بررسی اثرات تورّق بر بار بحرانیِ صفحات مواد مرکب لایه‌یی تحت بار برشیِ داخل صفحه

محمدعلی کوچک‌زاده (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

استحکام مواد مرکب لایه‌یی[۱] و به‌خصوص بار بحرانی کمانش آنها بر اثر تورّق[۲] کاهش قابل ملاحظه‌یی پیدا می‌کند. در این نوشتار، تأثیر تورّق بر روی بار بحرانی، تحت بار برشی داخل صفحه، بررسی می‌شود. برای این منظور صفحه‌ی مستطیل شکلی از جنس مواد مرکب لایه‌یی چندسازه‌یی حاوی یک یا چند تورّق در نظر گرفته شده است. تحلیل کمانش با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی اول میندلین، و به‌وسیله‌ی روش اجزاء محدود (حل مسئله‌ی مقدار ویژه) انجام گرفته است. حل این مسئله بدون در نظر گرفتن قیود لازم برای جلوگیری از درهم فرورفتگی لایه‌های جدا شده، منجر به جواب‌های غیر قابل قبول از لحاظ فیزیکی می‌شود. در این نوشتار، راه حل مناسبی برای اعمال قیود مورد نیاز توسط روش تابع جریمه معرفی شده است. نتایج عددی، اثر تعداد، اندازه و عمق تورّق، و شرایط مرزی صفحه بر روی بار بحرانی را نشان می‌دهد.

مقدمه

وجود تورّق در صفحات ساخته شده از مواد مرکب لایه‌یی باعث از دست رفتن استحکام[۳] و سفتی[۴] آنها می‌شود. بار بحرانی حاصل از کمانش در صفحات متحمل نیروی فشاری داخل صفحه از پارامترهایی است که افت آن بر اثر وجود تورّق به‌صورت تجربی و تحلیلی اثبات شده است. خصوصیات مکانیکی صفحاتِ دارای تورّق نیز بر اثر نیروی برشی داخل صفحه افت پیدا می‌کند، اما در این زمینه اطلاعات کافی به‌دست نیامده است.

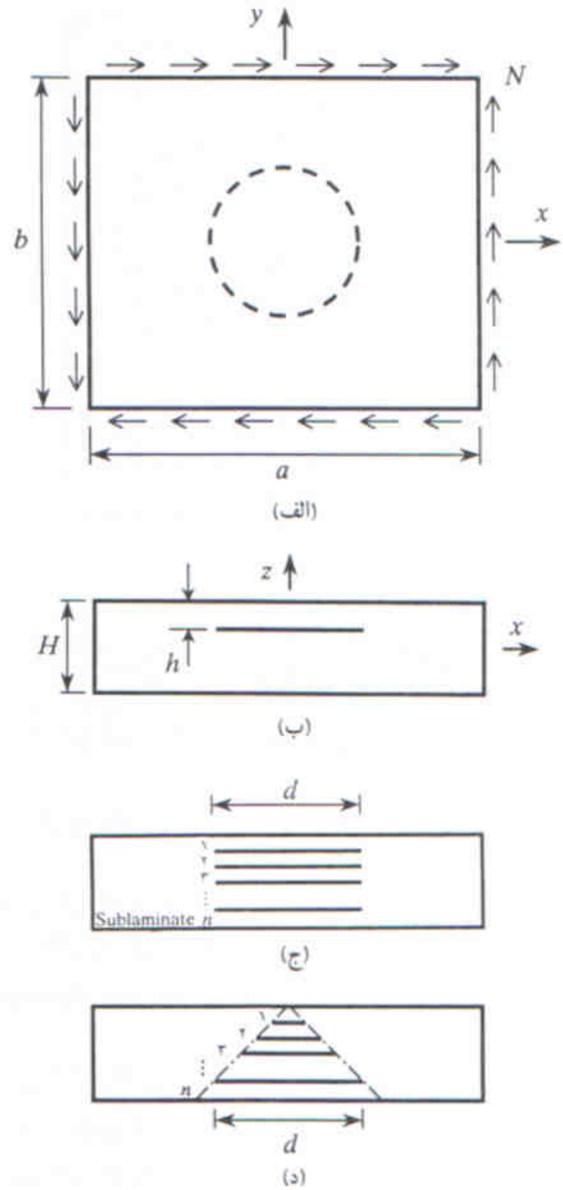
تورّق ممکن است در اشکال مختلف و به‌علل زیر ایجاد شود: تورّق یگانه[۵] به‌علت اشکال در ساخت، تورّق چندگانه[۶] به‌علت ضربه‌ی اجسام خارجی برروی صفحه، و تورّق در لبه‌ها[۷] بر اثر بارهای خستگی. از این میان، ضربه‌ی اجسام خارجی مهم‌ترین علت ایجاد تورّق است که منجر به پیدایش چندین جدایش در بین لایه‌ها و در راستای ضخامت می‌شود و معمولاً اندازه‌ی این جدایش‌ها با دور شدن از نقطه‌ی برخورد در راستای ضخامت افزایش می‌یابد.

