمان تمام ضرایب و دماها از زمان صفر باید ذخیره شوند.^۴ در روش دوم که در این نوشتار مورد استفاده قرار گرفته است، از حل اساسی معادله‌ی لاپلاس استفاده می‌شود. در این روش ترم مشتق زمانی دما به عنوان ترم منبع در نظر گرفته شده و با استفاده از روش تقابل دوگانه به مرز منتقل می‌شود. این روش،



شکل ۱. هندسه و شرایط مرزی یک مسئله‌ی عمومی معکوس هدایت حرارتی.

در یک مسئله‌ی مستقیم $q(s, t)$ معلوم است، ولی در مسئله‌ی معکوس هدف تعیین آن با استفاده از دماهای قرائت شده در دماسنج (۵) است.

مجزا سازی معادلات حاکم با استفاده از روش DRBEM

روش تقابل دوگانه اجزاء مرزی برای مجزا سازی معادله‌ی ۱ به کار گرفته شده است. در این روش مشتق زمانی دما به عنوان یک ترم منبع در نظر گرفته شده و از حل اساسی معادله‌ی لاپلاس به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{Ln}(r_j) \quad (6)$$

با ضرب دو طرف رابطه‌ی ۱ در حل اساسی معادله‌ی لاپلاس و انتگرال‌گیری بر روی سطح می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} G(\nabla^2 T) d\Omega = \int_{\Omega} G \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega. \quad (7)$$

با استفاده از رابطه‌ی دوم گرین، معادله‌ی ۷ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda T(r_j, t) - \int_{\Gamma} \left[T \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial T}{\partial n} \right] d\Gamma = \int_{\Omega} G \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (8)$$

که در آن Γ بیانگر مرز ناحیه‌ی حل Ω و λ ضریب شکل است. مشتق زمانی دما را می‌توان با استفاده از توابع میان‌یابی یا برازش به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_T} f(r_j) \beta_j(t), \quad (9)$$

که برای این برازش از نقاط مرزی و تعدادی از نقاط داخلی، به نام «نقاط تقابل دوگانه» استفاده می‌شود. توابع مختلفی مانند

چنان‌که مطالعات کارایی نشان می‌دهد، مشکلات ذکر شده در روش TDBEM را ندارد. [۱۵] روش DRBEM در ابتدا برای مسائل خطی ارائه شد ولی بعداً حل مسائل غیرخطی ناپایدار هدایت حرارتی با خواص ترموفیزیکی متغیر نیز توسعه یافت. [۱۷، ۱۶]

بیشتر فعالیت‌های قبلی در زمینه‌ی کاربرد روش اجزاء مرزی در مسائل معکوس، در ارتباط با روش TDBEM بوده است. کورپیتز و نوک از این روش و روش ترکیبی تخمین توابع متوالی و تنظیم تیخونو^۵ برای تخمین شار حرارتی مجهول استفاده کردند. [۸] لسنیک، الیوت و اینگهام نیز یک روش تمام دامنه بر مبنای کمینه کردن یک تابع انرژی ارائه کردند. [۱۱] پاسکوتی و نیلیوت از روش‌های تنظیم زمانی و مکان تیخونو استفاده کردند [۹] و هانگ و جی وی جن روش گرادبان‌های مزدوج را پیشنهاد دادند [۱۰] و بالاخره چانتاسیروان از روش تخمین توابع متوالی استفاده کرد. [۱۱]

در این نوشتار هدف اصلی استفاده از روش تخمین توابع متوالی همراه با روش تقابل دوگانه اجزاء مرزی است. بر اساس بررسی انجام شده به وسیله مؤلفین، تنها کار گزارش شده در زمینه‌ی کاربرد روش تقابل دوگانه در مسائل معکوس مربوط به سینگ و تاناکا است [۱۲] که در آن از ترکیب این روش و گرادبان‌های مزدوج برای حل یک مسئله‌ی شبیه‌سازی شده استفاده شد. با توجه به امتیازات روش تخمین توابع متوالی، که بعداً اشاره خواهد شد، ترکیب این روش با روش تقابل دوگانه می‌تواند مورد توجه باشد. علاوه بر این اعمال هر دو روش برای حل مسائل غیرخطی امکان‌پذیر بوده و می‌تواند در یک کار جداگانه مورد بررسی قرار گیرد.

