

یافتن مقدار سفارش و برنامه‌ی تخفیف در زنجیره‌ی

عرضه‌ی دوسطحی

شادی حاجی‌نوروزی (کارشناس ارشد)
سید تقی اخوان‌نیاکی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

زنجیره‌ی عرضه دربرگیرنده‌ی همه‌ی فعالیت‌های مربوط به تولید و تحویل محصول یا خدمت نهایی، از تأمین‌کننده‌ی تأمین‌کنندگان به مشتری‌های یک مشتری است. مدیریت زنجیره‌ی عرضه فرایند اداری موجودی و تقاضا، تهیه‌ی مواد اولیه و قطعات، تولید و مونتاژ، انبار کردن و اداره‌ی انبار، دریافت و مدیریت سفارش، و توزیع و تحویل به مشتری را شامل می‌شود. این فرایند با نگاهی جامع به تمامی مراحل ایجاد یک محصول یا یک خدمت، سعی در یکپارچگی، هماهنگی، بهبود عملکرد و کاهش هزینه‌های کل اجزای زنجیره دارد. در این نوشتار، مسئله‌ی تخفیف با یک نقطه‌ی تخفیف بردو حالت تخفیف نموی و تخفیف کلی در یک زنجیره‌ی عرضه‌ی دو سطحی با یک تأمین‌کننده و چندین خریدار متفاوت و با هدف بیشینه کردن سود تأمین‌کننده و کمینه کردن ضمنی هزینه (مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی، نگهداری و خرید) خریداران، مدل و حل می‌شود. خروجی‌های مدل، میزان سفارش خریداران و برنامه‌ی تخفیف تأمین‌کننده است.

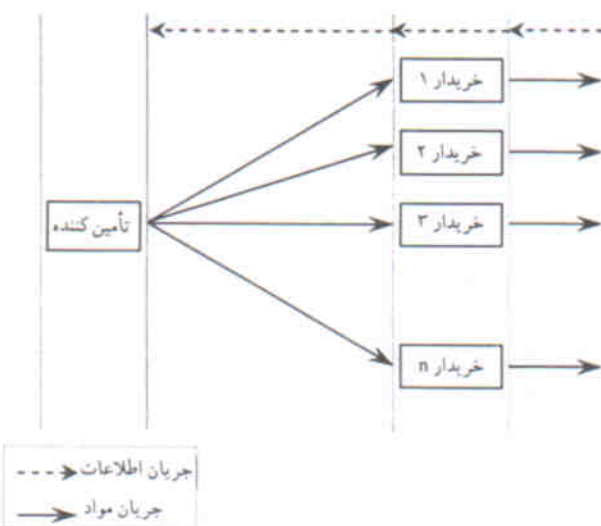
مقدمه

در بسیاری از مدل‌های کنترل موجودی فرض بر این است که هزینه‌ی واحد کالا ثابت و مستقل از مقدار سفارش (خرید یا تولید) است. ولی این فرض در دنیای واقعی همیشه درست نیست. مثلاً وقتی مواد خریداری می‌شود، فروشنده‌ی مواد می‌تواند بسته به مقدار خرید، قیمت فروش هر واحد را تعدیل کند و به‌صورت مختلف برای خریدهای با حجم زیاد تخفیف^۱ قائل شود. این درحالی است که در بسیاری از این موقعیت‌ها، ملاحظات گوناگونی با یکدیگر در تضاد قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال با افزایش حجم سفارش و در نتیجه تخفیفی که توسط تأمین‌کننده منظور می‌شود، قیمت واحد خرید کاهش می‌یابد، ولی هزینه‌ی نگهداری موجودی افزایش می‌یابد. بنابراین خریداران باید تبادلات بین هزینه‌ها و درآمدهای ناشی از افزایش حجم سفارش را در نظر گرفته و به یک تصمیم‌گیری درست در مورد میزان خرید برسند. به‌همین ترتیب، تأمین‌کنندگان باید با برنامه‌ریزی مناسب میزان تخفیف، و ترغیب خریداران به سفارش‌دهی بیشتر، سود ناشی از فروش محصول خود را افزایش دهند.

محققین بازاریابی و اقتصاد سه دلیل اصلی برای تخفیف پیشنهاد می‌کنند: (۱) ایجاد تمایز کامل^۲ در مقابل خریداری منفرد یا گروهی هماهنگ از خریداران، (۲) ایجاد تمایز جزئی^۳ در مقابل گروهی ناهماهنگ از خریداران، و (۳) ایجاد بهبود کارایی تراکنش^۴ بین فروشنده و خریدار.^[۱]

دَلان طی یک بررسی جامع، انگیزه‌های مختلف برای تخفیف دادن را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است.^[۱] اگر چه راهکارهای اخیر خرید، بر تأمین قطعات با کیفیت بالاتر تأکید دارند، هنوز هم کاهش هزینه یکی از مهم‌ترین عوامل رقابت در بازار است. ترکیب مدل‌های سفارش‌دهی و تخفیف، به تصمیم‌گیری در مورد میزان خرید کمک خواهد کرد. به‌علاوه، با استفاده از تخفیف می‌توان سود خریدار و فروشنده را توأمأً بیشینه کرد. بنابراین مشکل تأمین‌کننده در طرح برنامه‌ی تخفیف آن است که چگونه در عین ممانعت از تحمیل هزینه‌ی اضافی به خریداران، سودش بیشینه شود.