گونه‌های مختلف کمانش مواد مرکب لایه‌یی تحت بارهای فشاری داخل صفحه، نظیر تورّق سراسری عرضی[۸][۱–۴]، تورّق در لبه‌ها[۵]، تورّق یگانه[۶–۹] و تورّق چندگانه[۱۰و ۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است. اما فقط یک تحقیق بر روی کمانش مواد مرکب لایه‌یی حاوی تورّق بر اثر نیروی برشی داخل صفحه صورت گرفته[۱۲] که در آن نیز فقط از مدل تورّق سراسری عرضی، بدون در نظر گرفتن هم‌پوشانی لایه‌ها[۹] و مسئله تماس[۱۰] استفاده شده است.

در این تحقیق، کمانش صفحات مستطیل شکل مواد مرکب لایه‌یی تحت اثر بار برشی داخل صفحه و حاوی تورّق یگانه یا چندگانه مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی بار بحرانی نشان داده شده است. برای این منظور، از مدل دوبعدی صفحه با در نظر گرفتن اثر برش عرضی[۱۱] (نظریه‌ی صفحه‌ی میندلین) در روش اجزاء محدود استفاده شده است. برای هر لایه‌ی جدا شده در ناحیه‌ی تورّق، یک صفحه‌ی مرجع جداگانه در نظر گرفته شده است. بار بحرانی و حالت کمانش با حل مسئله‌ی مقدار ویژه به‌دست آمده است. برای جلوگیری از هم‌پوشانی لایه‌های جدا شده و رفع مسئله‌ی تماس، از روش تابع جریمه استفاده شده است، که معنی فیزیکی آن اضافه کردن فنرهای مجازی بین نقاط هم پوشیده است. روش مناسبی برای تعیین ثابت فنرهای مذکور با در نظر گرفتن خواص کشسانی و میزان هم‌پوشانی در هر نقطه ارائه شده است. نتایج عددی نشان‌دهنده‌ی اثر تعداد، اندازه و عمق تورّق، و شرایط مرزی صفحه بر روی باربحرانی است.

مدل مورد استفاده

صفحه‌ی مستطیل شکلی از مواد مرکب لایه‌یی با اضلاع a و b و ضخامت H حاوی تورّق چندگانه یا یگانه را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). از دستگاه مختصات (x, y, z) که مبدأ آن در وسط صفحه



شکل ۱. صفحه‌ی حاوی تورّق، تحت بار برشی داخل صفحه.

قرار دارد استفاده می‌کنیم. این صفحه تحت بار برشی N در داخل صفحه‌ی xy قرار دارد. هر لایه‌ی صفحه از الیاف بلند درست شده و دارای خواص یک جهتی[۱۲] است. تورّق دایره‌یی شکل بوده و در مرکز صفحه قرار داده شده است. در تورّق چندگانه، دو حالتِ اندازه‌ی یکسان (شکل ۱ج) و اندازه‌ی متغیر (شکل ۱د) در نظر گرفته می‌شود.

صفحه توسط $n-1$ تورّق به n لایه تقسیم می‌شود. در حالت تورّق چندگانه، ضخامت همه‌ی لایه‌ها یکسان فرض شده‌اند. در تورّق یگانه، محل تورّق را می‌توان در راستای ضخامت به‌صورت دلخواه تغییر داد. در نام‌گذاری لایه‌ها زاویه‌ی صفر درجه به لایه‌یی با الیاف در راستای x اشاره می‌کند.

تحلیل کمانش

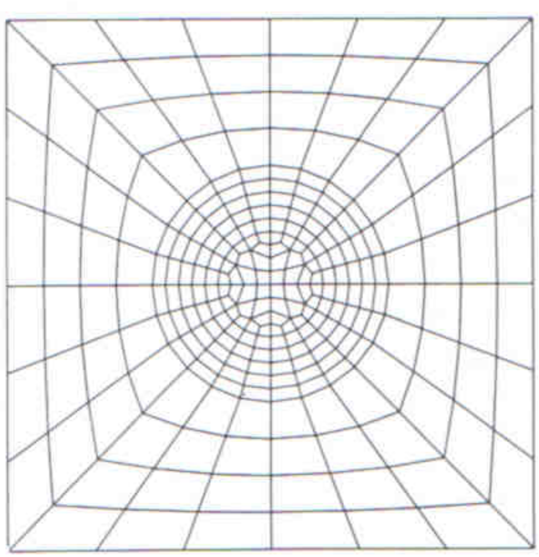
در این تحلیل، از روش اجزاء محدود استفاده شده است. این تحلیل به دو روش امکان‌پذیر است: ۱. روش غیرخطی که در آن باری را به صفحه اعمال کرده و با افزایش تدریجی آن در تکرار[۱۳]های متعدد معادله‌ی غیرخطی تعادل را حل می‌کنند؛ ۲. روش خطی که در آن ضمن حل یک مسئله‌ی پایداری (مسئله‌ی مقدار ویژه) در یک مرحله جواب را به دست می‌آورند. دنبال کردن مسیر بار ـ تغییر مکان در روش اول، اطلاعات زیادی را، شامل بار بحرانی و شکل صفحه‌ی قبل و بعد از کمانش، ارائه می‌دهد. در روش دوم، تنها بار بحرانی و حالت کمانش را در یک مرحله به دست می‌آوریم. معمولاً باربحرانی مهم‌ترین نگرانی طراحان است که در این صورت روش حل مسئله‌ی مقدار ویژه به‌خاطر سادگی و سرعت بالاتر ترجیح داده می‌شود.