تشریح مسئله

در شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی یک مسئله‌ی عمومی هدایت حرارتی معکوس نشان داده شده است. در این شکل، مرز به دو قسمت با شرط مرزی معلوم (سطح غیر فعال) و شرط مرزی مجهول (سطح فعال) تقسیم شده است. معادلات حاکم با فرض خواص ترموفیزیکی ثابت و عدم وجود ترم منبع به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = f(x, y, t), \quad \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = q(s, t), \quad \Gamma_2 \quad (3)$$

$$T(x, y, \cdot) = \psi_0, \quad \Omega \quad (4)$$

$$Y(x_j, y_j, t_i) = g_j(t_i), \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

روش‌های تمام‌دامنه نیز امتیازات خاص خود را دارند. به‌عنوان مثال، نشان داده شده که روش گرادینان‌های مزدوج که یک روش تمام‌دامنه است برای مسائلی که سطح فعال قسمت زیادی از مرز ناحیه حل را پوشانده مناسب است.^[۱۲، ۱۱] این روش را به‌صورت متوالی نیز می‌توان به‌کار برد ولی نشان داده شده است که در این حالت بیشتر امتیازاتش را از دست می‌دهد.^[۱۵]

روش تخمین توابع متوالی اولین بار توسط «بک» برای حل مسائل یک بعدی ارائه شد^[۱۶] ولی بعداً کاربرد آن به مسائل دو بعدی نیز توسعه یافت.^[۱۷، ۱۸] در مسائلی که دامنه‌ی خطا بالاست و یا تعداد مجهولات قرائت شده بالا باشد، با ترکیب این روش با روش تنظیم تیخونو می‌توان پایداری حل را بهبود بخشید.^[۱۸]

روش تخمین توابع متوالی

برای تخمین شار حرارتی به‌صورت تابعی از زمان و مکان، سطح فعال را می‌توان به n المان تقسیم کرد. به‌منظور تخمین شار حرارتی مجهول در زمان t_M به‌صورت موقتی^۸ فرض می‌شود بردار شار حرارتی در r گام زمانی آینده ثابت می‌ماند، یعنی:

$$q_M = q_{M+1} = \dots = q_{M+r-1} \quad (14)$$

که بردار q_j به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ تعریف می‌شود:

$$q_j^T = [q_j(1), q_j(2), \dots, q_j(n)] \quad (15)$$

تابع هدف که با استفاده از کمینه کردن آن بردار شار حرارتی مجهول تخمین زده می‌شود، چنین تعریف می‌شود.

$$S = \sum_{j=1}^{N1} \sum_{i=1}^r W_{i,j} [Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}(q_M)]^2 \quad (16)$$

در رابطه‌ی ۱۶ دما در r زمان آینده با استفاده از بسط تیلور^[۱۸] به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_{j,M+i-1}(q_M) = T_{j,M+i-1}(q^*) + \sum_{k=1}^n Z_{j,i,k} (q_M(k) - q^*(k)) \quad (17)$$

$$Z_{j,i,k} = \frac{\partial T_{j,M+i-1}}{\partial q_M(k)} \quad (18)$$

ضریب حساسیت بوده و q^* معمولاً برابر با صفر انتخاب می‌شود. در بعضی از موارد می‌توان تغییرات مکانی شار حرارتی بر روی تمام و یا قسمتی از سطح فعال را با یک چندجمله‌یی تقریب کرد. این تقریب باعث کاهش تعداد مجهولات، و در نتیجه افزایش پایداری

چندجمله‌یی با درجات مختلف و یا تابع بسط در رابطه‌ی ۹ به‌عنوان تابع میان‌یاب می‌توانند به‌کار گرفته شوند. مطالعات نشان داده‌اند که تابع

$$f(r) = 1+r \quad (10)$$

در این سادگی کارایی لازم را دارد و استفاده از آن توصیه شده است.^[۱۳، ۱۴] با جایگزینی رابطه‌ی ۹ در رابطه‌ی ۸ و انجام عملیات ریاضی^[۱۵] می‌توان نوشت:

$$[R] \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] - [S][T] = [P] \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] \quad (11)$$

با استفاده از روش‌های مختلف می‌توان مشتق زمانی دما را مجزا کرد. شرح این روش‌ها و مقایسه‌ی آنها قابل دستیابی هستند.^[۱۳، ۱۴] در این نوشتار از روش ضمنی، به‌علت سادگی و دقت قابل قبول آن استفاده شده است. در این روش می‌توان نوشت:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [T^{t+\Delta t} - T^t] \quad (12)$$

از ترکیب روابط ۱۱ و ۱۲، رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$[S][T]^{t+\Delta t} - [R] \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right]^{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} [P][T]^{t+\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} [P][T]^t = 0 \quad (13)$$

که از آن می‌توان برای حل مسائل مستقیم استفاده کرد.