ایده‌ی اولیه‌ی مدل‌های تخفیفی که در زنجیره‌های عرضه مطرح است ابتدا توسط کروتز^[۲] مطرح، و سپس توسط دَلان^[۱] فرموله شد. دَلان نشان داد که همکاری بین خریدار و تأمین‌کننده ممکن است باعث کاهش هزینه‌های مشترک دو بنگاه در شرایط تخفیف نسبی شود. تخفیف ممکن است مستقیماً سبب کاهش هزینه‌های تأمین‌کننده نشود، اما وسیله‌ی باشد برای افزایش سهم بازار وی، زیرا خریدار را ترغیب به سفارش‌دهی بیشتر می‌کند. به‌عبارت دیگر در بازارهای رقابتی، تخفیف برای هر دو سطح خریدار و فروشنده مفید است. دَلان ابتدا مسئله را از دید خریدار حل کرد و سپس جواب حاصل را برای فروشنده تعدیل کرد. لام و وانگ مدل دَلان را برای محاسبه‌ی تعداد نقاط تخفیف قیمتی، مقدار تخفیف و مقدار سفارش به کمک برنامه‌ریزی فازی توسعه دادند.^[۱] این مدل با حل همزمان



شکل ۱. نمایی از مسئله‌ی مورد بررسی.

۶. در صورتی که تأمین‌کننده، خود تولیدکننده‌ی محصول باشد، سیاست تولید سفارشی دارد، و چنانچه توزیع‌کننده باشد، تنها به صورت یک نقطه‌ی توزیع و بدون انبار نگاه‌داری محصول عمل می‌کند. این فرض به دلیل ساده‌سازی مدل و در نظر نگرفتن هزینه‌ی نگاه‌داری تأمین‌کننده اختیار شده است.

هدف از مدل ارائه‌شده، پیشینه کردن سود کل تأمین‌کننده ناشی از فروش محصول، و کمینه کردن ضمنی هزینه‌ی کل خریداران (مجموع هزینه‌های سفارش‌دهی، نگاه‌داری و خرید) است. در این زمینه نمادهای زیر برای مدل کردن مسئله در ارتباط با تأمین‌کننده به کار می‌روند.

A_i = هزینه‌ی سفارش‌دهی خریدار i ام

c = قیمت تمام‌شده‌ی واحد کالا

p = قیمت پایه‌ی فروش واحد کالا

$R = (0 < R < 1)$ نرخ تخفیف

B = نقطه‌ی تخفیف

(R, Q) = برنامه‌ی تخفیف

برای خرید i ام نیز از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

$i = (1, 2, 3, \dots, n)$

n = تعداد خریداران

D_i = مقدار تقاضا در واحد زمان

Q_i = مقدار سفارش

a_i = هزینه هر بار سفارش‌دهی

h_i = هزینه‌ی نگاه‌داری هر واحد کالا (ضریبی از قیمت)

مسئله از دید خریدار و فروشنده جواب مفیدتری نسبت به مدل دُلان ارائه می‌دهد و سطح رضایت یکسانی را برای هر دو سطح زنجیره ایجاد می‌کند. لال و استالین نیز مدل دُلان را به نحوی توسعه دادند که هر دو سطح خریدار و فروشنده از رسیدن به سود بیشینه‌ی مشترک مطمئن باشند.^[۵] در مدل آنها، فروشنده تولیدکننده‌ی محصول است و با خریداران مشابهی که هزینه‌های سفارش‌دهی، نگاه‌داری و تقاضای یکسانی دارند مواجه است.

مطالعه‌ی انجام شده در این نوشتار از این جهت با مطالعات قبلی متفاوت است که عوامل هزینه‌ی (سفارش‌دهی و نگاه‌داری) برای خریداران متفاوت در نظر گرفته می‌شود و مسئله در هر دو حالت تخفیف کلی و تخفیف نموی بررسی می‌شود. برای این کار، در ادامه به تعریف دقیق مسئله، فرضیات و نمادهای مورد استفاده می‌پردازیم. سپس، در مبحث بعدی توسعه‌ی مدل در حالت تخفیف نموی ارائه می‌شود. پس از آن به حل مدل تخفیف نموی می‌پردازیم و روشی برای تعیین برنامه‌ی تخفیف قیمت تأمین‌کننده در دو حالت (۱) نرخ تخفیف مشخص؛ (۲) میزان تخفیف مشخص، ارائه می‌کنیم. توسعه‌ی مدل در حالت تخفیف کلی و سپس حل آن در بخش‌های بعد مطرح می‌شود.

تعریف مسئله، نمادها و فرضیات مدل

یک زنجیره‌ی عرضه‌ی دوسطحی، شامل یک تأمین‌کننده و تعدادی خریدار را در نظر بگیرید (شکل ۱). خریداران با توجه به ساختار هزینه‌ی خرید ارائه شده توسط تأمین‌کننده و نیاز خود، میزان سفارش خود را به تأمین‌کننده اعلام می‌کنند. برای مدل کردن مسئله‌ی تخفیف، فرض می‌کنیم:

۱. برنامه‌ی قیمت تأمین‌کننده به صورت تخفیف نموی یا تخفیف کلی شامل یک نقطه‌ی تخفیف قیمت است.