رابطه‌ی اصلی در تحلیل کمانش به‌روش خطی، مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی زیر است:[۱۳]

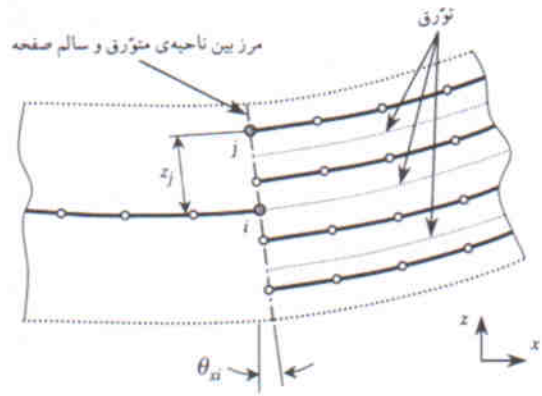
$$\mathbf{K}_0 \delta = \lambda \mathbf{K}_G \delta \qquad (۱)$$

که در آن $\mathbf{K}_0$ و $\mathbf{K}_G$ ماتریس‌های سختی کشسانی و هندسی‌اند و δ بردار تغییر مکان تعمیمی[۱۴] است. برای تشکیل ماتریس‌های فوق از رابطه‌های مربوط به صفحات میندلین استفاده شده است.[۱۴و ۱۵] کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی رابطه‌ی ۱ نشان‌دهنده‌ی بار بحرانی (N_{cr})، و بردار ویژه‌ی متناظر با آن، نشانگر حالت کمانش است. در این تحقیق، مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی بالا توسط روش تکرار همزمان[۱۶] حل شده است.

در محاسبات، از شبکه‌یی شبیه به شبکه‌ی ارائه شده در شکل ۲ استفاده شده است. از آنجا که در کمانش تحت نیروی برشی، حالت‌های نامتقارن نیز در مدل مورد استفاده ظاهر می‌شود، شبکه



شکل ۲. شبکه‌ی استفاده شده در روش اجزاء محدود.



شکل ۳. شرایط پیوستگی در مرز تورّق.

باید کل صفحه را بپوشاند. این شبکه از المان‌های هشت نقطه‌یی چهارگوش ایزوپارامتریک درست شده است. هر نقطه دارای پنج درجه آزادی u، v، w، θ_x و θ_y است، که به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی تغییر مکان در راستای x، y و z، و چرخش در صفحات xz و yz است. در ناحیه‌ی تورّق، به ازاء هر لایه‌ی جدا شده یک صفحه میندلین در نظر گرفته می‌شود و در مرز ناحیه‌ی متورّق و سالم صفحه، تغییر مکان نقاط به‌صورت زیر است (شکل ۳):

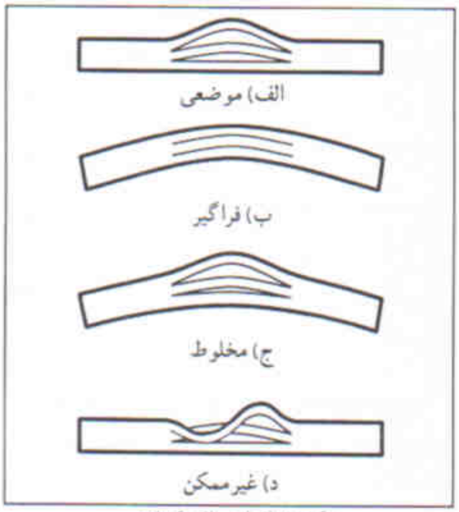
$$\begin{aligned} u_j &= u_i - z_j\theta_{x\,i} \\ v_j &= v_i - z_j\theta_{y\,i} \\ w_j &= w_i \\ \theta_{x\,j} &= \theta_{x\,i} \\ \theta_{y\,j} &= \theta_{y\,i} \end{aligned} \qquad (۲)$$

این رابطه‌ها شبیه به رابطه‌های تغییر مکان در صفحات میندلین بوده و به این ترتیب ما را از به‌هم پیوستگی مناسب در مرز ناحیه‌ی متورّق و سالم مطمئن می‌کند. رابطه‌های فوق به‌صورت قیود در نظر گرفته شده و با استفاده از روش تابع جریمه اعمال شده است.

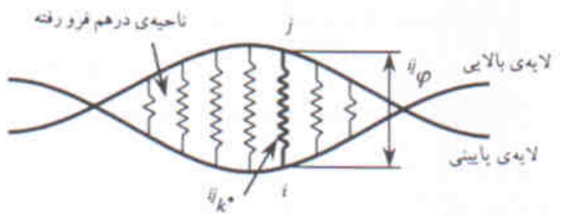
مسئله‌ی تماس

یک صفحه‌ی حاوی تورّق، ممکن است در اثر نیروی داخل صفحه در حالت‌های موضعی (شکل ۴الف)، فراگیر (شکل ۴ب) یا مخلوط (شکل ۴ج) کمانش کند. به‌علت هم‌پوشانی لایه‌ها، تحلیل کمانش بدون قید ممکن است به حالتی منجر شود که در عمل غیر ممکن است (شکل ۴د). برای یافتن جواب قابل قبول، لازم است قیدهایی در مسئله گنجانده شود. برای این منظور، در این تحقیق از روش تابع جریمه استفاده می‌شود.

