

شناسایی سیستم‌ها در نرم بی‌نهایت (H_∞)

مجید محمدی مقدم (استادیار)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

یوسف عباسی (مربی)

مجتمع دانشگاهی هوایی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

در این نوشتار یک الگوریتم خطی و یک الگوریتم غیرخطی برای شناسایی سیستم‌ها در فضای H_∞ ارائه شده است. کران‌های خطا که برای هر کدام از الگوریتم‌ها به دست آمده نشان می‌دهند که الگوریتم خطی همگرایی مقاوم ندارد ولی رشد واکرابی آن متناسب با $\log(n)$ است (درجه‌ی مدل است). الگوریتم غیرخطی همگرایی مقاوم دارد و کران بدترین حالت خطای شناسایی (در نرم H_∞) برای آن به دست آورده شده است. الگوریتم خطی ساده‌تر از الگوریتم‌های غیرخطی است ولی به علت نداشتن خاصیت همگرایی مقاوم، در طراحی کنترل مقاوم که به همگرایی مقاوم نیاز دارد، کاربردی ندارد. اما چون این الگوریتم در درجه مدل‌های پایین‌تر عملکرد خوبی دارد، باید قبل از به‌کارگیری آن، با استفاده از اطلاعات قبلی در مورد سیستم مورد شناسایی، مرز واکرابی را مشخص ساخت. الگوریتم غیرخطی با وجود داشتن محاسبات طولانی و پیچیده دارای خاصیت همگرایی مقاوم بوده و متناسب با خواسته‌های طراحی کنترل مقاوم است. همچنین این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم خطی (وقتی که هنوز به مرز واکرابی نرسیده است) از خطای شناسایی کمتری برخوردار است.

مقدمه

وجود نامعینی^۱ ساختاری و ناساختاری، و اغتشاشات ناخواسته در یک سیستم موجب عدول عملکرد آن از محدوده‌ی مطلوب می‌شود. نامعینی ساختاری معمولاً از عدم اطلاع دقیق از مقادیر عددی پارامترهای سیستم، و نامعینی غیرساختاری از دینامیک‌های مدل تشده ناشی می‌شوند. در عمل برای یک سیستم فیزیکی واقعی، هر دو نوع نامعینی وجود دارد.

طراحی کنترل برای یک سیستم دینامیکی نیازمند مدلی است که بتواند خصوصیات آن سیستم را توصیف کند. اما اغلب به دلیل پیچیدگی‌های زیاد پدیده‌های فیزیکی، مانند نیروهایی که به وسیله‌ی سطوح کنترل نصب شده در بال و دم هواپیمای در حال حرکت به هواپیما وارد می‌شود، دانش و معلومات موجود در علوم مختلف نمی‌توانند توصیف قابل قبولی از دینامیک دستگاه مورد کنترل ارائه کند. همچنین گاهی کار با یک سیستم واقعی هزینه‌ی زیادی به همراه دارد و اگر بررسی رفتار سیستم در مواردی مورد نیاز باشد، استفاده از مدل ریاضی ممکن است خیلی کارآمد باشد.

شناسایی سیستم، روشی است که بر پایه‌ی آزمایش استوار است. در این روش دستگاه به وسیله‌ی سیگنال‌های ورودی تحریک شده و پاسخ آن ثبت می‌شود. سپس این داده‌ها تجزیه می‌شوند تا مدل ریاضی حاصل شود. عملیات ساختن مدل‌های ریاضی و تخمین پارامترهای مجهول دستگاه از داده‌های آزمایشگاهی و اطلاعات

قبلی^۲ را شناسایی سیستم می‌نامند. امروزه مدل‌های ریاضی علاوه بر کاربردهای مهندسی در علوم دیگر — نظیر اقتصاد، پزشکی، علوم انسانی، بوم‌شناسی و کشاورزی — نیز به کار گرفته می‌شوند. تاکنون تلاش‌های زیادی در زمینه‌ی شناسایی سیستم‌ها صورت گرفته است و به مرور زمان، بسته به نیازمندی‌های مختلف، راهکارهای مختلفی ارائه شده است.^{۱-۳}

اما لزوم طراحی کنترل مقاوم و گسترش آن ایجاب کرد که روش‌های شناسایی سیستم‌ها نیز متناسب با آنها تغییر یابند، و یک روش شناسایی جدید، سازگار با طراحی کنترل مقاوم ارائه شود. اساس کار این است که کنترلی که برای یک سیستم ناشناخته طراحی می‌شود باید قادر باشد نه تنها حالت اسمی، بلکه بدترین حالت عدول سیستم از حالت اسمی را نیز کنترل کند. بنابراین در هر مدل ریاضی که روش شناسایی سیستم سازگار با طراحی کنترل مقاوم را ارائه می‌کند باید انحراف از حالت اسمی نیز در نظر گرفته شود. اندازه‌گیری عدم قطعیت مدل اسمی یک دستگاه ناشناخته به وسیله‌ی نرم بی‌نهایت (H_∞)، خواسته‌های طراحی کنترل مقاوم را که قبلاً ذکر شد برآورده می‌کند. در زمینه‌ی شناسایی سیستم‌ها در H_∞ عده‌ی زیادی فعالیت داشته‌اند و از سال ۱۹۸۹ مقاله‌های متعددی در این زمینه ارائه شده است.^{۴-۶} در اکثر این مقالات فرض شده است که سیستم مجهول پایدار، خطی نامتغیر با زمان^۲، علی^۴، تک‌ورودی و تک‌خروجی (SISO) است. به‌طور کلی می‌توان الگوریتم‌های شناسایی را به دودسته‌ی