۲. سیاست سفارش‌دهی خریداران بر پایه‌ی مقدار سفارش اقتصادی^۵ (EOQ) با تقاضای قطعی و مشخص برای یک محصول، بدون مجاز بودن کمبود و با زمان تحویل قطعی و مشخص، استوار است.

۳. تعداد خریداران و تقاضای کل خریدار مستقل از برنامه‌ی تخفیف ارائه شده است.

۴. تعداد سفارشات به‌عنوان یک متغیر پیوسته در نظر گرفته می‌شود.
۵. تأمین‌کننده می‌تواند خود تولیدکننده‌ی محصول باشد یا نقش توزیع محصول را بر عهده داشته باشد. در حالتی که تأمین‌کننده، تولیدکننده‌ی محصول است، ظرفیت تولید بیش از مجموع تقاضای خریداران است.

توسعه‌ی مدل در حالت تخفیف نموی

برای تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده که از نوع نموی است، فرض کنید قیمت واحد کالا با برنامه‌ی تخفیف (R,B) به صورت زیر است:

مقدار	قیمت خرید
$Q_i < B$	p
برای هر واحد $Q_i \geq B$	$p(1-R)$

در این حالت کل هزینه‌ی خرید برای مقادیر کوچک‌تر از B معادل pQ_i و برای مقادیر بزرگ‌تر از B برابر $pB + p(1-R)(Q_i - B)$ است. متوسط قیمت خرید نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

مقدار	متوسط قیمت خرید (p_i)
$Q_i < B$	p
برای هر واحد $Q_i \geq B$	$p(1-R) + \frac{pRB}{Q_i}$

تأمین‌کننده برای تأمین سفارش خریدار Q_i خود ناچار به سفارش‌دهی و خرید است. هزینه‌ی تأمین‌کننده در واحد زمان، که به‌ازای تأمین سفارش خرید Q_i بر وی تحمیل می‌شود، شامل هزینه‌ی سفارش‌دهی و قیمت تمام‌شده‌ی کالاهایی است که در اختیار خریدار قرار می‌گیرد. چنانچه Q_i مقدار سفارش‌دهی خریدار Q_i در هر بار سفارش باشد، سود خالص (PR) تأمین‌کننده در واحد زمان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$PR(R,B) = \sum_{i=1}^n [p_i D_i - A_i (\frac{D_i}{Q_i}) - c D_i] \quad (1)$$

آخرین جمله از عبارت 1 مستقل از متغیرهای تصمیم است؛ بنابراین تأمین‌کننده با مسئله‌ی $\text{Max}_{R,B} PR(R,B)$ مواجه است، به طوری که:

$$PR(R,B) = \sum_{i=1}^n [P_i D_i - A_i (\frac{D_i}{Q_i})]$$

از طرف دیگر هر خریدار به‌عنوان یک تصمیم‌گیرنده سعی در کمینه کردن کل هزینه‌ها در واحد زمان دارد. کل هزینه‌ی هر خریدار شامل هزینه‌های سفارش‌دهی، نگهداری و خرید است. در نتیجه کل هزینه‌ی خریدار Q_i در واحد زمان، $TC_i(Q_i)$ ، مجموع هزینه‌های ذکر شده به صورت:

$$TC_i(Q_i) = a_i \frac{D_i}{Q_i} + h_i p_i \frac{Q_i}{\gamma} + p_i D_i \quad (2)$$

است، و خریدار Q_i با مسئله‌ی $\text{Min}_{Q_i} TC_i(Q_i)$ مواجه است، به طوری که:

$$TC_i(Q_i) = a_i \frac{D_i}{Q_i} + h_i p_i \frac{Q_i}{\gamma} + p_i D_i$$

بنابراین مدل مسئله‌ی مورد بررسی چنین خواهد بود:

$$\text{Max}_{R,B} PR(R,B) = \sum_{i=1}^n [p_i D_i - A_i (\frac{D_i}{Q_i})]$$

$$\text{Min}_{Q_i} TC_i(Q_i) = a_i \frac{D_i}{Q_i} + h_i p_i \frac{Q_i}{\gamma} + p_i D_i$$

$$i = (1, 2, 3, \dots, n)$$

$$P_i = \begin{cases} p & Q_i < B \\ p(1-R) + \frac{pRB}{Q_i} & \text{برای هر واحد } Q_i \geq B \end{cases}$$

$$0 < R < 1$$

$$B, Q_i \geq 0$$

حل مدل در حالت تخفیف نموی

منظور از حل مدل، یافتن متغیرهای تصمیم، یعنی مقدار سفارش اقتصادی خریداران و برنامه‌ی تخفیف تأمین‌کننده است. اگر $TC_i(Q_i)$ برای مقادیر $Q_i < B$ را $TC_{1i}(Q_i)$ ، و اگر برای $Q_i > B$ این مقدار را $TC_{2i}(Q_i)$ بنامیم، برای یافتن مقدار سفارش اقتصادی خریداران، با فرض مشخص بودن برنامه‌ی تخفیف تأمین‌کننده، لازم است که ابتدا مشتق اول $TC_i(Q_i)$ را نسبت به Q_i مساوی صفر قرار دهیم:

$$\frac{dTC_i(Q_i)}{dQ_i} = \frac{-a_i D_i}{Q_i^2} + (\frac{dp_i}{dQ_i}) (\frac{h_i Q_i}{\gamma} + D_i) + \frac{h_i p_i}{\gamma} = 0 \quad (3)$$