دو لایه‌ی هم‌پوشانی شده را در نظر بگیرید (شکل ۵). در روش اجزای محدود حاضر، بر روی تمامی نقاط در ناحیه‌ی هم‌پوشانی شده قیود اعمال می‌شود. به‌عنوان مثال، نقاط i و j را با عمق



شکل ۴. انواع حالت کمانش.



شکل ۵. اضافه کردن فنرهای مجازی به‌منظور جلوگیری از هم‌پوشانی.

هم‌پوشانی شده‌ی ${}^{ij}\varphi$ در نظر بگیرید. قید مورد نظر ما در این نقطه ${}^{ij}\varphi \geq 0$ است. در روش تابع جریمه‌ی خارجی[15] بعد از اعمال این قید، تابع مسئله چنین تغییر می‌کند:

$$\Pi^* = \Pi + \frac{1}{2}\ {}^{ij}k^{*}\ {}^{ij}\varphi^{2} \qquad (۳)$$

که در آن ${}^{ij}k^*$ عدد جریمه[16] است. معنی فیزیکی عبارت دوم سمت راست رابطه‌ی ۳، یک فنر مجازی بین نقاط i و j است که تغییر مکان نسبی آنها را در راستای عمودی محدود می‌سازد و به این ترتیب هم‌پوشانی را از بین می‌برد. تنها نکته‌ی موجود انتخاب مناسب عدد جریمه است.

فرض کنید تغییر مکان عمودی نقاط i و j اجزای mام و nام بردار δ باشند. با بسط رابطه‌ی ۱ و جدا کردن معادلات مربوط به این دو تغییر مکان داریم:

$$\begin{aligned} & k_{m1}\delta_1 + k_{m2}\delta_2 + \dots + k_{mm}\delta_m + \dots + k_{mn}\delta_n + \dots + \\ & k_{mN_{dof}}\delta_{N_{dof}} = \lambda \sum_{l=1}^{N_{dof}} k_{Gml}\delta_l \\ & k_{n1}\delta_1 + k_{n2}\delta_2 + \dots + k_{nm}\delta_m + \dots + k_{nn}\delta_n + \dots + \\ & k_{nN_{dof}}\delta_{N_{dof}} = \lambda \sum_{l=1}^{N_{dof}} k_{Gnl}\delta_l \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن N_{dof} تعداد درجات آزادی کل سیستم است. اضافه کردن فنر مجازی جدید برروی k_{mm}، k_{mn} و k_{nn} اثر می‌گذارد. با ثابت فرض کردن بقیه‌ی جملات و انتقال آنها به سمت راست رابطه داریم:

$$k_{mm}\delta_m + k_{mn}\delta_n = P_m$$
$$k_{mn}\delta_m + k_{nn}\delta_n = P_n \qquad (۵)$$

که در آن:

$$P_m = \lambda \sum_{l=1}^{N_{dof}} k_{Gml}\delta_l - \sum_{\substack{l=1 \\ (l\neq m,\, l\neq n)}}^{N_{dof}} k_{ml}\delta_l$$

$$P_n = \lambda \sum_{l=1}^{N_{dof}} k_{Gnl}\delta_l - \sum_{\substack{l=1 \\ (l\neq m,\, l\neq n)}}^{N_{dof}} k_{nl}\delta_l \qquad (۶)$$

پس از اضافه کردن اثر فنر جدید، رابطه‌ی ۵ به رابطه‌ی ۷ تبدیل می‌شود:

$$(k_{mm} + {}^{ij}k^*)\delta'_m + (k_{mn} - {}^{ij}k^*)\delta'_n = P_m$$
$$(k_{mn} - {}^{ij}k^*)\delta'_m + (k_{nn} + {}^{ij}k^*)\delta'_n = P_n \qquad (۷)$$

در اثر اضافه شدن فنر جدید، تغییر مکان نقاط i و j به δ'_m و δ'_n تبدیل شده است. برای کم کردن فاصله‌ی عمودی نقاط i و j می‌توانیم قیدی به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\delta'_n - \delta'_m = \xi \qquad (۸)$$

حال با استفاده از سه معادله‌ی موجود در رابطه‌های ۷ و ۸ می‌توان از بین سه مجهول ${}^{ij}k^*$، δ'_m و δ'_n مقدار ${}^{ij}k^*$ را چنین محاسبه کرد:

$${}^{ij}k^* = \frac{(k_{mm}+k_{mn})P_n - (k_{mn}+k_{nn})P_m + \xi\,(k_{mn}^2 - k_{mm}k_{nn})}{\xi\,(k_{mm} + 2k_{mn} + k_{nn})} \qquad (۹)$$

باید توجه داشت که اعمال یک فنر بین نقاط i و j باعث تغییر شکلِ نقاط کناری نیز خواهد شد. برای آن نقاط نیز فنرهای مجزا از رابطه‌ی ۹ محاسبه و اعمال می‌شود. وابستگی تغییرمکان هر نقطه به فنرهای مجازی اعمال شده در نقاط دیگر باعث غیرخطی شدن مسئله شده و ما مجبور به حل مسئله در تکرارهای متعدد می‌شویم. در اینجا، سعی می‌کنیم بخشی از هم‌پوشانی را در هر تکرار از بین ببریم. به‌عبارت دیگر هم‌پوشانی مُجازی مطابق رابطه‌ی ۱۰ را در نظر می‌گیریم و در هر تکرار این مقدار مجاز را کاهش می‌دهیم.

