

حل معادلات سه‌بعدی اویلر برای جریان مافوق صوت با

استفاده از روش‌های صریح و ضمنی رُو

محمد مهدی علیشاهی (استاد)

همایون امداد (استادیار)

امید ابوعلی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

در این نوشتار حل معادلات سه‌بعدی اویلر با دو روش صریح و ضمنی و با شیوه‌ی رُو مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای جداسازی از روش حجم محدود^۱ استفاده می‌شود. اگرچه روش صریح، روشی ساده است اما زمان بیشتری برای رسیدن به جواب نهایی نیاز دارد. در مقابل، روش ضمنی پیچیده‌تر، اما سریع‌تر است. برای بررسی دقت برنامه، جریان بر روی یک مخروط با زاویه‌ی رأس 20° و در عدد ماخ $7/95$ در زوایای حمله‌ی 20° و 23° ، و نیز یک دماغه‌ی آکیو شکسته^۲ در زوایای حمله‌ی 6° و 10° و در ماخ جریان ۳ مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه با نتایج تجربی نشان می‌دهد که در مقاطعی که جدایی جریان نداریم، شرایط جریان با دقت قابل قبولی پیش‌بینی می‌شود. اما در شرایطی که ناحیه‌ی جدایی بزرگ است، مانند مقاطع انتهایی دماغه‌ی آکیو شکسته در زاویه‌ی حمله‌ی 10° ، معادلات اویلر قادر به پیش‌بینی دقیق حوزه‌ی جریان نیستند و در نظر گرفتن ترم‌های لزج برای پیش‌بینی دقیق‌تر میدان جریان اجتناب‌ناپذیر است. باید توجه داشت که برنامه‌ی رایانه‌ی حاضر به‌عنوان مرحله‌ی اولیه‌ی تولید یک برنامه‌ی حل معادلات ناویر-استوکس^۳، چنان تدوین شده است که به‌راحتی بتوان آن را به‌چنین برنامه‌ی تبدیلی کرد. به‌علاوه حل مسائل زمانمند نیز از قابلیت‌های دیگر این معادله است.

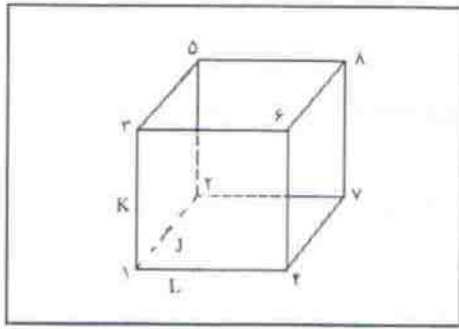
مقدمه

یکی از ابزارهای لازم برای طراحی اجسام پرنده‌ی مافوق صوت یک کد عددی مناسب برای تعیین خصوصیات جریان هوادر اطراف جسم است. معادلات ناویر-استوکس بر بسیاری از پدیده‌های جریان سیال، حاکم‌اند. حل عددی این معادلات برای جریان‌های تراکم‌پذیر بر روی اجسام پیچیده، بسیار زمان‌بر است و همچنین نیاز به رایانه‌هایی با حافظه‌ی بالا دارد.^[۱] به‌همین دلیل اغلب از ابر رایانه‌ها^۴ برای این منظور استفاده می‌شود. اما با حل دقیق معادلات اویلر که با امکانات رایانه‌ی محدود نیز امکان‌پذیر است، می‌توان اطلاعات مورد نیاز برای مراحل اولیه طراحی را به دست آورد. برای حالاتی که اثرات لزجت سیال محدود به ناحیه‌ی کوچکی در اطراف جسم می‌شود، جواب‌های معادلات اویلر، نظیر توزیع فشار، با شرایط واقعی جریان تطبیق خوبی دارد. نکته‌ی مهم دیگر اینکه اولین گام برای تهیه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ی حل معادلات ناویر-استوکس نیز تهیه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ی حل معادلات اویلر است.

روش‌های عددی موجود برای حل معادلات اویلر را می‌توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم کرد.^[۳] دسته‌ی اول، روش‌هایی را شامل می‌شود که از فن مجزاسازی مرکزی استفاده می‌کنند، روش‌های

لاکس-وندرف^[۴] و مک‌کورمک^[۵] از این جمله‌اند. کاربرد این روش‌ها ساده است، اما برای پیش‌بینی دقیق موج ضربه‌ی نیاز به اضافه کردن یک سری ترم‌های مستهلک‌کننده^۵ دارند. با توجه به شرایط مختلف جریان، مقدار مناسب این پارامترها نیز متفاوت‌اند و اغلب با سعی و خطا به دست می‌آیند. این مشکل از جامعیت این روش‌ها حکم می‌کند.

دسته‌ی دوم روش‌های بالا دست‌سازی^۶ است. در این روش‌ها از خصوصیات فیزیکی جریان در ساختن روش عددی استفاده می‌شود. بدین ترتیب که با توجه به مقادیر ویژه^۷ معادلات در هر جهت، شارها^۸ به روش مناسب جداسازی می‌شود. روش‌های گودونف^[۶]، اُثیر^[۷]، و رُو^[۸] از این جمله‌اند در یکی از کامل‌ترین این روش‌ها، یعنی روش رُو، حل تحلیلی مسئله‌ی ریمان به شارهای مساعده‌ی اویلر اعمال می‌شود. روش رُو یک روش پایه برای مجزاسازی ترم‌های غیرلزج معادلات ناویر-استوکس است و در تعداد زیادی از تحقیق‌های مربوط به جریان تراکم‌پذیر مورد استفاده قرار گرفته است.^[۹] روش‌های بالادست‌سازی، دیگر نیازی به استفاده از پارامترهای مستهلک‌کننده ندارند، اما زمان اجرای رایانه‌ی آنها نسبت به روش‌های مرکزی بیشتر است. در این تحقیق



شکل ۱. سلول حجم محدود.