بررسی روش‌های معکوس هدایت حرارتی

روش‌های زیادی برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی ارائه شده‌اند.^[۱] این روش‌ها را می‌توان به دو دسته‌ی تمام‌دامنه^۶ و متوالی^۷ تقسیم کرد. روش‌های متوالی عمدتاً در آمریکا توسعه یافتند، در حالی که روش‌های تمام‌دامنه در ابتدا در روسیه مورد توجه بوده‌اند. دقت و سرعت این روش‌ها در تعدادی از مراجع بررسی شده‌اند.^[۱۴] هر یک از این دسته روش‌ها امتیازات خاص خود را دارند؛ مهم‌ترین امتیازات روش‌های متوالی عبارت‌اند از:

- روش‌های متوالی را می‌توان به‌صورت زمان حقیقی به‌کاربرد. این امتیاز به‌خصوص در زمینه‌ی کاربردهای کنترلی دارای اهمیت است.
- در مسائلی که خواص ترموفیزیکی تابعی از دما هستند، می‌توان با محاسبه‌ی خواص ترموفیزیکی در دمای گام زمانی قبلی مسئله را خطی کرد.
- روش‌های متوالی معمولاً نیاز به حافظه و زمان رایانه‌یی کمتری دارند.

نتایج عددی

برای بررسی دقت و پایداری روش حاضر مانند بسیاری دیگر از محققین از روش شبیه‌سازی عددی استفاده شد. [۸۱-۱۱۱] برای اطمینان از عدم وابستگی روش معکوس به روش عددی که برای شبیه‌سازی استفاده می‌شود، از یک کد رایانه‌ی دیفرانسیل محدود (به جای اجزای مرزی) برای شبیه‌سازی استفاده شد. درک مورد نظر روش ADI^۱ به کار رفته است. اطمینان لازم به عدم وابستگی جواب‌ها به شبکه‌بندی^{۱۰} مورد استفاده، قبل از حل حاصل شد. به منظور مدل‌سازی خطاهای اندازه‌گیری، دماهای محاسبه شده با استفاده از حل مستقیم، به وسیله‌ی یک تابع اتفاقی و به صورت زیر مغشوش شده‌اند.^{۱۱}

$$Y = T + d(1 - \tau p) \quad (26)$$

برای محاسبه‌ی دقت حل معکوس، از درصد خطای نسبی مطابق رابطه‌ی ۲۷ استفاده شده است.

$$\eta = \frac{\|q_{ex} - q_{es}\|_{r.m.s.}}{\|q_{ex}\|_{r.m.s.}} \times 100, \quad (27)$$

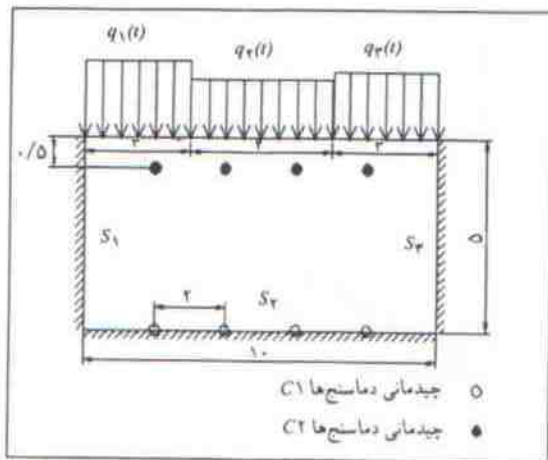
که در این رابطه

$$\|X\|_{r.m.s.} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^2(t_i) \right]^{1/2}, \quad (27)$$

است.