فرموله کردن مسئله

فرض می‌شود که H_∞، نماد فضای هاردی توابع تحلیلی و کران‌دار در یک دیسک واحد باز D^A باشد. برای هر تابع F ∈ H_∞، نرم H_∞ تابع F چنین تعریف می‌شود:

$$\| \hat{F} \|_{\infty} = \sup \{ |F(z)| : z \in D \} \quad (1)$$

همچنین فرض می‌شود که سیستم مورد شناسایی یک سیستم پایدار، زمان‌گسسته، خطی، بدون تغییر با زمان، تک‌ورودی و تک‌خروجی با تابع تبدیل $\hat{h}(z)$ باشد، و پاسخ فرکانسی \hat{h} پیوسته باشد، به عبارت دیگر \hat{h} به دیسک جبری زیر تعلق دارد:

$$A = \{ \hat{F} : \hat{F} \in H_{\infty} \text{ و } \hat{F} \text{ روی دایره واحد پیوسته است} \} \quad (2)$$

قسمت اعظم توابع تبدیل در مجموعه‌ی A عضو مجموعه‌ی زیر سیستم‌های نمایی پایدار $H(D_{\rho}, M)$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود [6]:

$$\{ f : |f| < M, \forall z \in D_{\rho} \text{ در } D_{\rho} \text{ تحلیلی است} \} \quad (3)$$

حال بحث شناسایی سیستم‌ها در H_∞ توصیف می‌شود: علاوه بر فرضیات گذشته فرض می‌شود که: $\hat{h} \in H(D_{\rho}, M) \subseteq A$ باشد. \hat{h} در واقع تابع تبدیل سیستم است و فرض می‌شود که این تابع وجود داشته باشد.

داده‌ها: تعداد N داده از پاسخ فرکانسی همراه با اغتشاش که از یک آزمایش به دست آمده و با نماد زیر نشان داده می‌شود:

$$E^N(\hat{h}, \hat{\eta}) = \{ E_k^N(\hat{h}, \hat{\eta}) = \hat{h}(e^{j2\pi(k-1)/N}) + \hat{\eta}_k \} \quad (4)$$

به طوری که $\hat{\eta}_k \in B_N(\epsilon), 1 \leq k \leq N$ باشد.

$$B_N(\epsilon) = \{ \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_N, | \hat{\eta}_k | < \epsilon, k=1, 2, 3, \dots \} \quad (5)$$

خواسته‌ها: الگوریتم A_N که بتواند با استفاده از داده‌های $E^N(\hat{\eta}, \hat{h})$ مدل $\hat{h}_{id}^N \in H_{\infty}$ را به صورتی به دست آورد که بدترین حالت خطای شناسایی آن مدل یعنی

$$e_N(M, \rho, \epsilon) = \sup \left\{ \left\| \hat{h} - \hat{h}_{id}^N \right\|_{\infty} : \hat{\eta} \in B_N(\epsilon), \hat{h} \in H(D_{\rho}, M) \right\} \quad (6)$$

در شرط زیر صدق کند.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} e_N(M, \rho, \epsilon) = 0 \quad (7)$$

الگوریتم‌های هماهنگ⁵ و الگوریتم‌های ناهماهنگ⁶ تقسیم کرد. الگوریتم‌های هماهنگ، الگوریتم‌هایی هستند که به طور صریح از اطلاعات قبلی در مورد مرتبه‌ی سیستم مورد شناسایی استفاده می‌کنند ولی الگوریتم‌های ناهماهنگ به طور صریح از اطلاعات قبلی استفاده نمی‌کنند. الگوریتم‌های خطی هماهنگ با بودن بدترین حالت اغتشاش کراندار همگرا نمی‌شوند، ولی سرعت واگرایی بسیار کمی دارند و اگر n درجه‌ی مدل شناسایی باشد سرعت رشد با Log(n) متناسب است. [7] همچنین یک الگوریتم غیرخطی که به طور مقاوم همگراست قابل ارائه است. [8] نقش اولیه شناسایی سیستم‌ها در طراحی کنترل کاهش عدم قطعیت است. بعد از آن که عدم قطعیت کاهش یافت می‌توان حداقل یک کنترل‌کننده‌ی مقاوم پیدا کرد تا بتواند با وجود باقیمانده‌ی عدم قطعیت، عملکرد مطلوب را به دست آورد. در واقع شناسایی سیستم به منظور استفاده در طراحی کنترل، زیر مجموعه‌ی از شناسایی سیستم‌ها است که شناسایی کنترل‌محور سیستم‌ها⁷ نام دارد. [9]

در نوشتار حاضر نحوه‌ی استخراج یک الگوریتم خطی و یک الگوریتم غیرخطی برای شناسایی سیستم‌ها در H_∞ ارائه شده و سپس با استفاده از مثال‌های مختلف توانایی‌های روش‌های فوق و نیز معایب و مزایای آنها بررسی شده است.