$$\tilde{E} = \frac{\xi_x}{J} E + \frac{\xi_y}{J} F + \frac{\xi_z}{J} G$$

$$\tilde{F} = \frac{\eta_x}{J} E + \frac{\eta_y}{J} F + \frac{\eta_z}{J} G$$

$$\tilde{G} = \frac{\zeta_x}{J} E + \frac{\zeta_y}{J} F + \frac{\zeta_z}{J} G \quad (4)$$

معادله ۳ را می‌توان به صورت مجزاسازی شده نوشت:

$$\left[Q_{j,k,l} \right]_{\bar{r}} + \left[E_{j+\frac{1}{2},k,l} - E_{j-\frac{1}{2},k,l} \right] + \left[F_{j,k+\frac{1}{2},l} - F_{j,k-\frac{1}{2},l} \right] + \left[G_{j,k,l+\frac{1}{2}} - G_{j,k,l-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5)$$

که در آن G, F, E شارهای عددی در روی سطوح حجم کنترل‌اند (شکل ۱).

با در نظر گرفتن ملاحظات زیر، معادله ۵ را می‌توان شکل جداسازی شده‌ی حجم محدود معادلات اویلر دانست. با فرض:

$$Q_{j,k,l} = Q V_{j,k,l} \quad (6)$$

که در آن V حجم المان و

$$\left[\frac{\xi_{x,y,z}}{J} \right]_{j+\frac{1}{2}}, \left[\frac{\eta_{x,y,z}}{J} \right]_{k+\frac{1}{2}}, \left[\frac{\zeta_{x,y,z}}{J} \right]_{i+\frac{1}{2}}$$

سه مؤلفه‌ی بردار عمود بر سطوح حجم کنترل است. از شرح نحوه‌ی محاسبه‌ی حجم المان و سطح المان، برای خلاصه‌نویسی صرف‌نظر می‌شود. اما جزئیات کامل آن در دسترس است.^[۱۷]

شارهای عددی^۱

برای محاسبه‌ی شارها از روش رُوش استفاده می‌شود. در این روش، مقادیر روی سطوح حجم کنترل، یعنی سرعت‌ها، چگالی و آنتالپی با یک روش خاص میانگین‌گیری محاسبه می‌شود.^[۳]

حل معادلات سه‌بعدی اویلر با روش رُوش و مجزاسازی احجام محدود با دو روش صریح و ضمنی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج ارائه شده مربوط به فاز اول یک تحقیق برای حل معادلات سه‌بعدی ناویر-استوکس برای جریان‌های مافوق صوت بر روی اجسام چرخان است. گام مهم برای تهیه‌ی یک معادله‌ی سه‌بعدی ناویر-استوکس تهیه‌ی یک معادله‌ی اویلر مناسب است و بیشترین دقت و توجه در این مرحله می‌بایست صرف شود. هدف از انجام این مرحله از تحقیق، بررسی صحت برنامه‌ی رایانه‌ی اویلر تهیه شده و مقایسه‌ی روش‌های صریح و ضمنی و نیز بررسی محدوده‌ی دقت معادله‌ی اویلر برای بررسی شرایط واقعی جریان است. لازم به اشاره است علی‌رغم اینکه چندین سال است از تهیه‌ی معادلات سه‌بعدی اویلر در مجامع علمی می‌گذرد، تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند در کشور ما این زمینه جدیداً بررسی و حل معادلات اویلر با روش رُوش برای جریان‌های متقارن محوری ارائه شده است.^[۱۱] اولین معادله‌ی سه‌بعدی اویلر دایمی یا الگوریتم بالا دست سازی برای اولین بار در مجامع علمی داخلی تهیه شد^[۱۱] و معادله‌ی تهیه شده در این تحقیق اولین معادله‌ی سه‌بعدی زمانمند به روش رُوش در داخل کشور است.

معادلات حاکم

فرم بقایی معادلات اویلر در مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$Q_t + E_x + F_y + G_z = 0 \quad (1)$$

که در آن:

$$Q = \begin{bmatrix} e \\ \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} (e+p)u \\ \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} (e+p)v \\ \rho u \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} (e+p)w \\ \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \end{bmatrix} \quad (2)$$

در معادلات بالا p فشار، ρ چگالی، w, v, u مؤلفه‌های سرعت و e انرژی کل هستند. معادله ۱ را می‌توان به مختصات منحنی‌الخط انتقال داد. در آن صورت خواهیم داشت:

$$\tilde{Q}_t + \tilde{E}_\xi + \tilde{F}_\eta + \tilde{G}_\zeta = 0 \quad (3)$$

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{J}$$

جدول ۱. بردارهای ویژه و راست ماتریس ژاکوبی.