$$\xi = \frac{{}^{ij}\varphi}{1+r} \qquad (۱۰)$$

در اینجا r عددی است که در ابتدا مقدار آن کم است ولی در هر تکرار مقدار آن را افزایش می‌دهیم. به‌این ترتیب ${}^{ij}k^*$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$${}^{ij}k^* = \frac{(k_{mm}+k_{mn})P_n - (k_{mn}+k_{nn})P_m + \frac{{}^{ij}\varphi}{1+r}(k_{mn}^2 - k_{mm}k_{nn})}{\frac{{}^{ij}\varphi}{1+r}\,(k_{mm} + 2k_{mn} + k_{nn})} \qquad (۱۱)$$

مقدار اولیه‌ی r و نحوه‌ی افزایش آن، نرخ همگرایی جواب را مشخص می‌کند. همگرایی مناسب با انتخاب مقدار اولیه‌ی 1×10^{-5} برای r و ضرب آن در ۳ در هر تکرار به‌دست می‌آید.

حال با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده می‌توان یک‌بار مسئله را حل کرد، در صورت وجود هم‌پوشانی، مقادیر فنرهای مجازی برای تمام نقاط هم‌پوشانی شده را با استفاده از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه کرده و اثر آنها را در $\mathbf{K}_s$ اعمال کرد. سپس مقدار r را افزایش داده و تکرار بعدی را انجام داد تا زمانی‌که میزان هم‌پوشانی از مقداری دلخواه کوچک‌تر شود.

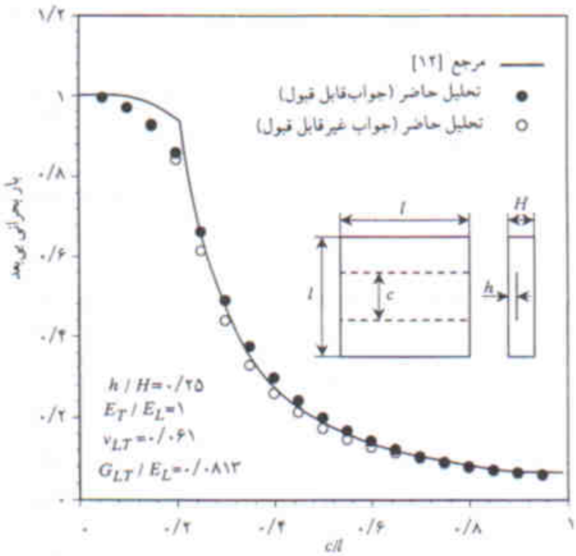
نتایج عددی

صفحه‌ی مربعی از مواد مرکب لایه‌یی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). شرایط مرزی ساده و درگیر، هر دو در نظر گرفته شده است. ابعاد صفحه به‌صورت $a = b = l = 200$ mm $H = 3$ mm و ترکیب لایه‌ها به‌شکل $[0/90]_{3s}$ است. خواص مواد برای هر لایه در جدول ۱ نشان داده شده است.

بار بحرانی بی‌بعد، از تقسیم بار بحرانیِ صفحه‌ی حاویِ تورّق بر بار بحرانیِ صفحه‌یی سالم و با همان ابعاد به دست آمده است. با استفاده از برنامه‌ی تهیه شده در این تحقیق، بار بحرانیِ صفحه‌یی سالم (بدون تورّق) با تکیه‌گاه ساده و ابعاد بالا برابر است با $N_1 = 3/01\times10^5$ N/m. برای بی‌بُعد کردن بار بحرانی از این عدد استفاده شده است. بار بحرانیِ بی‌بعد را، به شرط حفظ شباهت، می‌توان برای تمامی ابعاد صفحه به‌کار برد.

جدول ۱. خواص مواد هر لایه.

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸



شکل ۶. مقایسه‌ی نتایج با نتایج حاصل از مدل تورّق سراسری عرضی.