حال اگر تخفیف مطرح نباشد، میزان سفارش خریدار Q_i با قیمت ثابت p برابر است:

$$Q_{ai} = \sqrt{2a_i D_i / h_i p} \quad (4)$$

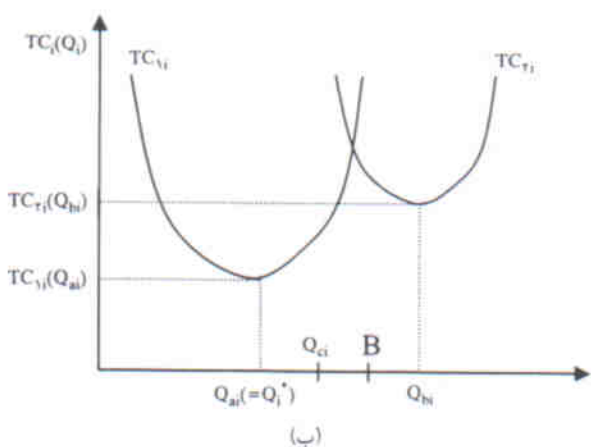
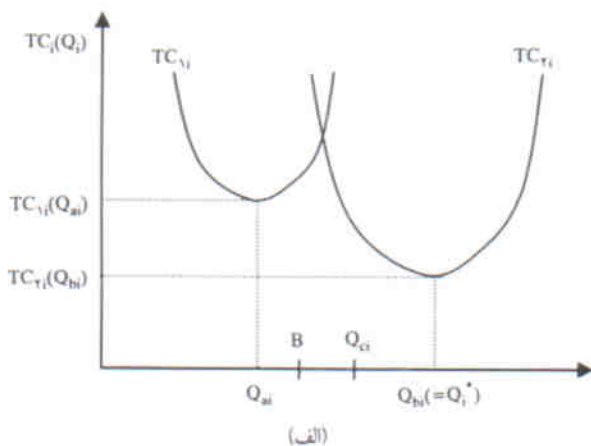
و در صورت وجود تخفیف، کم‌ترین مقدار $TC_{2i}(Q_i)$ در Q_{bi} اتفاق می‌افتد:

$$Q_{bi} = \sqrt{2D_i(a_i + RpB) / h_i p(1-R)} = \sqrt{(Q_{ai}^2 h_i + 2RBD_i) / h_i(1-R)} \quad (5)$$

حال چون $Q_{bi} \geq Q_{ai}$ آنگاه، $TC_{2i}(Q_i)$ و $TC_{1i}(Q_i)$ در کمترین مقدار خود به صورت زیر خواهند بود:

$$TC_{1i}(Q_{ai}) = \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i$$

$$TC_{2i}(Q_{bi}) = \sqrt{2(a_i + RpB) h_i p(1-R) D_i} + h_i R p B / \gamma + p(1-R) D_i \quad (6)$$



شکل ۲. نمودار تابع هزینه خریدار نسبت به موقعیت نقطه تخفیف.

$$PR_i(R, B) = p_i D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_i} \right)$$

با داشتن برنامه تخفیف (R, B) می توان خریداران را به دو گروه G_1 و G_2 تقسیم کرد:

- $G_1 = \{i \mid Q_{ci} < B\}$
برای $i \in G_1$, $Q_i^* = Q_{ai}$, $PR_i = PR_{1i}$
- $G_2 = \{i \mid Q_{ci} \geq B\}$
برای $i \in G_2$, $Q_i^* = Q_{bi}$, $PR_i = PR_{2i}$

به طوری که:

$$PR_{1i} = p D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_{ai}} \right) \quad (10)$$

$$PR_{2i} = \left[p(1-R) + \frac{RpB}{Q_{bi}} \right] D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_{bi}} \right) = \left[p(1-R) + \frac{RpB - A_i}{\sqrt{(Q_{ai}^2 h_i + 2RBD_i)/h_i(1-R)}} \right] D_i \quad (11)$$

از آنجا که مقدار p ثابت است، $TC_{1i}(Q_{bi})$ مقدار ثابتی دارد. اما مقدار $TC_{2i}(Q_{bi})$ با تغییر مقدار B تغییر می کند. ثابت کرده اند که نقطه ی بهینه سفارش دهی یکی از نقاط Q_{bi} و Q_{ai} است و قطعاً نقطه ی تخفیف نخواهد بود.^[۶] حال برای تعیین این که کدام یک از دو مقدار Q_{bi} و Q_{ai} مقدار بهینه سفارش دهی خریدار i است، باید با فرض ثابت بودن مقدار R مقادیر هزینه ی $TC_{1i}(Q_{ai})$ و $TC_{2i}(Q_{bi})$ را نسبت به تغییر موقعیت نقطه ی تخفیف مقایسه کرد. بدین منظور ابتدا نقطه ی تخفیفی را که در دو مقدار $TC_{1i}(Q_{ai})$ و $TC_{2i}(Q_{bi})$ مطلوبیت هزینه ی یکسانی ایجاد می کند، با تساوی دو مقدار تعیین می کنیم و آن را Q_{ci} می نامیم.