$l^1 = \left\{ \left[\frac{\gamma-1}{c} \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{\gamma-1}{c} \theta + n_x u + n_y v + n_z w \right] / \sqrt{\gamma}, \right. \\ \left. \left[\frac{\gamma-1}{c} u - n_x \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{\gamma-1}{c} v - n_y \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{\gamma-1}{c} w - n_z \right] / \sqrt{\gamma} \right\}$	$r^1 = \left\{ \left[\frac{\theta}{c} + \frac{c}{\gamma-1} - n_x u - n_y v - n_z w \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{1}{c} \right] / \sqrt{\gamma}, \right. \\ \left. \left[\frac{u}{c} - n_x \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{v}{c} - n_y \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{w}{c} - n_z \right] / \sqrt{\gamma} \right\}$
$l^2 = \left\{ -\frac{\gamma-1}{c} n_y, -\frac{\gamma-1}{c} n_y \theta + n_y c - n_z u + n_x w, \frac{\gamma-1}{c} n_y u + n_z, \right. \\ \left. \frac{\gamma-1}{c} n_y v, \frac{\gamma-1}{c} n_y w + n \right\}$	$r^2 = \left\{ \frac{\theta}{c} n_y + n_z u - n_x w, \frac{n_y}{c}, \frac{u}{c} n_y + n_z, \frac{v}{c} n_y, \frac{w}{c} n_y - n_x \right\}$
$l^3 = \left\{ -\frac{\gamma-1}{c} n_z, -\frac{\gamma-1}{c} n_z \theta + n_z c + n_y u - n_x v, \frac{\gamma-1}{c} n_z u - n_y, \right. \\ \left. \frac{\gamma-1}{c} n_z v + n_x, \frac{\gamma-1}{c} n_z w \right\}$	$r^3 = \left\{ \frac{\theta}{c} n_z - n_y u + n_x v, \frac{n_z}{c}, \frac{u}{c} n_z - n_y, \frac{v}{c} n_z + n_x, \frac{w}{c} n_z \right\}$
$l^4 = \left\{ -\frac{\gamma-1}{c} n_x, -\frac{\gamma-1}{c} n_x \theta + n_x c + n_z v - n_y w, \frac{\gamma-1}{c} n_x u, \right. \\ \left. \frac{\gamma-1}{c} n_x v - n_z, \frac{\gamma-1}{c} n_x w + n_y \right\}$	$r^4 = \left\{ \frac{\theta}{c} n_x - n_z v + n_y w, \frac{n_x}{c}, \frac{u}{c} n_x, \frac{v}{c} n_x - n_z, \frac{w}{c} n_x + n_y \right\}$
$l^5 = \left\{ \left[\frac{\gamma-1}{c} \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{\gamma-1}{c} \theta - n_x u - n_y v - n_z w \right] / \sqrt{\gamma}, \right. \\ \left. \left[-\frac{\gamma-1}{c} u + n_x \right] / \sqrt{\gamma}, \left[-\frac{\gamma-1}{c} v + n_y \right] / \sqrt{\gamma}, \left[-\frac{\gamma-1}{c} w + n_z \right] / \sqrt{\gamma} \right\}$	$r^5 = \left\{ \left[\frac{\theta}{c} + \frac{c}{\gamma-1} + n_x u + n_y v + n_z w \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{1}{c} \right] / \sqrt{\gamma}, \right. \\ \left. \left[\frac{u}{c} + n_x \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{v}{c} + n_y \right] / \sqrt{\gamma}, \left[\frac{w}{c} + n_z \right] / \sqrt{\gamma} \right\}$

$$\lambda^1 = \bar{U} - c \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\lambda^{2,3,4} = \bar{U}$$

$$\lambda^5 = \bar{U} + c \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (8)$$

و مقادیر ویژه بر روی سطوح حجم کنترل تصاویر مثبت و منفی به صورت زیر خواهند بود:

$$\lambda^i \pm = \frac{\left[\lambda^i m + \frac{1}{\gamma} \pm \left| \lambda^i m + \frac{1}{\gamma} \right| \right]}{\gamma} \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (9)$$

برای جلوگیری از وقوع موج ضربه‌یی انبساطی در شرایطی که $\left[\lambda^i(U_m) < 0 < \lambda^i(U_{m+1}) \right]$ باشد، معادله‌ی فوق به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$\lambda^i \pm m + \frac{1}{\gamma} = \lambda^i \pm m + \frac{1}{\gamma} \pm \frac{\left[\lambda^i(U_{m+1}) - \lambda^i(U_m) \right]}{\gamma} \quad (10)$$

$$\rho_{m+\frac{1}{\gamma}} = \sqrt{\rho_m} \sqrt{\rho_{m+1}}$$

$$(u, v, w)_{m+\frac{1}{\gamma}} = \frac{(u, v, w)_{m+1} \sqrt{\rho_{m+1}} + (u, v, w)_m \sqrt{\rho_m}}{\sqrt{\rho_{m+1}} + \sqrt{\rho_m}}$$

$$h_{m+\frac{1}{\gamma}} = \frac{h_{m+1} \sqrt{\rho_{m+1}} + h_m \sqrt{\rho_m}}{\sqrt{\rho_{m+1}} + \sqrt{\rho_m}} \quad (7)$$

مقادیر ویژه و ماتریس ژاکوبی راکه به صورت $\frac{\partial(\text{Flux})}{\partial Q}$ تعریف می‌شوند، با l^i و بردارهای ویژه و راست را با r^i و l^i نشان می‌دهند. روابط مربوط به بردارهای ویژه در جدول ۱ آمده است. با در نظر گرفتن:

$$\theta = \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{\gamma} \quad \text{و} \quad n_{x,y,z} = \frac{n_x, y, z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

و با تعریف مؤلفه‌ی سرعت نااهمگرد 10 به صورت $\bar{U} = n_x u + n_y v + n_z w$ مقادیر ویژه چنین خواهد بود:

$$\left[\frac{V}{\Delta t} I + \frac{\partial}{\partial q} (\Delta_j E + \Delta_k F + \Delta_l G) \right] \Delta^s q = - \left[\frac{V}{\Delta t} (q^s - Q^n) + \Delta_j E(q^s) + \Delta_k F(q^s) + \Delta_l G(q^s) \right] \quad (14)$$

همچنین با در نظر گرفتن $\Delta = \Delta_j E + \Delta_k F + \Delta_l G$ خواهیم داشت:

$$\Delta = \Delta_j E + \Delta_k F + \Delta_l G = \frac{\text{first term}}{\sum_{m=j,k,l} df_{m-\frac{1}{\gamma}} + df_{m+\frac{1}{\gamma}}} + \frac{\text{second term}}{\sum_{m=j,k,l} f \left[Q_m, N_{m+\frac{1}{\gamma}} \right] - f \left[Q_m, N_{m-\frac{1}{\gamma}} \right]} \quad (15)$$