الگوریتم‌های خطی و غیرخطی ارائه شده در این نوشتار نیاز چندانی به داشتن اطلاعات قبلی در مورد سیستم ندارند و در مقایسه با دیگر الگوریتم‌های ارائه شده که برای شناسایی سیستم به دانسته‌های اولیه نیاز دارند [10, 11, 12, 13, 14]، سیستم مجهول را بدون نیاز به آنها شناسایی می‌کنند همچنین فرایند شناسایی این روش مطابق با نیازهای طراحی کنترل مقاوم است.

مفاهیم پایه

در این بخش مفاهیم و نمادهای ریاضی که در قسمت‌های بعد از آنها استفاده خواهد شد معرفی شده‌اند.

R: مجموعه‌ی اعداد حقیقی

C: مجموعه‌ی اعداد مختلط

$$D = \{ z \in C \mid |z| < 1 \}$$

$$\partial D = \{ z \in C \mid |z| = 1 \}$$

$$D_{\rho} = \{ z : |z| < \rho \}, \rho > 1$$

$$L_{\infty} = \{ f : \partial D \rightarrow C \mid f \text{ اندازه پذیر باشد و } \| f \|_{\infty} = \sup_{z \in \partial D} |f(z)| < \infty \}$$

$$H_{\infty} = \{ f : \partial D \rightarrow C \mid f \text{ در } D \text{ تحلیلی بوده و } \| f \|_{\infty} = \sup_{z \in \partial D} |f(z)| < \infty \}$$

نامساوی بالا بیانگر این است که خطای شناسایی به دو بخش محدود می‌شود:

بخش اول مربوط به خطای تقریب در حالت بدون اغتشاش است به صورتی که وقتی $N \geq n \rightarrow \infty$ این خطا به سمت صفر میل می‌کند^[۱۱] و بخش دوم مربوط به اغتشاش‌های است که در پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده در رابطه‌ی ۴ وارد شده‌اند.

قضیه: اگر برای M, ρ مقادیر ثابتی اختیار شود و با فرض اینکه $\rho > 1$ و $M > 0$ مجموعه‌ی سیستم‌های $H(D_\rho, M)$ در نظر گرفته شود، و $n \leq N$ کران اغتشاش باشد آنگاه یک عدد ثابت مطلق C مستقل از \hat{h}, N, n وجود دارد به طوری که بدترین حالت خطای شناسایی که در رابطه‌ی ۶ تعریف شده است را در نامساوی زیر صدق می‌کند:^[۱۷]

$$e_N(M, \rho, \epsilon) \leq \frac{\gamma M \rho^{-N+1}}{\rho-1} + \frac{1}{n} \frac{M \rho(1-\rho^{-n})}{(\rho-1)^2} + \left(\frac{1}{\pi} \text{Log}(n) + c\right) \epsilon \quad (16)$$

قضیه‌ی بالا نشان می‌دهد وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و ϵ به صفر همگرا می‌شود، بدترین حالت خطای سیستم به سمت صفر همگرا نمی‌شود. ولی سرعت واگرایی خیلی آهسته بوده و برابر $\frac{1}{\pi} \text{Log}(n)$ است.

الگوریتم غیرخطی با همگرایی مقاوم

در این بخش الگوریتم خطی بخش قبل اصلاح می‌شود. در الگوریتم خطی از سری‌های فوریه‌ی یک سوپه^{۱۱} استفاده شد ولی اصلاح، بر اساس استفاده از سری فوریه‌ی دو سوپه^{۱۲} خواهد بود. سری فوریه‌ی دو سوپه، زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که استفاده از مقدار یک سیگنال در زمان‌های منفی مد نظر باشد.^[۱۴] همانند رابطه‌ی ۴ داده‌های پاسخ فرکانسی سیستم مجهول به صورت زیر داده شده است:

$$E_k^N(\hat{h}, \hat{\eta}) = \left\{ \hat{h} (e^{j 2\pi(k-1)/N}) + \hat{\eta}_k \right\} \quad k=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

برای سادگی فرض می‌شود که N زوج بوده و $L = \frac{N}{2}$ را به یک تابع تناوبی گسسته تعمیم می‌دهیم:

$$E_k^N \pm m_N(\hat{h}, \hat{\eta}) = E_k^N(\hat{h}, \hat{\eta}) \quad k=1, 2, \dots, N, m \in I$$

I مشخصه‌ی مجموعه‌ی اعداد صحیح است.

الگوریتم شناسایی خطی

فرض می‌شود که $\hat{h} \in A$ تابع تبدیل سیستم مجهول به صورت زیر باشد:

$$\hat{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}_k z^k, \hat{h}_k \in R \quad (8)$$

چون $\hat{h} \in A$ ، میانگین سزارو (میانگین حساسی) رابطه‌ی ۸ را می‌توان چنین نوشت:^[۱۲]

$$\hat{h}_{C;n} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \hat{h}_k z^k \quad (9)$$

که $\hat{h}_{C;n}$ در H_∞ به \hat{h} میل می‌کند یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \hat{h}_{C;n} - \hat{h} \right\|_\infty = 0 \quad (10)$$

$$a_k = 1 - \frac{|k|}{n} \quad -n \leq k \leq n \quad (11)$$

با توجه به رابطه‌ی ۴ می‌توان نوشت:

$$E_k^N(\hat{h}, \hat{\eta}) = \left\{ \hat{h} (e^{j 2\pi(k-1)/N}) + \hat{\eta}_k \right\} \quad k=1, 2, \dots, N \quad (12)$$