مثال ۱

هندسه و محل قرارگیری دماسنج‌های مسئله‌ی مورد بررسی در شکل ۲ نشان داده شده است. شرایط مرزی در سه سطح S_1 ، S_2 و S_3 (سطوح غیر فعال) عایق است. تغییرات شار حرارتی بر روی سطح S_4 که سطح فعال است به وسیله‌ی سه مؤلفه که تغییرات آنها برحسب



شکل ۲. هندسه و شرایط مرزی در مثال ۱.

حل می‌شود. سطح فعال به چند بخش تقسیم می‌شود و تغییرات شار حرارتی بر روی هر یک از این بخش‌ها به صورت ثابت یا یک چندجمله‌یی با ضرایب تابع زمان تقریب می‌شود. درجه‌ی چندجمله‌یی به تخمین اولیه‌ی تحلیل‌گر از تغییرات شار حرارتی بستگی دارد.

بنابراین تابع $q(s,t)$ در رابطه‌ی ۳ را می‌توان چنین نوشت:

$$q(s,t) = \sum_{k=1}^P \phi_k(s,t), \quad (19)$$

که در آن ϕ_k بر روی k^m بخش یک چندجمله‌یی از مرتبه‌ی m_k به صورت زیر است:

$$\phi_k(s,t) = a_k(m_k) s^{m_k} + a_k(m_k - 1) s^{m_k - 1} + \dots + a_k(0) s_k < s < s_{k+1}, \quad (20)$$

و در بقیه‌ی نقاط برابر صفر انتخاب می‌شود.

در این حالت تعداد کل مجهولات از رابطه‌ی ۲۱ به دست می‌آید:

$$m = \sum_{k=1}^P m_k + P \quad (21)$$

با استفاده از تعاریف بالا، بردار شار حرارتی مجهول را می‌توان چنین نوشت:

$$[q]_{n \times 1} = [C]_{n \times m} [A]_{m \times 1} \quad (22)$$

که در آن A ماتریس ضرایب مجهول است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T = [A(1), A(2), \dots, A(P)] \quad (23 \text{ - الف})$$

$$A^T(K) = [a_k(0), \dots, a_k(m_k)] \quad (23 \text{ - ب})$$

و ماتریس C را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۲۰ محاسبه کرد.

مجموع مربعات خطا را به فرم ماتریسی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S = [Y - (T(q^*) + ZC(A - A^*))]^T W [Y - (T(q^*) + ZC(A - A^*))] \quad (24)$$

با کمینه کردن S نسبت به ضرایب مجهول A داریم:

$$A = A^* + [(Z^T W Z) C]^{-1} Z^T W (Y - T^*), \quad (25)$$

رابطه‌ی بالا را به صورت متوالی می‌توان برای تخمین ضرایب مجهول به کار برد که با استفاده از این ضرایب و رابطه‌ی ۲۲ شار حرارتی تخمین زده می‌شود.

مؤلفه‌ی شار حرارتی مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که حساسیت حل نسبت به خطاهای اندازه‌گیری با افزایش فاصله‌ی دماسنج‌ها نسبت به سطح فعال افزایش می‌یابد که این مسئله به دلیل افزایش اثرات میرایی^{۱۱} و تأخیر^{۱۲} است. برای چیدمان C۱ نتایج تا دامنه‌ی خطای ($d=2 \times 10^{-3}$) دارای دقت قابل قبولی است ولی برای چیدمان C۲ که دماسنج‌ها نزدیک به سطح فعال‌اند، نتایج تا ($d=0/04$) قابل قبول هستند. برای دامنه‌ی خطای اندازه‌گیری ($d=0/1$) خطا به میزان قابل ملاحظه‌ی افزایش یافته و نتایج مطلوب نیست. نتایج حل مستقیمی که برای شبیه‌سازی انجام گرفته است، بیانگر بیشینه‌ی دمای ۲/۱۸ است که به این مفهوم است که خطای ($d=0/1$) برابر ۵٪ بیشینه‌ی دما است. این میزان دامنه‌ی خطا در شروع حل که دما در حدود ۱/۰ است حدود ۱۰٪ دمای اندازه‌گیری است که خطای بالایی است. بنابراین خطای بالای تخمین برای این دامنه‌ی خطای اندازه‌گیری دور از انتظار نیست.