ترم دوم معادله‌ی فوق برابر با صفر است، زیرا:

$$\sum_{m=j,k,l} \left[(n_x)_{m+\frac{1}{\gamma}} - (n_x)_{m-\frac{1}{\gamma}} \right] = 0$$

$$\sum_{m=j,k,l} \left[(n_y)_{m+\frac{1}{\gamma}} - (n_y)_{m-\frac{1}{\gamma}} \right] = 0$$

$$\sum_{m=j,k,l} \left[(n_z)_{m+\frac{1}{\gamma}} - (n_z)_{m-\frac{1}{\gamma}} \right] = 0 \quad (16)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial q} \Delta^s q = A_{j-\frac{1}{\gamma}}^+ (\Delta^s q_j - \Delta^s q_{j-1}) + A_{j+\frac{1}{\gamma}}^- (\Delta^s q_{j+1} - \Delta^s q_j) + B_{k-\frac{1}{\gamma}}^+ (\Delta^s q_k - \Delta^s q_{k-1}) + B_{k+\frac{1}{\gamma}}^- (\Delta^s q_{k+1} - \Delta^s q_k) + C_{l-\frac{1}{\gamma}}^+ (\Delta^s q_l - \Delta^s q_{l-1}) + C_{l+\frac{1}{\gamma}}^- (\Delta^s q_{l+1} - \Delta^s q_l) \quad (17)$$

با جایگزینی معادلات ۱۵ تا ۱۷ در معادله‌ی ۱۴ خواهیم داشت:

$$\left[\frac{V}{\Delta t} I + A_{j-\frac{1}{\gamma}}^+ - A_{j+\frac{1}{\gamma}}^- + B_{k-\frac{1}{\gamma}}^+ - B_{k+\frac{1}{\gamma}}^- + C_{l-\frac{1}{\gamma}}^+ - C_{l+\frac{1}{\gamma}}^- - D_{k+\frac{1}{\gamma}} + D_{k-\frac{1}{\gamma}} \right] \Delta q_{j,k,l}$$

$$- A_{j-\frac{1}{\gamma}}^+ \Delta q_{j-1,k,l} + A_{j+\frac{1}{\gamma}}^- \Delta q_{j+1,k,l}$$

$$- B_{k-\frac{1}{\gamma}}^+ \Delta q_{j,k-1,l} + B_{k+\frac{1}{\gamma}}^- \Delta q_{j,k+1,l}$$

حال می‌توان رابطه‌ی مربوط به محاسبه‌ی شارها به روش رُو و از رسته‌ی یک را چنین ارائه کرد:

$$f_{m+\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma} \left[f \left[Q_{m+1}, N_{m+\frac{1}{\gamma}} \right] + f \left[Q_m, N_{m+\frac{1}{\gamma}} \right] \right] - \frac{1}{\gamma} \left[\sum_i \left[\lambda_{m+\frac{1}{\gamma}}^{i+} - \lambda_{m+\frac{1}{\gamma}}^{i-} \right] I_{m+\frac{1}{\gamma}}^i \left[Q_{m+1} - Q_m \right] r_{m+\frac{1}{\gamma}}^i \right] = f \left[Q_m, N_{m+\frac{1}{\gamma}} \right] + \sum_i \lambda_{m+\frac{1}{\gamma}}^{i-} \alpha^i r_{m+\frac{1}{\gamma}}^i = f + df^{i-} = f \left[Q_{m+1}, N_{m+\frac{1}{\gamma}} \right] - \sum_i \lambda_{m+\frac{1}{\gamma}}^{i+} \alpha^i r_{m+\frac{1}{\gamma}}^i = f - df^{i+} \quad (11)$$

روش حل صریح

در روش صریح شارها در زمان فعلی محاسبه می‌شوند و متغیرهای Q در زمان $t + \Delta t$ به راحتی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$Q^{n+1} = Q^n - \frac{\Delta t}{Vol} \left[E_{j+\frac{1}{\gamma}} - E_{j-\frac{1}{\gamma}} + F_{k+\frac{1}{\gamma}} - F_{k-\frac{1}{\gamma}} + G_{l+\frac{1}{\gamma}} - G_{l-\frac{1}{\gamma}} \right] \quad (12)$$

مزیت این روش سادگی آن، و عیب این روش لزوم کوچک بودن گام زمانی برای پایداری حل است.

روش حل ضمنی

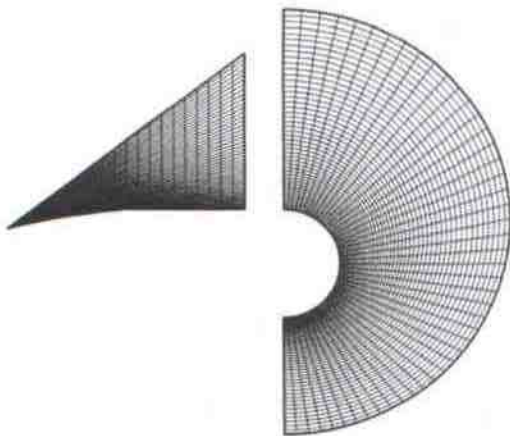
در این روش صورت بقایی معادلات اویلر، به شکل زیر جداسازی می‌شود:

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + \left[E_{j+\frac{1}{\gamma}} - E_{j-\frac{1}{\gamma}} \right]^{n+1} + \left[F_{k+\frac{1}{\gamma}} - F_{k-\frac{1}{\gamma}} \right]^{n+1} + \left[G_{l+\frac{1}{\gamma}} - G_{l-\frac{1}{\gamma}} \right]^{n+1} = 0 \quad (13)$$

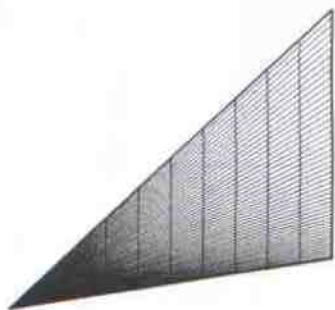
برای خطی کردن معادله‌ی غیر خطی فوق، از بسط نیوتن روابط فوق نسبت به Q استفاده می‌کنیم. برای مثال:

$$\Delta_j E^{n+1} = \Delta_j E^n + \frac{\partial \Delta_j E^n}{\partial q} \Delta q^s$$