$$TC_{2i}(Q_{bi} \mid B=Q_{ci}) = TC_{1i}(Q_{ai})$$

$$\sqrt{2(a_i + RpQ_{ci})h_i p(1-R)D_i + h_i RpQ_{ci}} / 2 + p(1-R)D_i = \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i \quad (7)$$

پس از مرتب کردن عبارت فوق و حل معادله داریم:

$$Q_{ci} = 2 \frac{(1 - \sqrt{1-R})}{R} \left(Q_{ai} + \frac{2D_i}{h_i} \right) - 2 \frac{D_i}{h_i} \quad (8)$$

با توجه به معادلات (۶)، $TC_{2i}(Q_{bi})$ نسبت به B افزایشی است در حالی که $TC_{1i}(Q_{ai})$ یا افزایش B ثابت می ماند. همچنین چنانکه ذکر شد $B=Q_{ci}$ مطلوبیت یکسانی در دو مقدار هزینه ی فوق ایجاد می کند. بنابراین با کاهش مقدار B از Q_{ci} ، $TC_{2i}(Q_{bi})$ کم تر از $TC_{1i}(Q_{ai})$ ، و با افزایش B از Q_{ci} ، $TC_{2i}(Q_{bi})$ بیشتر از $TC_{1i}(Q_{ai})$ خواهد شد.

$$TC_{1i}(Q_{ai}) \geq TC_{2i}(Q_{bi}) \quad \text{به ازای} \quad B \leq Q_{ci}$$

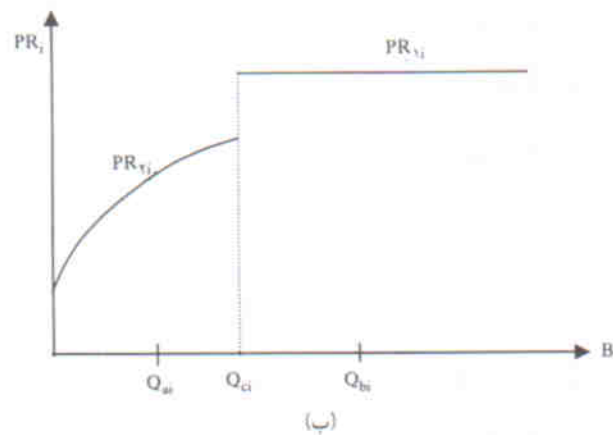
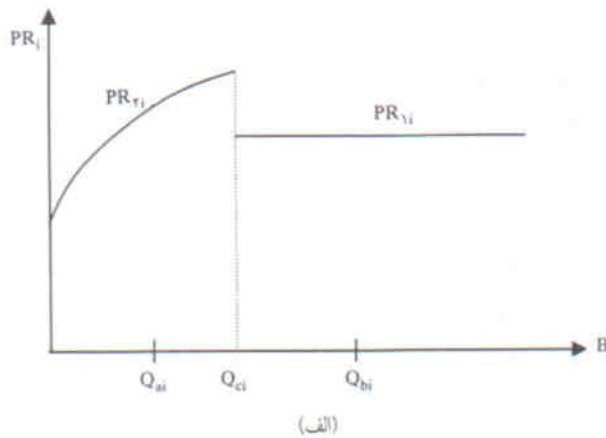
$$TC_{1i}(Q_{ai}) < TC_{2i}(Q_{bi}) \quad \text{به ازای} \quad B > Q_{ci}$$

یعنی برای مقدار ثابت R ، مقدار بهینه سفارش خریدار i ، Q_i^* وابسته به نقطه ی تخفیف B خواهد بود:

$$Q_i^* = Q_{bi} \quad \text{به ازای} \quad B \leq Q_{ci}$$

$$Q_i^* = Q_{ai} \quad \text{به ازای} \quad B > Q_{ci} \quad (9)$$

برای محاسبه ی این مقدار سفارش، ابتدا باید Q_{ci} را برای هر خریدار محاسبه و با نقطه ی تخفیف مقایسه کرد. نتیجه ی حاصل انتخاب یکی از دو مقدار Q_{bi} و Q_{ai} است. شکل ۲ منحنی هزینه ی خریدار i و نیز Q_i^* را که وابسته به موقعیت نسبی B و Q_{ci} است، نشان می دهد. چنانچه $PR_i(R, B)$ را سهم خریدار i در سود خالص تأمین کننده در واحد زمان در نظر بگیریم، داریم:



شکل ۳. سهم خریدار از سود تأمین‌کننده (با مقدار ثابت R_p).

برای تعیین مقدار B از $\max_B PR(R_p, B)$ استفاده می‌کنیم. همچنین $PR(R_p, B)$ را به ازای مقادیر B در بازه (X_r, ∞) که در آن همه‌ی خریداران متعلق به G_1 هستند، تعیین می‌کنیم. سپس نتایج را مقایسه کرده و مقداری از B که بیشترین مقدار PR را ارائه می‌دهد، به عنوان نقطه‌ی تخفیف مناسب پیشنهادی تأمین‌کننده انتخاب می‌کنیم.