در N نقطه، عکس تبدیل فوریه‌ی گسسته $E_k^N(\hat{h}, \hat{\eta})$ به صورت زیر به دست می‌آید:^[۱۱]

$$\tilde{h}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} E_{i+1}^N(\hat{h}, \hat{\eta}) W_N^{-ik}, k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

که در آن: $W_N = e^{j 2\pi/N}$

پس مدل شناسایی به صورت ساده، جمع سزارو از درجه‌ی n به شکل زیر است:

$$\hat{h}_{id}^N(z) = \hat{h}_{c;n}^N(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{h}_N(k) z^k \quad (14)$$

این الگوریتم یک الگوریتم خطی است. در ادامه، عملکرد این الگوریتم بررسی می‌شود.

برای بدترین حالت خطای شناسایی، $e_N(M, \rho, \epsilon)$ همان طور که در رابطه‌ی ۶ ذکر شد می‌توان نوشت:^[۱۳]

$$e_N(M, \rho, \epsilon) = \left\{ \left\| \begin{matrix} E; N \\ \hat{h}_{c;n} \end{matrix} \right\|_\infty : \eta \in B_N(\epsilon), \hat{h} \in H(D_\rho, M) \right\} \leq \sup \left\{ \left\| \hat{h} - \hat{h}_{c;n} \right\|_\infty : \hat{h} \in H(D_\rho, M) \right\} + \sup \left\{ \left\| \hat{\eta} \right\|_\infty : \hat{\eta} \in B_N(\epsilon) \right\}. \quad (15)$$

بدترین حالت خطای شناسایی بر روی تمام سیستم‌های مجهول ممکن در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر برای همگرایی تنها کافی بود که با میل کردن n به سمت بی‌نهایت، مقدار خطا به مقدار ثابتی میل کند. ولی برای همگرایی مقاوم علاوه بر شرط فوق باید وقتی که ϵ به سمت صفر میل می‌کند، مقدار خطا به سمت صفر میل کند. نتایج قضیه زیر نشان خواهد داد که الگوریتم غیرخطی به دست آمده به طور مقاوم همگراست.

قضیه: فرض می‌شود $\rho > 1$ و $M > 0$ مقادیر ثابتی باشند و مجموعه سیستم‌هایی که متعلق به $H(D_\rho, M)$ هستند در نظر گرفته شود و \hat{h}_{id}^N مدل شناسایی باشند. بدترین حالت خطای شناسایی از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند: [17]

$$e_N(M, \rho, \epsilon) \leq \frac{3M\rho^{-L+1}}{\rho-1} + \frac{1}{n} \frac{M\rho(1-\rho^{-n})}{(\rho-1)^2} + 2\epsilon \quad (23)$$

با توجه به قضیه‌ی فوق و با توجه به اینکه $N = 2L \geq 2n$ ، می‌توان نوشت:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e_N(M, \rho, \epsilon) = 0$$

$$N \geq 2n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$$

یعنی الگوریتم شناسایی غیرخطی به طور مقاوم همگراست. مدل‌هایی که از الگوریتم‌های شناسایی به دست می‌آیند دارای درجه بالایی می‌باشند و بیشتر مواقع در استفاده از این مدل‌ها می‌توان با تحمل مقداری خطا از مدل‌های فوق، مدل‌هایی با درجات کمتر به دست آورد. این عمل را اصطلاحاً «تلخیص مدل» یا «کاهش درجه‌ی مدل» می‌نامند. در این زمینه روش‌های مختلفی برای مطالعه‌ی بیشتر در دسترس است. [13]

شناسایی پاسخ فرکانسی سیستم

در بخش‌های قبلی ابتدا فرض شد که تابع تبدیل سیستم مورد شناسایی موجود باشد سپس در فرکانس‌های مختلف، پاسخ فرکانسی تابع تبدیل به دست آمده و مقداری اغتشاش به آن اضافه شد تا بدین وسیله یک دستگاه عملی شبیه‌سازی شود (رابطه‌ی ۱۲). در واقع فرض شد که پاسخ فرکانسی سیستم موجود باشد اما برای یک سیستم عملی می‌توان با استفاده از دیگر الگوریتم‌های ارائه شده پاسخ فرکانسی سیستم را به دست آورد. [13]

نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم‌ها الگوریتم خطی

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{h} = \frac{z(z^2+1)}{z^2+2z+5} \quad (24)$$

معکوس تبدیل فوریه‌ی دوسویه‌ی گسسته چنین تعریف می‌شود: [18]

$$\bar{h}_L(k) = \frac{1}{2L} \sum_{i=-L}^{L-1} E_{i+1}^N(\hat{h}, \hat{\eta}) W_N^{-ik},$$

$$K = -L, -L+1, \dots, L-1 \quad (18)$$

که در آن $N = 2L$ و $W_N = e^{j2\pi/N}$ است.