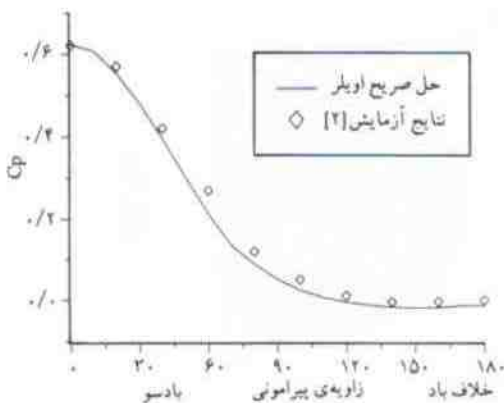
که در آن: $\Delta q^s = q^{s+1} - q^s$ یا توجه به $Q^{n+1} = q^s + \Delta q^s$ و $Q = V \times Q$ ، و با جایگزین کردن آن در معادله‌ی ۱۳ خواهیم داشت:



شکل ۲. شبکه‌ی تولید شده برای آگیو شکسته در دو مقطع عمود بر جهت‌های طولی و محیطی.



شکل ۳. شبکه‌ی تولید شده برای مخروط در مقطع عمود بر جهت‌های محیطی.



شکل ۴. توزیع فشار در محیط مخروط در عدد ماخ ۷/۹۵ و زاویه‌ی حمله‌ی ۲۴°.

نتیجه‌گیری

برای بررسی دقت برنامه‌ی رایانه‌ی تهیه شده، نتایج حاصل از این برنامه را برای حالت‌های جریان با عدد ماخ ۷/۹۵ بر روی یک مخروط با زاویه‌ی رأس ۲۰° در زوایای حمله‌ی ۲۰° و ۲۴° و جریان با عدد ماخ ۳ بر روی یک آگیو شکسته در زوایای حمله‌ی ۶° و ۱۰° با نتایج آزمایشگاهی قبلی (۱۲ و ۱۳) مقایسه می‌شود.

در شکل ۴، توزیع فشار بر روی مخروط در زاویه‌ی حمله‌ی ۲۴°

$$\begin{aligned}
 & -C^+ l - \frac{1}{r} \Delta q_{j,k,l-1} + C^- l + \frac{1}{r} \Delta q_{j,k,l+1} \\
 & + D_{k-\frac{1}{r}} \Delta q_{j,k-1,l} - D_{k+\frac{1}{r}} \Delta q_{j,k+1,l} = \\
 & - \left[\Delta_j E(q^s) + \Delta_k F(q^s) + \Delta_l G(q^s) + \frac{V}{\Delta t} (q^s - Q^n) \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$A_{j \pm \frac{1}{r}}^{\pm} = R_{j \pm \frac{1}{r}} \Lambda_{j \pm \frac{1}{r}}^{\pm} L_{j \pm \frac{1}{r}}^{\pm}$$

$$B_{k \pm \frac{1}{r}}^{\pm} = R_{k \pm \frac{1}{r}} \Lambda_{k \pm \frac{1}{r}}^{\pm} L_{k \pm \frac{1}{r}}^{\pm}$$

$$C_{l \pm \frac{1}{r}}^{\pm} = R_{l \pm \frac{1}{r}} \Lambda_{l \pm \frac{1}{r}}^{\pm} L_{l \pm \frac{1}{r}}^{\pm}$$

$$\Lambda^{\pm} = (\Lambda + |\Lambda|) / 2 \quad (19)$$

که در آن Λ ماتریسی قطری است که المان‌های قطری آن مقادیر ویژه‌اند. با توجه به مراحل گفته شده، حل معادلات خطی حاصل هنوز مشکل است چرا که گره (j,k,i) به شش گره همسایه مربوط می‌شود، و حل چنین دستگاه خطی، با توجه به تعداد دفعاتی که باید حل شود، مناسب نیست (ماتریس ضرایب یک ماتریس هفت قطری با بلوک 5×5 است). بدین سبب با شیوه‌ی ارائه شده در زیر، سعی می‌کنیم این مشکل را مرتفع سازیم. بدین صورت که گره‌هایی را که در جهت جاروب حوزه‌ی حل وجود دارد، در سمت چپ سیستم معادلات خطی نگه می‌داریم و بقیه‌ی ترم‌ها را به ترم چشمه منتقل می‌کنیم. بدین ترتیب دستگاه معادلات خطی حاصل، یک دستگاه با ماتریس ضرایب بلوک سه قطری با بلوک‌های 5×5 است که با الگوریتم توماس به راحتی قابل حل است. پس از جاروب کردن i ها برای تمام k و j ها، روند را با جارو کردن k ها در تمام i و j ها انجام می‌دهیم. این روند تا جایی که باقیمانده از یک مقدار خیلی کوچک کمتر شود ادامه پیدا می‌کند. به عبارت دیگر

$$\sum_{m=i,j,k} \rho_m^{n+1} - \rho_m^n < \epsilon$$

تولید شبکه

برای تولید شبکه حول اجسام مورد نظر، در هر مقطع در جهت طولی، شبکه‌ی دوبعدی از نوع O تولید می‌شود و سپس با وصل کردن این شبکه‌های دوبعدی، شبکه‌ی سه‌بعدی مورد نظر به دست می‌آید. در شکل ۲ شبکه‌ی حول یک آگیو شکسته در دو مقطع عمود بر جهت محیطی و جهت طولی نشان داده شده است. در شکل ۳ نیز شبکه‌ی حول یک مخروط در مقطع عمود بر جهت محیطی نشان داده شده است.

به دست آمده با روش صریح با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. نتیجه‌ی به دست آمده از دقت قابل قبولی برخوردار است. در شکل ۵، نتایج به دست آمده از دو روش صریح و ضمنی با نتایج آزمایش در زاویه‌ی حمله‌ی 20° مربوط به مخروط مقایسه شده است. دقت هر دو روش تقریباً یکسان است. این انطباق برای تمام حالت‌ها نیز تکرار شده است، که به همین دلیل در نتایج بعدی تنها روش ضمنی با نتایج آزمایش مقایسه شده است.