ب) تعیین برنامه‌ی مناسب تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده با نقطه‌ی تخفیف مشخص

گاهی ممکن است نقطه‌ی تخفیف به دلیل حجم تولید، نوع تجهیزات و یا ظرفیت روش‌های مختلف حمل و نقل عملاً از قبل مشخص باشد. در این حالت برای تعیین برنامه‌ی مناسب تخفیف با داشتن نقطه‌ی تخفیف Q_p ، باید نرخ تخفیف به نحوی تعیین شود که سود تأمین‌کننده بیشینه شود. در این حالت چنانچه قبلاً ذکر شد حد پایین و بالای Q_{ci} براساس تغییرات R در بازه‌ی $[0, \infty)$ به صورت زیر است:

مقدار سفارش خریدارانی که به گروه G_1 تعلق دارند، تحت تأثیر برنامه‌ی تخفیف قرار ندارد، اما مقدار سفارش خریدارانی که به گروه G_2 تعلق دارند پس از اطلاع از برنامه‌ی Q_{oi} و Q_{bi} تغییر می‌کند. حال $PR(R, B)$ از معادله‌ی ۱ را می‌توان به صورت

$$PR(R, B) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i \in G_j} PR_{ji}(R, B)$$

نوشت. چنانچه در فرضیات ذکر شد، برای یافتن برنامه‌ی مناسب تخفیف، فرض می‌کنیم یکی از دو مقدار نقطه‌ی تخفیف یا نرخ تخفیف از قبل مشخص باشد و در هر حالت برنامه‌ی مناسب تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده را می‌یابیم.

الف) تعیین برنامه‌ی مناسب تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده با نرخ تخفیف مشخص

در بسیاری از موارد نرخ تخفیف (R_p) ممکن است توسط مدیریت ارشد سازمان و یا شرایط بازار تعیین شده باشد. در این صورت با داشتن R_p ، نقطه‌ی تخفیف باید به نحوی تعیین شود که سود تأمین‌کننده بیشینه شود. با توجه به معادلات ۱۰ و ۱۱ ملاحظه می‌شود که برای مقدار مشخص R_p ، $PR_{1i}(R_p, B)$ نسبت به B افزایشی است در حالی که $PR_{2i}(R_p, B)$ ثابت است. بسته به مقادیر پارامترهای مدل، مقدار ثابت PR_{2i} ممکن است از بیشترین مقدار PR_{2i} بیشتر یا کم‌تر باشد. با در نظر گرفتن این موضوع می‌توان دو نوع منحنی برای سهم خریدار از سود تأمین‌کننده رسم کرد (شکل ۳).

منحنی PR_{2i} نیمه‌ی مقارن دیگری دارد که نسبت به نیمه‌ی رسم شده در موقعیت پایین‌تری قرار دارد. از آنجا که هدف بیشینه کردن سود است، این نیمه رسم نشده است. با داشتن R_p ، می‌توان Q_{ci} را برای همه‌ی خریداران تعیین کرد. در حین این فرایند حداکثر n مقدار مختلف برای Q_{ci} به دست می‌آید، زیرا ممکن است Q_{ci} برای بعضی از خریداران مشابه باشد. چنانچه $X_i, i=0, 1, 2, \dots, r \leq n$ را آماره‌ی ترتیبی متغیر Q_{ci} تعریف کنیم، به طوری که $x_0=0$ و $X_r = \max_i Q_{ci}$ در هر بازه $[X_i, X_{i+1})$ از B ، دو مجموعه‌ی G_1 و G_2 به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شوند. خریدار k با $Q_{ck} \leq X_i$ متعلق به G_1 است و سهم وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{1i} است اما با $Q_{ck} \geq X_{i+1}$ متعلق به G_2 خواهد بود و سهم وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{2i} است. در نتیجه در بازه‌ی (X_r, ∞) همه‌ی خریداران متعلق به G_1 خواهند بود.

با توجه به شکل ۳، و بسته به موقعیت B ، بیشینه‌ی PR_i در $PR_{2i}(R_p, B=Q_{ci})$ یا در مقادیر B بزرگتر از Q_{ci} ، یعنی در

برای بعضی از خریداران مشابه باشد. چنانچه $t \leq n, Y_t$ ، $t=0, 1, 2, \dots, n$ را آماره‌ی ترتیبی متغیر R_t تعریف کنیم. به طوری که $Y_0=0$ و $Y_n=1$. در هر بازه $I_t = (Y_t, Y_{t+1}]$ از R ، دو مجموعه‌ی G_1 و G_2 به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شوند. براساس رابطه‌ی افزایشی Q_{ci} و R_t ، خریدار زام با $Y_t \leq R_t \leq Y_{t+1}$ متعلق به G_1 است و سهم‌وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{1t} است و با $Y_{t+1} \leq R_t \leq Y_{t+2}$ متعلق به G_2 خواهد بود و سهم‌وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{2t} خواهد بود.

با توجه به معادلات $1=0$ و $1=1$ با مقدار مشخص B_p ، ملاحظه می‌شود که PR_{1t} نسبت به R ثابت است. در حالی که PR_{2t} به R بستگی دارد. اگر از PR_{2t} نسبت به R مشتق اول و دوم بگیریم، درمی‌یابیم $\frac{dPR_{2t}}{dR} > 0$ وجود دارد و $\frac{d^2PR_{2t}}{dR^2} < 0$. بنابراین منحنی PR_{2t} نسبت به R به صورت یکی از دو نمودار ارائه شده در شکل ۴ خواهد بود حال با توجه به این نمودارها $\max_{R \in I_t} PR(R, B_p)$ را برای هر بازه‌ی I_t به دست می‌آوریم و سپس با مقایسه‌ی نتایج حاصله، $PR(R^*, B_p) = \max_{R \in I_t} PR(R, B_p)$ را تعیین می‌کنیم، که در آن R^* نرخ تخفیف پیشنهادی مناسب تأمین‌کننده است.