جمع سزارو از درجه‌ی n در رابطه‌ی ۱۸ به شکل زیر است:

$$\hat{h}_{\epsilon; \bar{h}}^{E; L}(z) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} a_k \bar{h}_L(k) z^k \quad n \leq L \quad (19)$$

رابطه‌ی فوق یک تقریب L_∞ برای $E(\hat{h}, \hat{\eta})$ است. [18] همان‌طور که در فرضیات نیز آمده است فرض بر آن است که سیستم مورد شناسایی پایدار است و بنابراین باید به طریقی، نزدیک‌ترین تابع پایدار (متعلق به H_∞) را از تابع به دست آمده در L_∞ به دست آورد. این موضوع در حقیقت صورت مسئله‌ی بهترین تقریب نهاری [13] است. به طور واضح‌تر صورت مسئله‌ی بهترین تقریب نهاری به صورت زیر مطرح می‌شود: با در اختیار داشتن φ متعلق به L_∞ ، تابع g را در H_∞ پیدا کنید به گونه‌ی که $\|g - \varphi\|_\infty$ کمینه شود. [15]

پاسخ مسئله‌ی نهاری به صورت قضیه‌ی بیان می‌شود:

قضیه: فرض کنید $\varphi \in L_\infty$ و عملگر هانکل با H_φ نشان داده شود و دارای بردار بیشینه‌کننده‌ی f باشد. در این صورت، بهترین تقریب منحصر به فرد g متعلق به H_∞ برای φ بر حسب L_∞ ، موجود است که با رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$g = \varphi \cdot \frac{H_\varphi f}{f} \quad (20)$$

تقریب فوق‌ربرای اولین بار آد미ان، آروف و کرین [14] به دست آوردند به همین خاطر این قضیه به نام ایشان نامیده شده است. [15] با استفاده از این قضیه پاسخ مسئله‌ی نهاری ($g \in H_\infty$) به دست آمده است. [13] قضیه: با فرض این که $h \in EA$ ، و نیز \hat{h}_{id}^N پاسخ مسئله‌ی نهاری باشد، آنگاه:

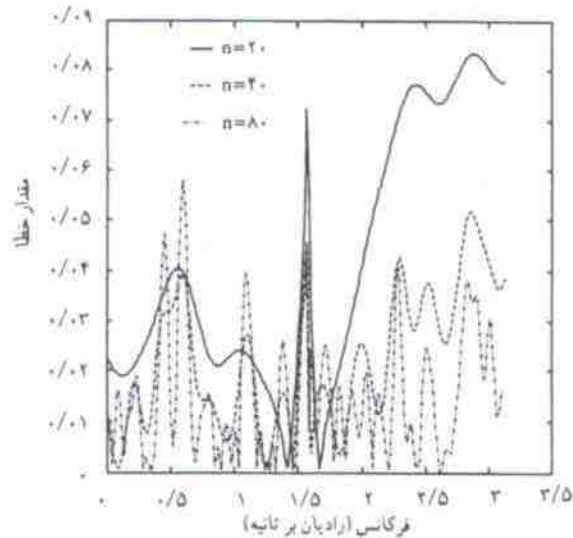
$$e_N(\hat{h}, \epsilon) = \sup \left\{ \left\| \hat{h} - \hat{h}_{id}^N \right\|_\infty : \eta \in B_N(\epsilon) \right\}$$

$$\leq 2\epsilon + a(N, n, \hat{h}) \quad (21)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a(N, n, \hat{h}) = 0$$

$$L \geq n \rightarrow \infty \quad (22)$$

اگر $\epsilon \rightarrow 0$ و $N = 2L \geq 2n \rightarrow \infty$ ، از قضیه‌ی قبلی می‌توان نتیجه گرفت که این الگوریتم برای هر $\hat{h} \in EA$ همگراست. اما این نکته برای نشان دادن همگرایی مقاوم الگوریتم کافی نیست. برای همگرایی مقاوم باید



شکل ۳. نمودار خطای شناسایی الگوریتم خطی.

این شکل نشان می‌دهد که الگوریتم خطی با مقداری خطا $(N=512)$ سیستم را شناسایی کرده و پاسخ بد دو تابع تبدیل خیلی به هم نزدیک‌اند.

برای بررسی دقت الگوریتم، با فرض اینکه $N=512$ باشد در شکل ۳ مقدار خطای الگوریتم شناسایی خطی برای $n=20, 40, 80$ رسم شده است و نشان می‌دهد که با افزایش مقدار n میزان خطا کاهش می‌یابد. مقایسه‌ی نمودار فوق با دیگر نمودار خطای به دست آمده [۷] صحت جواب‌های به دست آمده را اثبات می‌کند. اگر توابع تبدیل رابطه‌ی ۲۴ در حوزه‌ی لاپلاس داده شده باشد، برای تبدیل آن به حالت گسسته می‌توان از روش تاستین استفاده کرد. [۱۳]

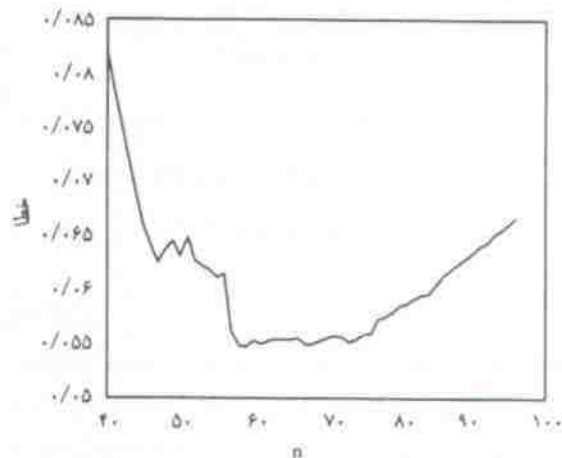
الگوریتم غیرخطی

فرض می‌شود که تابع سیستم به صورت زیر داده شده باشد:

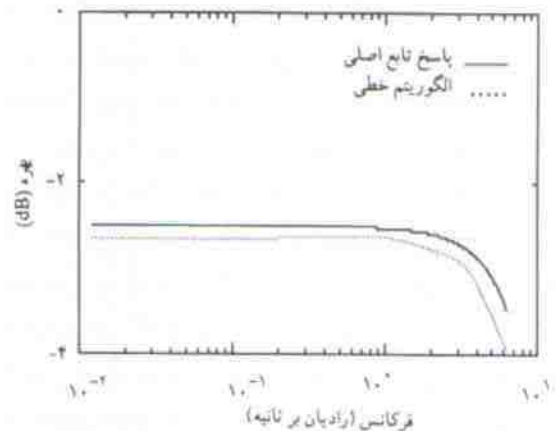
$$\hat{h}(z) = \frac{3(z^2 + 1)}{z^2 + 2z + 5} \quad (25)$$

همچنین فرض می‌شود که $N=512, |e|=0.1$ باشد. در شکل ۴ نمودار بد برای تابع تبدیل فوق و تابع به دست آمده از پاسخ‌های فرکانسی آلوده به اغتشاش توسط الگوریتم خطی رسم شده است. مقایسه‌ی این شکل با شکل ۲ نشان می‌دهد که برای درجه‌ی مدل یکسان ($n=30$) خطای الگوریتم غیرخطی نسبت به خطای الگوریتم خطی کمتر است. همچنین شکل ۵ نمودار خطای شناسایی را برای سه حالت $n=20, n=40, n=80$ نشان می‌دهد.

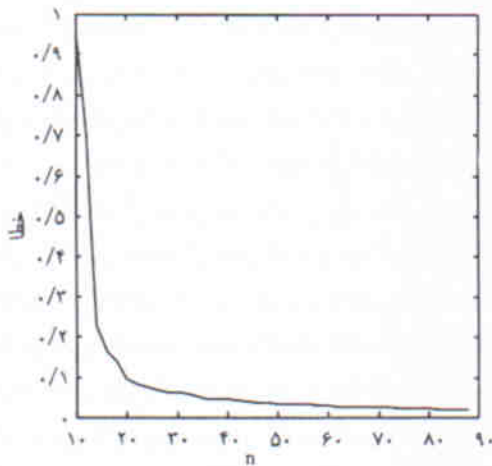
همچنین کران اغتشاش $E=0.1$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به رابطه‌ی ۱۶ می‌توان دریافت که برای کاهش خطا باید N و n اعداد بزرگی انتخاب شوند. البته افزایش N و n باعث کوچک شدن دو کسر اول شده ولی جمله‌ی سوم $(\frac{1}{n} \log(n) + C)$ افزایش می‌یابد، اما چون از n لگاریتم گرفته می‌شود بنابراین برای مقادیر کوچک n این افزایش محسوس نیست ولی وقتی که n و N به اندازه‌ی بزرگ باشند که بتوان از دو جمله‌ی اول صرف‌نظر کرد به دلیل وجود جمله‌ی سوم، با افزایش بیشتر n ، خطا دوباره با آهنگ $\log(n)$ رشد خواهد کرد و در نتیجه مقدار خطا و اگر خواهد شد. در شکل ۱ مقدار بیشینه‌ی خطای هر مرحله برحسب مقدار n رسم شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود ابتدا مقدار خطا کاهش پیدا کرده و سپس بعد از عبور از یک مرحله گذر دوباره مقدار خطا افزایش یافته است، و بنابراین الگوریتم خطی و اگر شده است. در شکل ۲ نمودار بد برای تابع تبدیل رابطه‌ی ۲۴ (خط توپر) و تابع تبدیل به دست آمده توسط الگوریتم خطی برای پاسخ فرکانسی همان تابع تبدیل (خط منقطع) رسم شده است. (در الگوریتم خطی فرض شده است که $n=30$ و $E=0.1$)