اثر تعداد گام‌های زمانی آینده "r" در جدول ۳ بررسی شده است. مشاهده می‌شود که برای خطای بالای اندازه‌گیری ($d=0/1$) نتایج با افزایش تعداد گام‌های زمانی آینده بهبود می‌یابد ولی این بهبود برای ($d=0/02$) محسوس نیست. اثر افزایش این پارامتر کاهش حساسیت دماسنج به خطاهای اندازه‌گیری است ولی افزایش آن باعث افزایش خطای تعیین^{۱۳} می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری کرد که مقدار بهینه‌ی تعداد گام‌های آینده بستگی به میزان خطای اندازه‌گیری دارد. در بسیاری از مسائل نیاز به استفاده از تعداد بیشتری مؤلفه برای تخمین تغییرات مکانی شار حرارتی است.

جدول ۱. اثر خطاهای اندازه‌گیری بر روی حل. مثال ۱. چیدمان دماسنج‌ها C۱. ($\Delta t=1/6, r=15$)

d	0	0/002	0/02	0/04	0/1
η_r	2/85	4/21	26/78	52/62	126/26

جدول ۲. اثر خطاهای اندازه‌گیری بر روی حل. مثال ۱. چیدمان دماسنج‌ها C۲. ($\Delta t=1/6, r=10$)

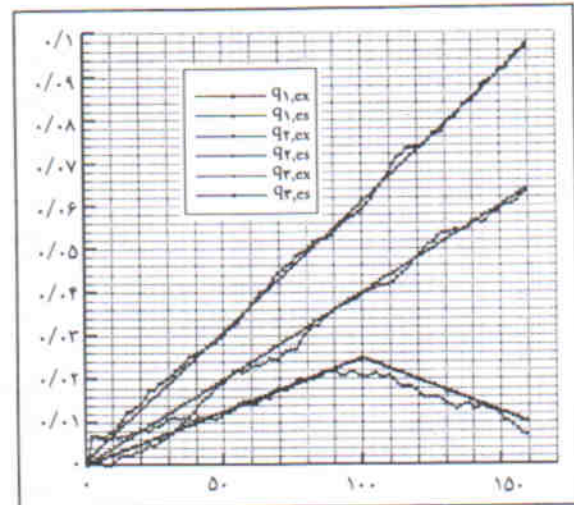
d	0	0/002	0/02	0/04	0/1
η_r	2/41	2/48	4/21	6/98	16/01

جدول ۳. اثر تعداد گام‌های زمانی آینده بر روی حل. مثال ۱. چیدمان دماسنج‌ها C۲. ($\Delta t=1/6$)

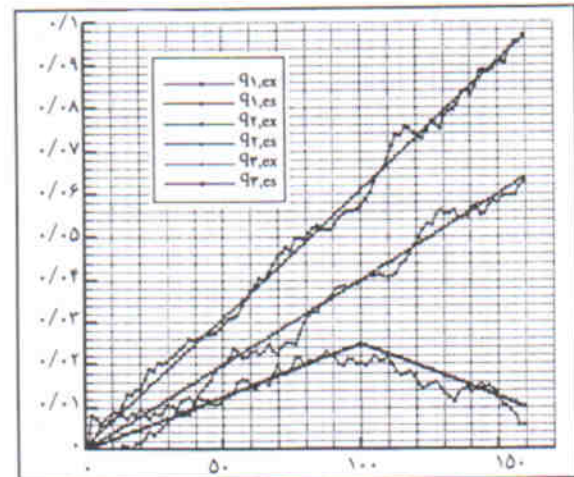
d	0/1			0/2			
	r	8	10	15	8	10	15
η_r		18/21	16/01	11/82	4/28	4/21	4/60

زمان در شکل ۳ نشان داده شده، مدل شده است. دو چیدمان مختلف C۱ و C۲ برای دماسنج‌ها در نظر گرفته شده که در C۱ دماسنج‌ها در روی یکی از سطوح غیرفعال، روبروی سطح فعال قرار گرفته‌اند ولی در C۲ دماسنج‌ها نزدیک به سطح فعال قرار داده شده‌اند. ماتریس "C" در رابطه‌ی ۲۲ را می‌توان به آسانی، با در نظر گرفتن سه بخش ($p=3$) با توزیع ثابت شار حرارتی محاسبه کرد.