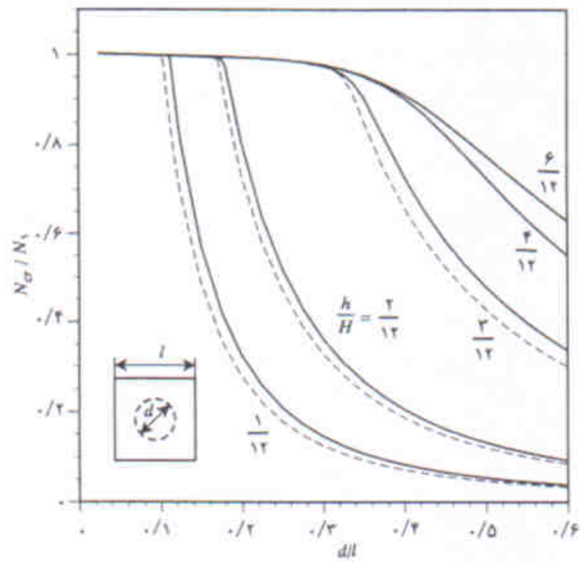
الف) مقایسه با نتایج موجود

در ابتدا برای بررسی صحت نتایج حاصله، این نتایج را با نتایجی که در آن مدل تورّق سراسری عرضی در نظر گرفته شده[۱۲] مقایسه کرده‌ایم. شکل ۶ نتایج این مقایسه رانشان می‌دهد. اندک تفاوت موجود بین نتایج را می‌توان ناشی از دو دلیل دانست. اولاً در مدل فوق فقط حالت‌های موضعی و فراگیر در نظر گرفته شده است، و بر خلاف روش حاضر امکان به دست آوردن حالت مخلوط وجود نداشته است. این مسئله باعث اختلاف در نزدیکی c/l = ۰/۲ می‌شود که در آن حالت مخلوط ظاهر می‌شود. دوماً، در آن مرجع از مسئله‌ی تماس و هم‌پوشانی لایه‌ها نیز صرف‌نظر شده است، در حالی‌که این مسئله در این تحقیق منظور شده و این نکته باعث اختلاف در ناحیه‌ی c/l = ۰/۲ - ۰/۶ شده است، که در آن هم‌پوشانی لایه‌ها رخ می‌دهد.

ب) تورّق یگانه

برای بررسی اثر اندازه و عمق تورّق یگانه بر بار بحرانی، صفحه‌یی مربع با سطح مقطعی، شبیه آنچه که در شکل ۱ب ارائه شده، در نظر می‌گیریم. شکل ۷ بار بحرانی بی‌بعد را برای عمق‌های مختلف تورّق، زمانی‌که قطر تورّق دایره‌یی افزایش می‌یابد، نشان می‌دهد. برای ابعاد کوچک تورّق (d/l < ۰/۱)، حالت کمانش فراگیر است و بار بحرانی صرف‌نظر از عمق تورّق، بالاست که با افزایش اندازه‌ی تورّق، باربحرانی کاهش می‌یابد. این کاهش زمانی‌که تورّق به سطح صفحه نزدیک‌تر است (عمق کمتر) چشمگیرتر می‌شود.

در شکل ۷، خطوط مقطّع نشانگر مقادیر بار بحرانی در حالت کمانش غیر قابل قبول (حالت هم‌پوشانی شده) است و خطوط توپر

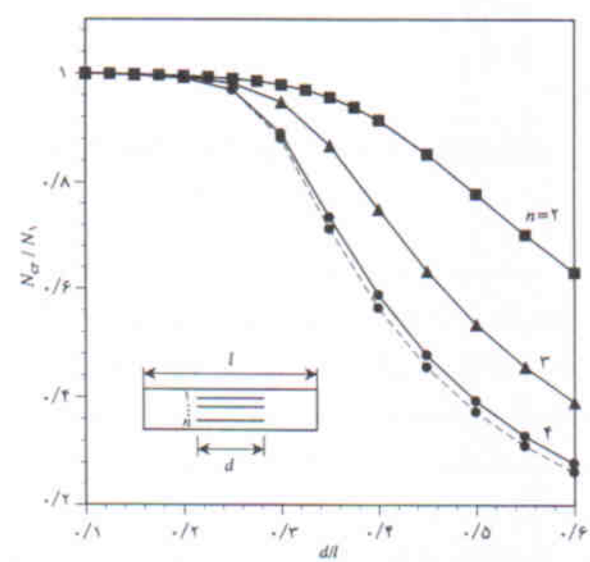


شکل ۷. اثر اندازه و عمق تورّق یگانه بر بار بحرانی.

مقادیر قابل قبول بار بحرانی را (پس از اعمال قیود و حذف هم‌پوشانی) نشان می‌دهد. اختلاف بین این دو سری خطوط، مشخص‌کننده‌ی اثر قیود اعمال شده برروی بار بحرانی است.

ج) تورّق چندگانه

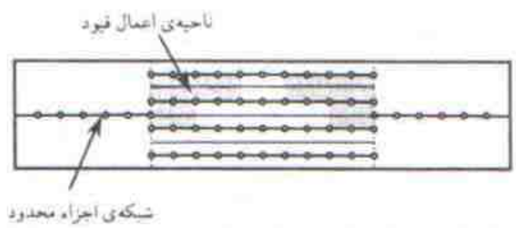
تورّق چندگانه قادر است بار بحرانی صفحات را به‌شکل قابل توجهی کاهش دهد. برای بررسی این موضوع، یک صفحه‌ی مربع با سطح مقطعی مانند شکل ۱-ج در نظر می‌گیریم. شکل ۸ مقادیر بار بحرانی بی‌بُعد را برای تعداد متفاوت تورّق، زمانی‌که قطر دایره‌ی آنها افزایش



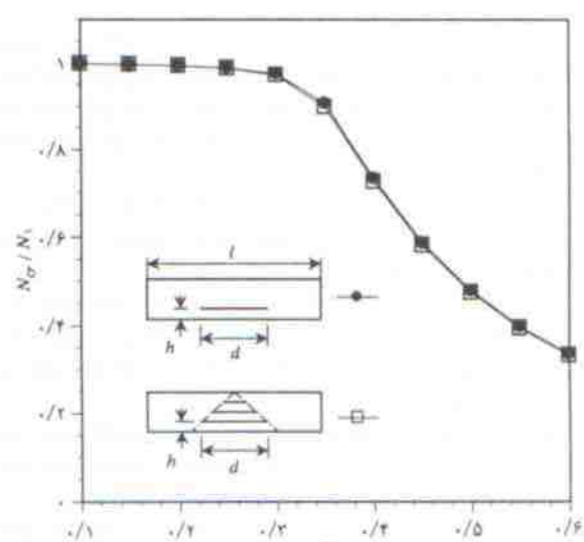
شکل ۸. اثر تعداد و اندازه‌ی تورّق چندگانه (اندازه‌ی یکسان) بر باربحرانی.