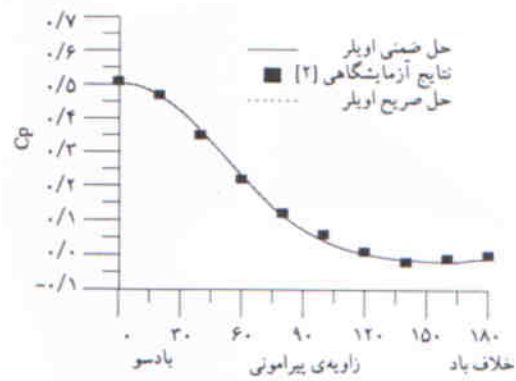
در شکل ۶ خطوط هم فشار و هم ماک مقطع جریان در یک مقطع عمود بر جهت محیطی در موقعیت خلاف باد نشان داده شده است. این شکل موج ضربه‌ی بیرونی و ناحیه‌ی بعد از موج به وضوح مشخص می‌باشد.

در شکل ۷ خطوط هم فشار و هم ماک کل، در یک مقطع عمود بر جهت طولی نشان داده شده است. در این شکل موج ضربه‌ی بیرونی و نیز موج ضربه‌ی مقطع جریان قابل تشخیص است.

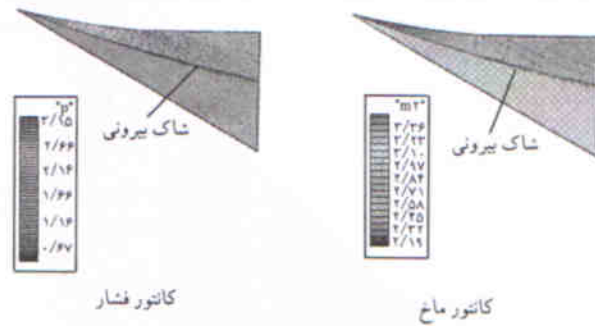
در اشکال (۸-۱۱)، توزیع فشار بر روی یک اگیو شکسته در مقاطع مختلف عمود بر جهت طولی با استفاده از روش ضمنی با نتایج آزمایش مقایسه شده است. پیش بینی حل عددی تا حدی قابل قبول است. در مقطعی که جدایی جریان رخ داده است به دلیل در نظر نگرفتن لزجت در معادلات اویلر دقت تا حدودی کم تر است. کمی دقت در محدوده‌ی بادسو نیز مشاهده شده است^[۱۱] که علت آن استفاده از ترم‌های مرتبه‌ی اول است.

عدم دقت معادلات اویلر در پیش‌بینی مشخصات جریان در شکل‌های (۱۲-۱۵)، واضح تر است. چرا که در زاویه‌ی حمله‌ی 10° ناحیه‌ی جدایی جریان بزرگ تر و رفتار جریان پیچیده تر است. به همین دلیل دقت جواب‌ها در ناحیه‌ی موقعیت خلاف باد، به خصوص در مقاطع انتهایی رضایت بخش نیست. از شکل‌های ۱۱ و ۱۵ مربوط به مقطع $\frac{x}{d} = 5/77$ که اولی مربوط به زاویه‌ی حمله‌ی 6° و دومی مربوط به زاویه‌ی حمله‌ی 10° است، مشاهده می‌شود که اثر وجود ناحیه‌ی جدا شده در زاویه‌ی حمله‌ی بیشتر تا چه حد بر روی توزیع فشار اثر گذارده و آنرا به مراتب از پیش‌بینی فشار ناشی از معادلات اویلر دور تر کرده است. علاوه بر آن، تداخل موج ضربه‌ی مقطع جریان و لایه‌ی مرزی سبب پیچیده تر شدن شرایط جریان در این حالت می‌شود. برای پیش‌بینی دقیق تر جریان در این حالت استفاده از معادلات رایانه‌ی که ترم‌های لزج را نیز در بر دارند، اجتناب ناپذیر است.

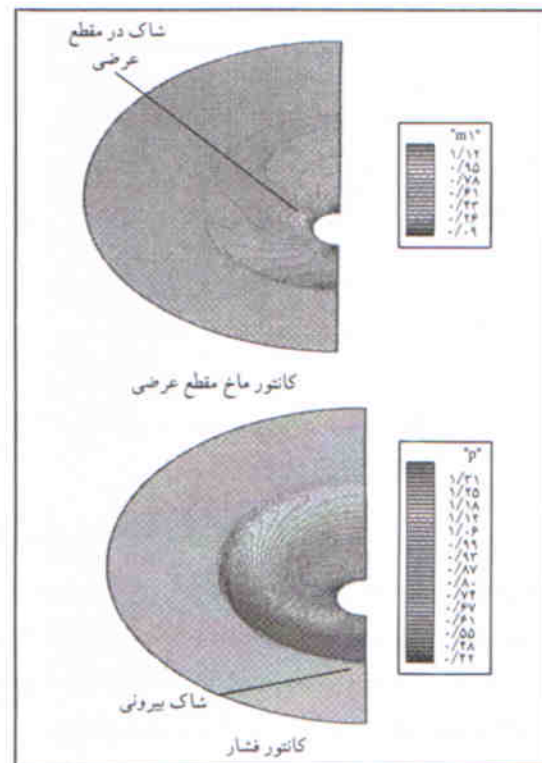
در جمع‌بندی نتایج ارائه شده می‌توان گفت که توزیع فشار بر روی مخروط، علی‌رغم زاویه‌ی حمله‌ی زیاد بهتر از توزیع فشار بر



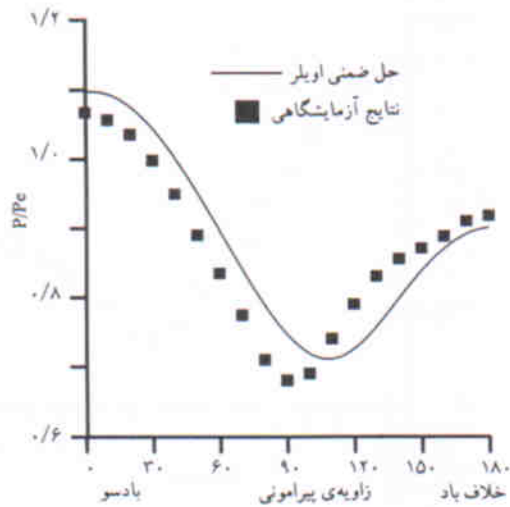
شکل ۵. توزیع فشار در محیط مخروط در عدد ماک ۷/۹۵ و زاویه‌ی حمله‌ی 20° .