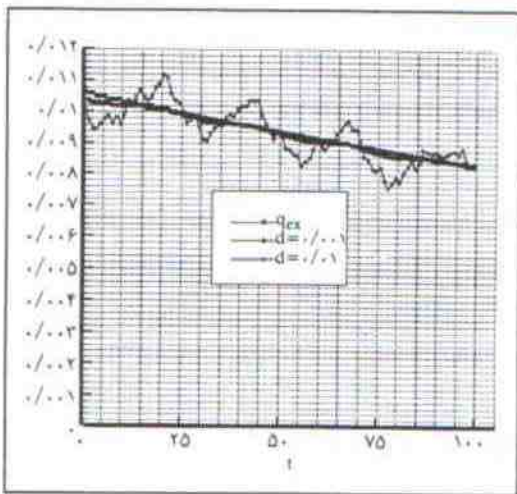
مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی برای مقادیر ($d=0/02, 0/04$) و با استفاده از چیدمان C۲ که در آن دماسنج‌ها نزدیک به سطح فعال است در شکل‌های ۳ و ۴ مقایسه شده‌اند. نمودارها بیانگر دقت کافی در تخمین‌ها هستند. در جداول ۱ و ۲ مقادیر درصد خطای نسبی برای دو چیدمان دماسنج‌ها و برای دومین



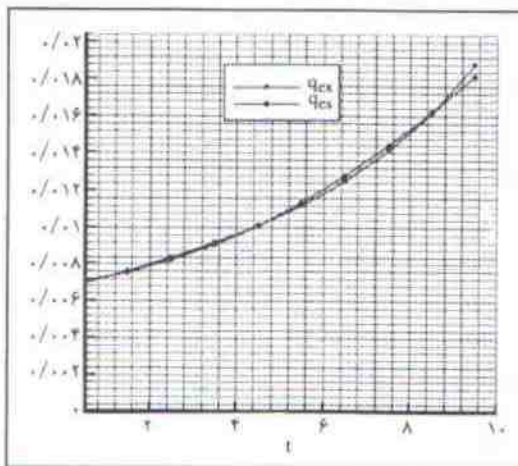
شکل ۳. مقایسه‌ی مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی برای مثال ۱. ($\Delta t=1/6, r=10, d=0/02$)



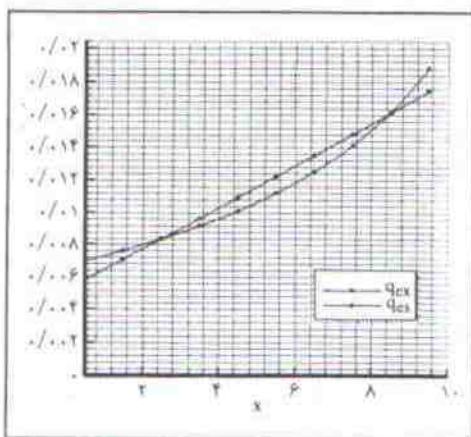
شکل ۴. مقایسه‌ی مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی برای مثال ۱. ($\Delta t=1/6, r=10, d=0/04$)



شکل ۶. مقایسه‌ی مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی بر حسب زمان. $(\Delta t=1/n, \tau=12, x=0.1)$



شکل ۷. مقایسه‌ی مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی بر حسب مکان. $(\Delta t=1/n, \tau=12, d=10^{-2}, x=20)$



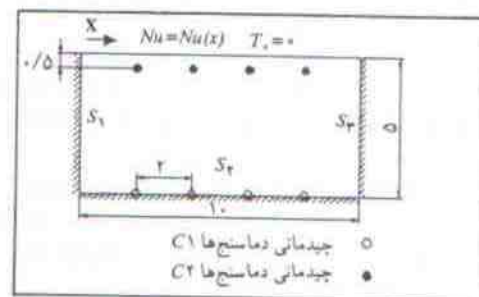
شکل ۸. مقایسه‌ی مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی بر حسب مکان. $(\Delta t=1/n, \tau=12, d=10^{-2}, x=20)$

مشکلی که در این نوع مسائل به وجود می‌آید ایجاد وابستگی خطی بین ضرایب حساسیت در مواردی است که دماسنج‌ها در فاصله‌ی دور از سطح فعال قرار گرفته‌اند. و این بدان معناست که دماسنج قادر به تفکیک تغییرات شار حرارتی در دو المان مرزی که در همسایگی هم قرار گرفته‌اند نیست. به عنوان نمونه در یکی از بررسی‌های انجام شده^[۱۴]، حتی در صورت خطای اندازه‌گیری معادل ۰.۰۱٪ دمای بیشینه که خطای بسیار کوچکی است امکان تخمین شار حرارتی با استفاده از چیدمان دماسنج‌ها در فاصله‌ی دور از سطح فعال نبود. در مثال ۲ یک روش برای بهبود حل در این نوع مسائل ارائه شده است.