می‌یابد، نشان می‌دهد. چنان‌که مشاهده می‌شود، در اینجا نیز برای اندازه‌ی کوچک تورّق، بار بحرانی بالا به‌دست آمده و با افزایش اندازه‌ی تورّق بار بحرانی کاهش می‌یابد. به‌علاوه، این شکل نشان می‌دهد که با افزایش تعداد تورّق‌ها بار بحرانی کاهش می‌یابد. این کاهش برای ابعاد بزرگ تورّق بسیار شدید است.

چنان‌که در مقدمه ذکر شد، نتایج تجربی نشان می‌دهد که تورّق حاصل از برخورد اجسام خارجی، معمولاً در چند سطح مشترک[17] ایجاد می‌شود. اندازه‌ی این تورّق‌ها با دور شدن از سطحی که برخورد بر آن صورت گرفته افزایش می‌یابد. برای بررسی این مسئله، مدلی شبیه شکل ۱د را در نظر می‌گیریم. بررسی این مدل در روش اجزاء محدود نیازمند شبکه‌یی است که ساخت آن به‌صورت مستقیم مشکلاتی را در بر دارد، زیرا به‌علت نایکسانی لایه‌های جدا شده، نمی‌توانیم برای آنها طرح شبکه‌ی یکسان را در نظر بگیریم. برای رهایی از این مشکل، با به‌کارگیری شبکه‌ی استفاده شده در مراحل قبلی، تغییر مکان نقاط را در ناحیه‌ی تورّق، مانند شکل ۹، محدود می‌کنیم. برای این‌کار قیود روابط ۲ را بر تمامی نقاطی که در ناحیه‌ی مشخص شده‌ی شکل ۹ قرار می‌گیرد اعمال می‌کنیم.



شکل ۹. مش برای حالت تورّق چندگانه با اندازه‌ی متغیر.

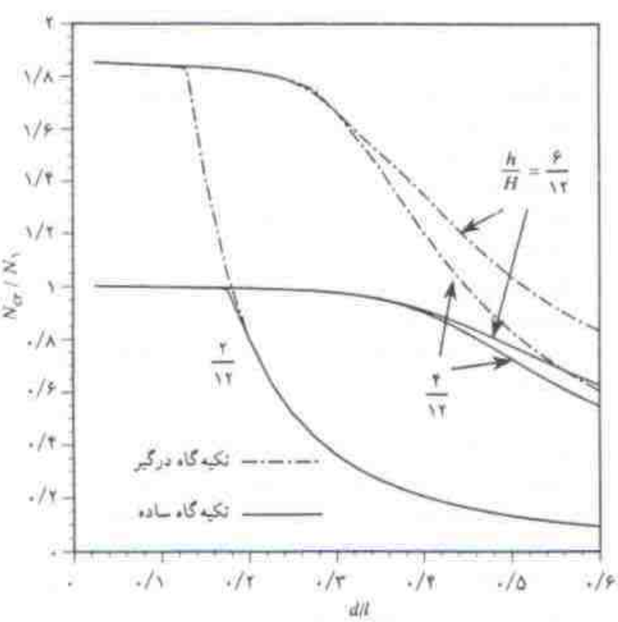


شکل ۱۰. اثر تعداد و اندازه‌ی تورّق چندگانه (اندازه‌ی متغیر) بر باربحرانی.

شکل ۱۰ مقادیر بار بحرانی بی‌بُعد را برای صفحه‌یی با سه تورّق دایره‌یی با اندازه‌های متغیر، زمانی‌که قطر بزرگ‌ترین آنها (و بالطبع بقیه) تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. به‌علاوه، این شکل نشانگر بار بحرانی صفحه‌یی است، در حالی‌که یک تورّق را در اندازه و در عمقی که بزرگ‌ترین تورّق مدل چندگانه با ابعاد متغیر دارد شامل می‌شود. مقایسه‌ی این نتایج نشان می‌دهد که بار بحرانی صفحه‌یی با تورّق چندگانه و اندازه‌ی متغیر را می‌توان با بار بحرانی صفحه‌یی با یک تورّق به‌صورتی که در بالا ذکر شد تقریب زد.

د) اثر شرایط مرزی

شرایط مرزی صفحه، تأثیر به‌سزایی بر روی باربحرانی دارد. شکل ۱۱ این اثر را در صفحه‌یی حاوی تورّق یگانه‌ی دایره‌یی شکل که در عمق‌های مختلف قرار داده شده نشان می‌دهد. شرایط مرزی ساده و درگیر، به‌ترتیب مشخص‌کننده‌ی صفحاتی با چهار گوشه‌ی ساده و درگیر است. این شکل نشان می‌دهد که برای اندازه‌ی کوچک تورّق صرف‌نظر از عمق آن، بار بحرانی صفحه‌ی درگیر تقریباً دو برابر بار بحرانی صفحه با تکیه‌گاه ساده است. باربحرانی هر دو صفحه با افزایش اندازه‌ی تورّق کاهش می‌یابد و به‌هم نزدیک می‌شود. زمانی‌که لایه‌ی جدا شده نازک است (تورّق عمق کم)، بار بحرانی دو صفحه به‌سرعت به‌هم نزدیک می‌شود. در نتیجه می‌توانیم بگوئیم که اثر شرایط مرزی در صفحات حاوی تورّق کم‌عمق بر اثر افزایش اندازه‌ی تورّق، به‌سرعت کاهش می‌یابد.