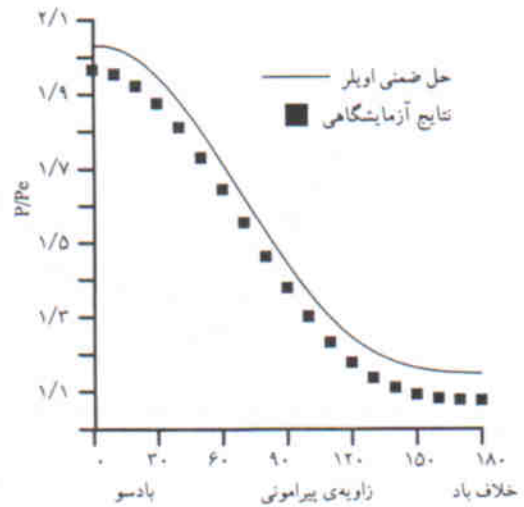
شکل ۶. خطوط هم فشار و هم ماک در مقطع موقعیت خلاف باد اگیو شکسته در عدد ماک ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 10° .



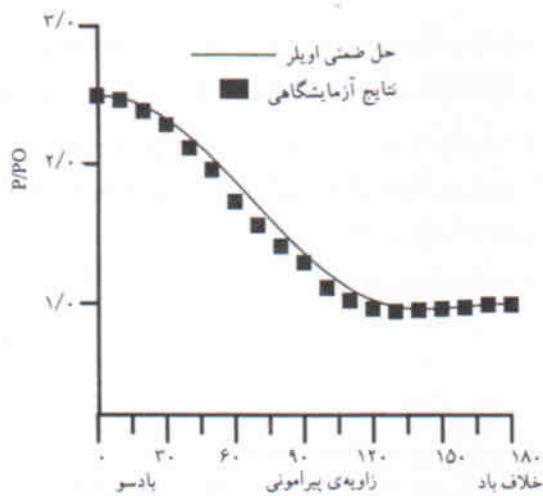
شکل ۷. خطوط هم فشار و هم ماک مقطع جریان در مقطع اگیو شکسته در عدد ماک ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 10° .



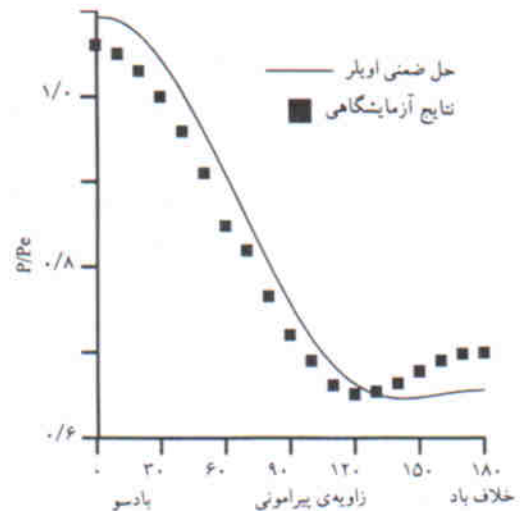
شکل ۱۱. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 6° در $X/D=5/77$.



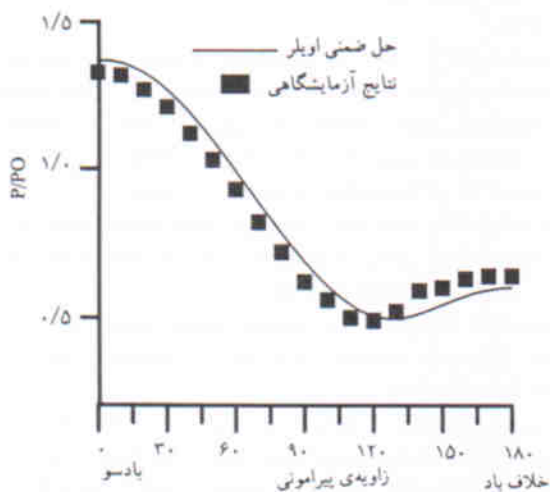
شکل ۸. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 6° در $X/D=1/56$.



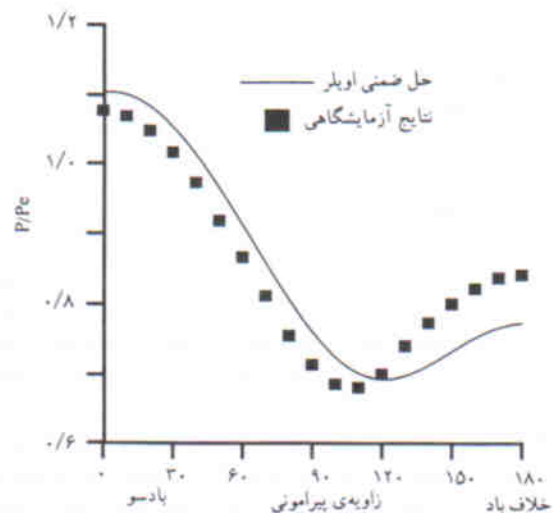
شکل ۱۲. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 10° در $X/D=1/56$.