مثال ۲

در این مسئله نشان داده شده است که چگونه یک چندجمله‌یی می‌تواند برای کاهش تعداد مؤلفه‌های شار حرارتی، و در نتیجه کاهش حساسیت حل به محل قرارگیری دماسنج‌ها به کار رود. هندسه و محل قرارگیری دماسنج‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطوری که مشاهده می‌شود، این مسئله مشابه مثال قبلی است ولی در سطح ۵۴ از شرط مرزی روبین استفاده شده که برای محاسبه‌ی ضریب جابه‌جایی آن از روابط مربوط به برخورد یک جت آزاد با یک سطح استفاده شده است.^[۱۹] برای تقریب زدن تغییرات شار حرارتی بر روی سطح فعال از یک چندجمله‌یی درجه دوم استفاده شده است. بنابراین تعداد مؤلفه‌های مکانی شار حرارتی "n" برابر ده و تعداد مجهولات "m" برابر سه است. همچنین ماتریس "C" در رابطه‌ی ۲۲ را می‌توان به آسانی یافت.

در شکل ۶ مقادیر تخمینی و دقیق شار حرارتی در نقطه‌ی $(x=4/5)$ و برای چیدمان C۲ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای خطای $(d=0.001)$ مقادیر دقیق و تخمینی شار حرارتی بسیار نزدیک است. به ازای $(d=0.01)$ کمی نوسان مشاهده شده ولی دقت هنوز کافی به نظر می‌رسد. توزیع مکانی شار حرارتی تخمینی و دقیق برای دو دامنه‌ی خطا در شکل ۷ و ۸ مقایسه شده است. نتایج حاکی از دقت



شکل ۵. هندسه و شرایط مرزی در مثال ۲.

جدول ۴. اثر خطاهای اندازه‌گیری بر روی حل، مثال ۲، چیدمان دماسنج‌ها C۱.
($\Delta t = 1/0, \tau = 12$)

d	۰	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۵
η	۵/۶۸	۷/۷۸	۵۳/۹	۱۰۷/۴	۲۶۸/۲

جدول ۵. اثر خطاهای اندازه‌گیری بر روی حل، مثال ۲، چیدمان دماسنج‌ها C۲.
($\Delta t = 1/0, \tau = 12$)

d	۰	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۵
η	۰/۷۲	۰/۹۷	۵/۷۹	۱۱/۴۱	۲۸/۳۴

مناسب است. درصد خطای نسبی برای دو چیدمان دماسنج‌ها در جداول ۴ و ۵ آورده شده است. مجدداً مشاهده می‌شود که روش حاضر برای تخمین شار حرارتی در مسائلی که دماسنج‌ها دور از سطح فعال قرار گرفته‌اند و خطای اندازه‌گیری بالاست، مناسب نیست.

نتیجه‌گیری

یک روش براساس استفاده از روش‌های تقابل دوگانه‌ی اجزاء مرزی و تخمین توابع متوالی برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی به کار گرفته شد. همچنین فرمول‌بندی جدیدی از روش تخمین توابع متوالی براساس استفاده از چندجمله‌ی‌ها ارائه شد. از

بررسی مثال‌های عددی حل شده نتایج زیر به دست آمده است.
۱. نتایج عددی نسبتاً رضایت‌بخش بوده، حاکی از این است که روش تقابل دوگانه‌ی المان‌های مرزی همراه با تخمین توابع متوالی را می‌توان به‌عنوان یک ترکیب جدید برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی به کار برد.

۲. استفاده از چندجمله‌ی‌ها برای تخمین تغییرات مکانی شار حرارتی مجهول باعث کاهش حساسیت حل به محل دماسنج‌ها می‌شود، گرچه در این مورد به مطالعه‌ی بیشتری نیاز است.