توسعه‌ی مدل در حالت تخفیف کلی

برای تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده که از نوع تخفیف کلی است، فرض کنید قیمت واحد کالا با برنامه‌ی تخفیف (R, B) به صورت جدول زیر در دست باشد:

مقدار	قیمت خرید
$Q_i < B$	P
$Q_i \geq B$	$P(1-R)$

بنابراین کل هزینه‌ی خرید برای مقادیر کوچک‌تر از B برابر pQ_i و برای مقادیر بزرگ‌تر از B برابر $p(1-R)Q_i$ است. با روشی مشابه روش ارائه شده در بخش ۳، در این حالت مدل مسئله‌ی مورد بررسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\max_{R, B} PR(R, B) = \sum_{i=1}^n [p_i D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_i}\right)]$$

$$\min_{Q_i} TC_i(Q_i) = a_i \frac{D_i}{Q_i} + h_i p_i \frac{Q_i}{\gamma} = p_i D_i$$

برای

$$i = (1, 2, 3, \dots, n)$$

$$P_i = \begin{cases} P & Q_i < B \\ P(1-R) & Q_i \geq B \end{cases}$$

$$0 < R < 1$$

$$B, Q_i \geq 0$$

$$Q_{ai} \leq Q_{ci} \leq \gamma Q_{ai} + \gamma D_i / h_i$$

اگر B_p در محدوده‌ی قابل قبول Q_{ci} تعریف شده باشد، یعنی:

$$Q_{ai} \leq B_{pi} \leq \gamma Q_{ai} + \gamma D_i / h_i$$

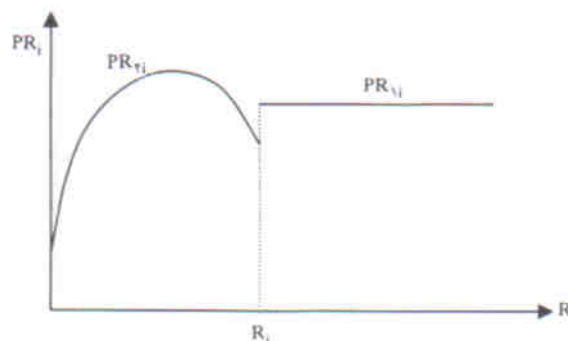
آنگاه می‌توان Q_{ci} را مساوی B_p در نظر گرفت:

$$B_p = Q_{ci} = \gamma \frac{(1 - \sqrt{1-R})}{R} \left(Q_{ai} + \frac{\gamma D_i}{h_i} \right) - \gamma \frac{D_i}{h_i} \quad (12)$$

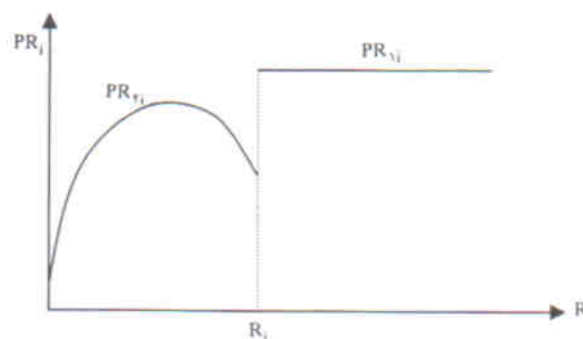
پس از به دست آوردن R برای هر خریدار داریم:

$$R_i = \frac{\gamma (Q_{ai} + \gamma D_i / h_i) (B_p - Q_{ai})}{(B_p + \gamma D_i / h_i)^2} \quad (13)$$

برای تعیین گروه‌بندی خریداران (G_1 و G_2) براساس تغییرات R ، باید رابطه‌ی بین R و Q_{ci} تعیین شود. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۸ درمی‌یابیم Q_{ci} نسبت به R_t تابعی افزایشی است. Q_{ci} با افزایش R_t افزایش، و با کاهش آن کاهش می‌یابد. در این صورت با داشتن B_p ، می‌توان R_t را برای همه‌ی خریداران تعیین کرد. در حین این فرایند حداکثر n مقدار مختلف برای R_t به دست می‌آید، زیرا ممکن است R_t

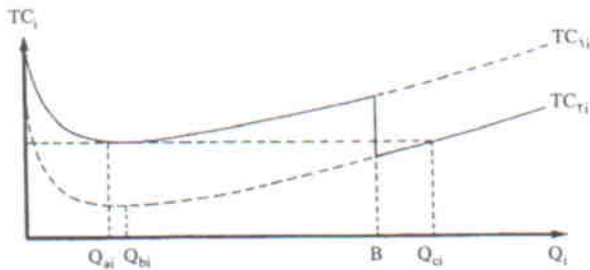


(الف)



(ب)

شکل ۴. سهم خریدار زام در سود تأمین‌کننده (با مقدار ثابت B_p).