شکل ۱۱. اثر شرایط مرزی بر بار بحرانی.

نتیجه‌گیری

بار بحرانی صفحات حاوی تورّق ساخته شده از مواد مرکب لایه‌یی تحت بار برشی داخل صفحه با حل مسئله‌ی مقدار ویـژه و از روش اجزاء محدود به دست آمد. با بررسی نتایج بـه‌دست آمـده مـی‌توان گفت:

۱. در تحلیل کمانش صفحات حاوی تورّق، مسئله‌ی تماس مـطرح بوده و لازم است با اعمال قیود، از هم‌پوشانی لایـه‌ها جـلوگیری شود. این‌کار باعث افزایش بار بحرانی می‌شود.

۲. تورّق در صفحات مواد مرکب لایه‌یی باعث کاهش بار بحرانی آنها می‌شود. این کاهش با افزایش تعداد یا اندازه‌ی تورّق چشمگیرتر می‌شود.

۳. بار بحرانی صفحه‌ی حاوی تورّق چندگانه بـا انـدازه‌ی مـتغیر را می‌توان با بار بحرانی صفحه‌یی حاوی تورّق یگـانه (بـا انـدازه و عمقی که بزرگ‌ترین تورّق حالت چندگانه دارد) تقریب زد.

۴. اثر شرایط مرزی بر بار بحرانی زمانی مهم است که تورّق کوچک و عمیق باشد.

پانوشت‌ها

1. composite laminates
2. delamination
3. strength
4. stiffness
5. single delamination
6. multiple delamination
7. edge delamination
8. through-the-width delamination
9. layer overlap
10. contact problem
11. transverse shear
12. unidirectional
13. iteration
14. generalized displacement vector
15. exterior penalty function method
16. penalty number
17. interface

منابع

1. Chai, H., Babcock, C.D., and Knauss, W.G., "One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling", *Int. J. Solids Structures,* **17** (11), pp 1069-1083 (1981).
2. Simitses, G.J., Sallam, S., and Yin, W.L., "Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Plates", *AIAA J.,* **23,** pp 1437-1444 (1985).
3. Kardomateas, G.A., and Schmueser, D.W., "Buckling and Postbuckling of Delaminated Composites Under Compressive Loads Including Transverse Shear Effects", *AIAA J.,* **26,** pp 337-343 (1988).
4. Lee, J., Gurdal, Z., and Griffin, H. Jr., "Layer-wise approach for the bifurcation problem in laminated composites with delaminations", *AIAA J.,* **31(2),** pp 331-338 (1993).
5. Suemasu, H., Gozu, K., and Hayashi, K., "Compressive buckling of rectangular composite plates with a free-edge delamination", *AIAA J.,* **33,** pp 312-319 (1995).
6. Chai, H., and Babcock, C.D., "Two-dimensional modelling of compressive failure in delaminated laminates", *J. Composite Materials,* **19,** pp 67-98 (1985).
7. Whitcomb, J.D., "Analysis of a Laminate with a Postbuckled Embedded Delamination, Including Contact Effects", *J. Composite materials,* **26,** pp 1523-1535 (1992).
8. Yeh, M.K., and Tan, C.M., "Buckling of Elliptically Delaminated Composite Plates", *J. Composite Materials,* **28,** pp 36-52 (1994).
9. sekine, H., Hu, N., and Kouchakzadeh, M.A., "Buckling analysis of elliptically delaminated composite laminates with consideration of partial closure of delamination", *J. Composite Materials,* **34,** pp 551-574 (2000).
10. Suemasu, H., Kumagai, T., and Gozu, K., "Compressive behavior of multiply delaminated composite laminates part 1: Experiment and analytical development", *AIAA J.,* **36**(7), pp 1279-1285 (1998).
11. Kouchakzadeh, M.A., and Sekine, H., "Compressive buckling analysis of rectangular composite laminates containing multiple delaminations", *Composite Structure,* **50**(3), pp 249-255 (2000).
12. Suemasu, H., "Analytical study of shear buckling and postbuckling behaviors of composite plates with delamination", *JSME International J., Series I,* **34**(2), pp 135-142 (1991).
13. Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method,* Third Edition, McGraw-Hill Book Company (1977).
14. Pica, A., Wood, R.D., and Hinton, E., "Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behaviour Using A Mindlin Formulation", *Computers and Structures,* **11,** pp 203-215 (1980).
15. Mukhopadhyay, M., and Mukherjee, A., "Finite Element Buckling Analysis of Stiffened Plates", *Computers and Structures,* **34,** pp 795-803 (1990).
16. Corr, R.B., and Jennnings, A., "A Simultaneous Iteration Algorithm for Symmetric Eigenvalue Problems", *Int. J. Numer. Meth. Engng,* **10,** pp 647-663 (1976).