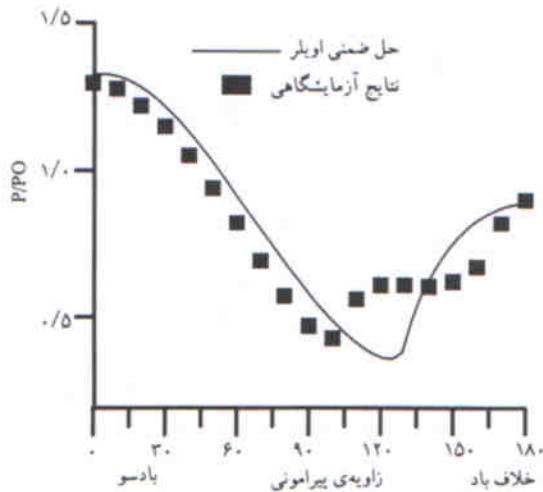
شکل ۹. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 3° در $X/D=3/13$.



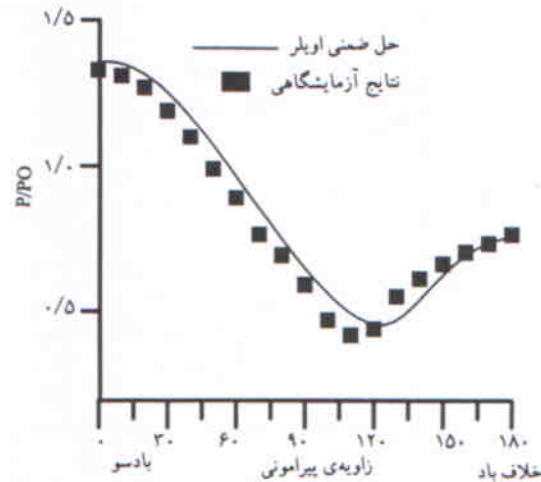
شکل ۱۳. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 10° در $X/D=3/13$.



شکل ۱۰. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویه‌ی حمله‌ی 6° در $X/D=4/22$.



شکل ۱۵. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در ماخ ۳ و زاویهی حملهی 10° در $X/D=5/77$.



شکل ۱۴. توزیع فشار در محیط آگیو شکسته در عدد ماخ ۳ و زاویهی حملهی 10° در $X/D=4/22$.

می شود. در ضمن جواب های به دست آمده با دو روش صریح و ضمنی یکسان است. با این تفاوت که گام زمانی مجاز در روش ضمنی یک تا دو رسته از روش صریح بیشتر است و زمان رسیدن به جواب حالت دائمی را به شدت کاهش می دهد. برای شبکهی $20 \times 50 \times 50$ زمان اجرای برنامه رایانه ای بر روی یک CPU PIII³⁰⁰ با روش صریح ۴۸ ساعت و با روش ضمنی ۱۲ ساعت است.

روی آگیو شکسته در زاویهی حملهی کمتر. به دست آمده است. و این به دلیل عدد ماخ خیلی زیاد جریان بر روی مخروط (۷/۹۵) است. چرا که محدودهی جریان لزج و ناحیهی جدایی جریان به جسم چسبیده و کوچک می شود. در حالی که برای جریان بر روی آگیو شکسته، که در عدد ماخ کمتری قرار دارد، اثرات لزجت به حوزهی وسیع تری منتقل و از دقت نتایج به دست آمده از معادلهی اویلر کاسته

پانوش

1. finite volume
2. secant ogive
3. navier- stokes equation
4. super computer
5. dissipative terms
6. upwinding
7. eigen values
8. fluxe
9. numerical fluxes
10. contravariant

منابع

1. Edge, H., Sahu, J., Sturek, W. and Behr, M., "Cfd computations with ZNSflow CHSSI software", Dept. of Defence High Performance Computing Program, User Group Conference (1999).
2. Behr, M., Pressel, D.M., and Sturek, W.B., "Comments on CFD code performance on scalable architectures", *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, pp. 263-277 (2000).
3. Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External*

Flows, 2 Wiely, NewYork (1990).

4. Lax, P. D. and Wendroff, B., "System of conservation Laws," *Comm. Pure Appl. Math*, 13 pp. 217-237 (1960).
5. MacCormack, R. W., "The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering," *AIAA Paper 69-354*, Cincinnati, Ohio (1969).
6. Godonov, S. K. , "A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations." *Math. Sbornic*, 47 pp. 271-306 (in Russian), Translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226 (1969).
7. Osher, S. , "Numerical solution of singular perturbation problems and hyperbolic system of conservation laws." In O. Axelsson et al. (eds), *Mathematical Studies*, (47), Amsterdam: North Holland, (February, 1981).
8. Roe, P. L. "Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes" *Journal of Computational Physics*, 43 pp. 357-372 (1983).
9. Lawrence, S.L., Chaussee, D. S., and Tannehill, J. C., "Application of an upwind algorithm to the three dimensional parabolized navier- stokes equations", *AIAA Journal*, 28 (6), pp. 971-972 (June 1990).
10. Mazaheri, K and Abbasian, A., "Numerical solution of the

- euler equations for axi-symmetric flow", *Iranian Journal of Science and Technology*, **22** (1), Transaction B (1998).
11. Alishahi, M.M., Emdad, H. and Goshtasbi Rad, E., "Solution of three dimensional euler equations using first and second order upwinding algorithm", *Iranian Journal of Science and Technology*, **24** (3), Transaction B (2000).
 12. Chakravarthy, S. R. and Szema, K. Y., "Euler solver for three dimensional supersonic flows with subsonic pockets" *J. Aircraft*, **24** (2), pp. 73-83 (February 1987).
 13. Tracy, R. R., "Hypersonic flow over a yawed circular cone," Memorandum (69) California Institute of Technology Graduate Aeronautical Laboratories, Pasadena, Calif., (Aug. 1963)
 14. Raklis R.P., and Sturek W.B., "Surface pressure measurements on slender bodies at angle of attack at supersonic speeds," U.S. army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, Maryland ARBRL-MR-02876 (Nov.1978) (AD A064097).