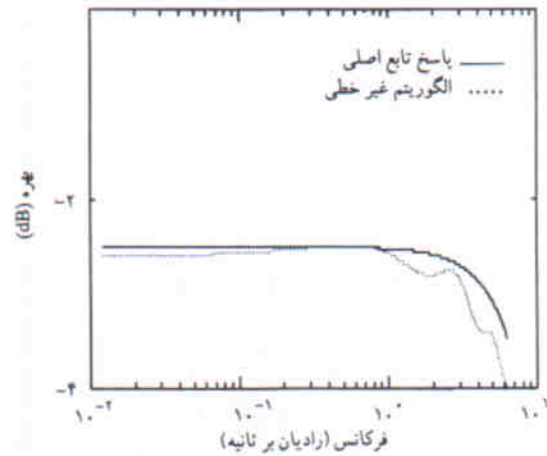
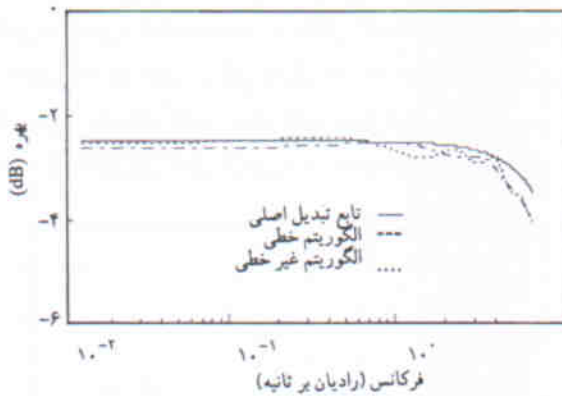
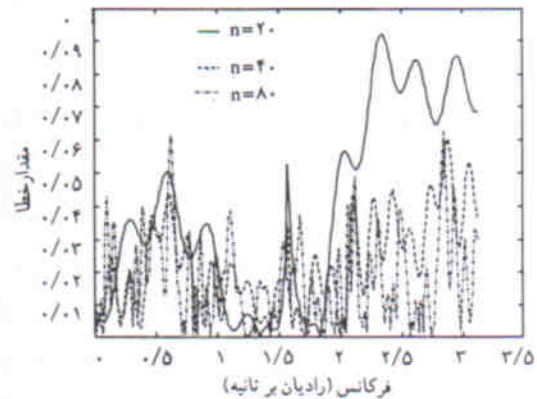
شکل ۴. نمودار خطای الگوریتم خطی نسبت به افزایش درجه‌ی مدل.



شکل ۵. نمودار بد برای الگوریتم خطی ($n=30$).



شکل ۶. نمودار خطای بیشینه نسبت به درجه‌ی مدل برای الگوریتم غیرخطی.

شکل ۴. نمودار بد الگوریتم غیرخطی ($n=30$).شکل ۷. نمودار بد برای $n=40$.

شکل ۵. نمودار خطای شناسایی الگوریتم غیرخطی.

نتیجه‌گیری

۱. روش‌های شناسایی سیستم‌ها با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، مدل ریاضی مربوط به یک پدیده‌ی فیزیکی را به دست می‌آورند که در این نوشتار یکی از روش‌های فوق تحت عنوان «شناسایی سیستم‌ها در H_∞» بررسی شد.

۲. در نوشتار حاضر در مورد هر دو نوع الگوریتم بحث شد. ابتدا ضمن ارائه‌ی یک الگوریتم خطی مشاهده شد که می‌توان با استفاده از جمع سزارو درجه‌ی مدل را نسبت به الگوریتم‌های مشابه خطی به مراتب کمتر کرد (رابطه‌ی ۹). همچنین کران بالایی خطا (بدترین حالت خطای شناسایی) برای روش فوق به دست آورده شد. (رابطه‌ی ۱۶) که با توجه به رابطه‌ی فوق می‌توان پیش‌بینی کرد که با میل کردن n به سمت بی‌نهایت، خطای شناسایی ابتدا کاهش یافته و بعد از عبور از یک مرحله‌ی گذر افزایش می‌یابد و مقدار خطای شناسایی واگرا می‌شود که شکل ۱ مؤید این واقعیت است. اما همان‌طور که ذکر شد با توجه به رابطه‌ی ۱۶ برای n ‌های کوچک با افزایش n مقدار خطا کاهش

در این شکل نیز فرض شده است که تابع تبدیل سیستم مجهول رابطه‌ی ۲۴ باشد. نمودار فوق نشان می‌دهد که مانند حالت خطی، با افزایش مقدار n ، میزان خطا کاهش می‌یابد که با توجه به رابطه‌ی ۲۳ قابل توجیه است.

همان‌طور که پیش‌تر توضیح داده شد لازمی همگرایی مقاوم الگوریتم شناسایی رابطه‌ی ۲۳ است در شکل ۱۶ این موضوع نشان داده شده است. این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش N مقدار خطا به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین الگوریتم غیرخطی همگرای مقاوم است که در مقایسه با شکل ۱ دیده می‌شود که برخلاف الگوریتم خطی، الگوریتم غیرخطی دارای خاصیت همگرایی است که این یکی از مزیت‌های الگوریتم غیرخطی نسبت به الگوریتم خطی است (لازم به توضیح است که نمودار شکل ۶ برای تابع رابطه‌ی ۲۵ به دست آمده است). در شکل ۷ نمودار بد برای تابع رابطه‌ی ۲۵ و تابع تبدیل به دست آمده به وسیله‌ی الگوریتم‌های خطی و غیرخطی رسم شده است و نشان می‌دهد که الگوریتم غیرخطی نسبت به الگوریتم خطی از خطای شناسایی کمتری برخوردار است.

طراحی کنترل مقاوم که همگرایی مقاوم مورد نیاز است این الگوریتم به علت نداشتن خاصیت همگرایی مقاوم قابل به کارگیری نیست. اما چون این الگوریتم در درجات مدل پایین تر دارای عملکرد خوبی است، باید قبل از به کارگیری، با استفاده از اطلاعات قبلی در مورد سیستم مورد شناسایی، مرز واگرایی را مشخص ساخت.