۳. در دو مسئله‌ی مورد بررسی قرار گرفته مشخص شد که روش دارای کارایی لازم برای تخمین شار حرارتی در شرایطی است که دماهای اندازه‌گیری شده دارای حداکثر ۲٪ خطا بوده و دماسنج‌ها نزدیک به سطح فعال باشند. در مواردی که دماسنج‌ها در فاصله‌ی دورتر قرار گرفته‌اند، حساسیت روش به خطاهای اندازه‌گیری به شدت افزایش می‌یابد. در این حالت نیاز به دماهایی با خطاهای اندازه‌گیری کمتر است.

۴. انتخاب تعداد گام‌های زمانی آینده در روش تخمین توابع متوالی بستگی به دامنهی خطای اندازه‌گیری دارد. با افزایش خطای اندازه‌گیری نیاز به افزایش تعداد گام‌های زمانی آینده به‌منظور پایدار کردن حل است.

پانویس

1. Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)
2. Successive Functions Estimate Method (SFEM)
3. regularization
4. Time Dependent Boundary Element Method (TDBEM)
5. tikhonov regularization
6. whole domain
7. sequential
8. temporary
9. alternative direction implicit
10. grid independency
11. damping
12. lagging
13. deterministic

منابع

1. Kurpisz, K., and Nowak, A.J., "Inverse thermal problems", Computational Mechanics publications, Southampton, USA (1995).
2. Lesnic, D., Elliot, L., and D.B. Ingham., "Application of the Boundary element method to inverse conduction problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **39** (7), pp 1503-1517 (1996).
3. Ramachandran, P.A. "Boundary Element Method in Transport

- Phenomena", Computational Mechanics Publication (1994).
4. Pasquetti, R., Caruso, A., and Wrobel, L.C., "Transient problems using time-dependent fundamental solution", Chapter-2 Boundary Element Methods in Heat Transfer, Editors: L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Boston (1992).
5. Brebbia, C.A., and Nowak, A.J., "Solving heat transfer problems by the Dual Reciprocity BEM", Chapter-1, Boundary Element Methods in Heat Transfer, Editors: L.C. Wrobel and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Boston (1992).
6. Wrobel, L.C., and Brebbia, C.A., "The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **65**, pp 147-164 (1987).
7. Singh, K.M., and Tanaka, M., "Dual reciprocity boundary element analysis of nonlinear diffusion: temporal discretization", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, pp 419-433 (1999).
8. Kurpisz, A., and Nowak, J., "BEM approach to inverse heat conduction problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*", **10**, pp 291-297 (1992).
9. Pasquetti, R., and Niliot, C., Le. "Boundary element method

- for solving inverse heat conduction problems: Application to a bidimensional transient numerical experiment", *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, **20**, pp 169-189 (1991).
10. Huang, C.H. and Chen, C.W., "A boundary-based inverse problem in estimating transient boundary conditions with conjugate gradient method" *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **42**, pp 943-965 (1998).
 11. Smochart Chantasirwan, "An algorithm for solving multi dimensional inverse heat conduction problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **44**, pp 3823-3832 (2001).
 12. Krishna M. Singh, Masataka Tanaka, "Dual reciprocity boundary element analysis of inverse heat conduction problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, pp 5283-5295 (2001).
 13. Krishna M. Singh, Manjeet S. Kalra, "Time integration in the dual reciprocity boundary analysis of transient diffusion", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **18**, pp 73-102 (1996).
 14. Beck, J.V., Blackwell B. and Haji-Shiekh, "A. Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **39**, (17), pp 3649-3657 (1996).
 15. Dowding, K.J. and Beck, J. V. "A sequential gradient method for the invrse heat conduction problem (IHCP)", *ASME J. of Heat Transfer*, **121**, pp 300-306 (1999).
 16. Beck, J.V. "Surface heat flux determination using an integral method", *Nucl. Engng Des.* **7**, pp 170-178 (1968).
 17. Beck, J.V. B. Blackwell C.R., Clair, St. *Inverse heat conduction: Ill-Posed problems*, Wiley Intersc., New York (1985).
 18. Osman, A.M. Dowding K.J. and Beck, J.V. "Numerical solution of the general Two-dimensional inverse heat conduction problem (IHCp)", *ASME J. of Heat Transfer*, **119**, pp 38-45 (1997).
 19. Incropera, F.P. and Dewit, D.P. *Introduction to Heat Transfer*, Fourth ed., John Wiley (2001).