الگوریتم غیرخطی با وجود داشتن محاسبات زیاد و پیچیده دارای خاصیت همگرایی مقاوم بوده و متناسب با خواسته های طراحی کنترل مقاوم است. همچنین این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم خطی (وقتی که هنوز به مرز واگرایی نرسیده است) از خطای شناسایی کمتری برخوردار است (شکل ۲، ۴ و ۷).

۴. با مقایسه ی دو الگوریتم خطی و غیرخطی به سادگی می توان دریافت که الگوریتم خطی خیلی ساده تر از الگوریتم غیرخطی است و محاسبات بسیار کمتری دارد. بنابراین در مواردی که نیاز به همگرایی مقاوم وجود ندارد استفاده از الگوریتم خطی خیلی به صرفه خواهد بود.

می یابد (شکل ۳). در ادامه با استفاده از تبدیل فوریه ی دوسویه یک الگوریتم غیرخطی پیشنهاد شد و اثبات شد که این الگوریتم برخلاف الگوریتم خطی همگرای مقاوم است. به دست آوردن این الگوریتم مستلزم پیدا کردن پاسخ مسئله ی نهاری بود و پیدا کردن پاسخ مسئله ی نهاری مستلزم تجزیه ی مقدار تکین بود (SVD) که مجموع این مسائل باعث شد که، محاسبات نسبت به الگوریتم خطی، دارای حجم گسترده تری باشند. نکته ی دیگر اینکه غیرخطی بودن الگوریتم فوق به دلیل تجزیه ی مقدار تکین و پیدا کردن پاسخ مسئله ی نهاری بود و همچنین کران خطا برای بدترین حالت نیز در رابطه ی ۱۵ به دست آمد که با توجه به رابطه ی فوق قابل پیش بینی بود که الگوریتم غیرخطی مقاوماً همگرا باشد. نمودار مربوط به شکل ۶ نشان داد که با افزایش مقدار n و کاهش اغتشاش مقدار خطا همگرا شده و به سمت صفر میل می کند. در شکل ۵ نیز نشان داده شد که با افزایش مقدار n مقدار بیشینه ی خطا (نرم بی نهایت) کاهش می یابد.

۳. الگوریتم خطی ساده تر از الگوریتم های غیرخطی است. ولی برای

پانوش

1. uncertainly
2. Priori information
3. Time invariant
4. Causal
5. tuned algorithm
6. untuned algorithm
7. Control oriented system identification
8. Open unit disk = {z in C: |z| < 1}
9. Exponentially stable
10. worst-case identification error
11. One-sided Fourier series
12. Two-sided Fourier series
13. Nehari best approximation
14. Adamyan, Arov and Krein (AAK)

منابع

1. Gene, F., Franklin, J., David powell, Michael L. Workman, "Digital control of dynamic system", Addison-Wesley publishing company (1990).
2. Golub, G.H. and Van Loan, C.F. "Matrix computations", Johns-Hopkins University Press (1983).
3. Soderstrom, T., and Stoica, P. "System identification", PrenticeHall Inc. (1989).
۴. حشمتی، علی. «شناسایی پارامترهای دینامیکی سیستم تحریک و تنظیم ولتاژ»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ی برق، دانشگاه صنعتی شریف، (۱۳۷۲).
5. Helmicki, A.J. Jacobsen, C.A. and Nett, C.N. "Control Oriented System Identification: A worst-case / Deterministic

Approach in H_{∞} ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (10) (October 1991).

6. Helmicki, A.J., Jacobson, C.A. and Nett, C.N. "Worst-Case / Deterministic Identification in H_{∞} : the Continuous-Time case", *IEEE Transactions on Automatic control*, 23(5), (May 1992).
7. Gaoxiang Gu, PP. Khargonekar, "Linear and Nolinear algorithms for identification in H_{∞} with error bounds", *IEEE Transaction on Automatic control*, 37(7), (July 1992).
8. Helmicki, A.J., Jacobson, C.A., and Nett, C.N. "Identifacation in H_{∞} : A Robustly convergent, Nolinear Algorithm", *ACC* (1990).
9. Helmicki, A.J., Jacobson, C.A., and Nett, C.N. "Fundamentals of Control Oriented System Identification and their Application for Identification in H_{∞} ", *ACC*, (1991).
10. Hoffman, K. "Banach spaces of Analytic function", Engle Wood Cliff. NJ: Prentice-Hall (1962).
11. Wu, N.E. and Gu, G. "Discrete Fourier Transfrom and H_{∞} Approximation", *IEEE Trans. Automatic*, 35 (1990).
۱۲. رنجبر نسوعی، مهرداد. «شناسایی توابع انتقال یک جسم پرنده (موشک)»، پایان نامه ی کارشناسی ارشد، دانشکده ی فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، (۱۳۷۱).
۱۳. عباسی، یوسف. «شناسایی سیستم ها با استفاده از روش H_{∞} »، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، (۱۳۷۸).
۱۴. حسینی، سید محسن. «تدوین روش حداکثر احتمال در تخمین پارامترهای پروازی هواپیما»، پایان نامه ی کارشناسی ارشد، دانشکده ی هوا فضا و مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، (۱۳۷۶).
۱۵. یانگ، نیکلاس. «مقدمه ی بر فضای هیلبرت»، ترجمه ی دکتر بهمن یوسفی و بهرام صالحی، انتشارات دانشگاه شیراز، (۱۳۷۷).