شکل ۵. نمودار تابع هزینه خریدار بسته به موقعیت نقطه‌ی تخفیف.

$$Q_{ci} = \frac{\sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i - p(1-R)}{h_i p(1-R)}$$

$$\frac{\sqrt{(p(1-R) - \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i)^2 - 2a_i D_i h_i p(1-R)}}{h_i p(1-R)} \quad (18)$$

شکل ۵ منحنی هزینه‌ی خریدار Q_{ai}^* و Q_{bi}^* را که بستگی به موقعیت نسبی Q_{ci} و B دارد، نشان می‌دهد. یعنی برای مقدار ثابت R ، مقدار بهینه‌ی سفارش خریدار Q_{ai}^* ، بستگی به نقطه‌ی تخفیف B خواهد داشت:

$$\begin{aligned} Q_{ai}^* &= Q_{bi} && \text{به ازای } B \leq Q_{bi} \\ Q_{ai}^* &= B && \text{به ازای } Q_{ci} < B < Q_{bi} \\ Q_{ai}^* &= Q_{ai} && \text{به ازای } B \geq Q_{ci} \end{aligned} \quad (19)$$

این بدان معناست که ابتدا باید Q_{bi} ، Q_{ai} ، Q_{ci} را برای هر خریدار محاسبه و نقطه‌ی سفارش بهینه را تعیین کنیم. اگر $PR_i(R, B)$ سهم خریدار i ام در سود خالص تأمین‌کننده را در واحد زمان در نظر بگیریم، داریم:

$$PR_i(R, B) = P_i D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_i} \right)$$

با داشتن برنامه‌ی تخفیف (R, B) می‌توان خریداران را به سه گروه زیر تقسیم کرد:

- $G_1 = \{i | B \geq Q_{ci}\}$

برای $i \in G_1$ ، $Q_i^* = Q_{ai}$ ، $PR_i = PR_{1i}$ طوری که:

$$PR_{1i} = p D_i - A_i \left(\frac{D_i}{Q_{ai}} \right)$$

- $G_2 = \{i | Q_{bi} < B < Q_{ci}\}$

برای $i \in G_2$ ، $Q_i^* = B$ ، $PR_i = PR_{2i}$ (۲۰) طوری که:

$$PR_{2i} = p(1-R) D_i - A_i \left(\frac{D_i}{B} \right)$$

- $G_3 = \{i | B \leq Q_{bi}\}$

برای $i \in G_3$ ، $Q_i^* = Q_{bi}$ ، $PR_i = PR_{3i}$ (۲۱)

حل مدل در حالت تخفیف کلی

اگر $TC_i(Q_i)$ را برای مقادیر $Q_i < B$ ، $TC_{Vi}(Q_i)$ نامیده و برای مقادیر $Q_i > B$ آن را $TC_{Ti}(Q_i)$ بنامیم، برای یافتن مقدار سفارش اقتصادی خریداران با فرض مشخص بودن برنامه‌ی تخفیف تأمین‌کننده، ابتدا مشتق اول $TC_i(Q_i)$ را نسبت به Q_i مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dTC_i(Q_i)}{dQ_i} = \frac{-a_i D_i}{Q_i^2} + \frac{h_i p_i}{2} = 0 \quad (14)$$

چنانچه تخفیف وجود نداشته باشد، میزان سفارش خریدار i ام با قیمت ثابت p برابر است با:

$$Q_{ai} = \sqrt{2a_i D_i / h_i p} \quad (15)$$

و در صورت وجود تخفیف، کم‌ترین مقدار $TC_{Ti}(Q_i)$ در Q_{bi} اتفاق می‌افتد.

$$Q_{bi} = \sqrt{2a_i D_i / h_i p(1-R)} \quad (16)$$

با توجه به رابطه‌ی $Q_{bi} \geq Q_{ai}$ ، در کم‌ترین مقدار $TC_{Vi}(Q_i)$ و $TC_{Ti}(Q_i)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$TC_{Vi}(Q_{ai}) = \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i$$

$$TC_{Ti}(Q_{bi}) = \sqrt{2a_i h_i p(1-R) D_i} + p(1-R) D_i \quad (17)$$

برای تعیین رفتار سفارش‌دهی خریدار با تغییر نقطه‌ی تخفیف، ابتدا نقطه‌ی i را تعیین می‌کنیم که مطلوبیت هزینه‌ی برابر $TC_{Vi}(Q_{ai})$ را در $TC_{Ti}(Q_i)$ ایجاد می‌کند، سپس مقداری از نقطه‌ی تخفیف را که در دو مقدار هزینه‌ی مطلوبیت یکسانی ایجاد می‌کند Q_{ci} می‌نامیم.

$$TC_{Ti}(p, Q_{ci}) = TC_{Vi}(Q_{ai})$$

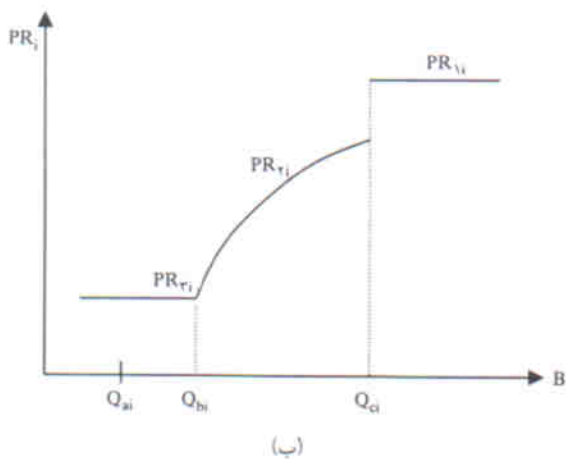
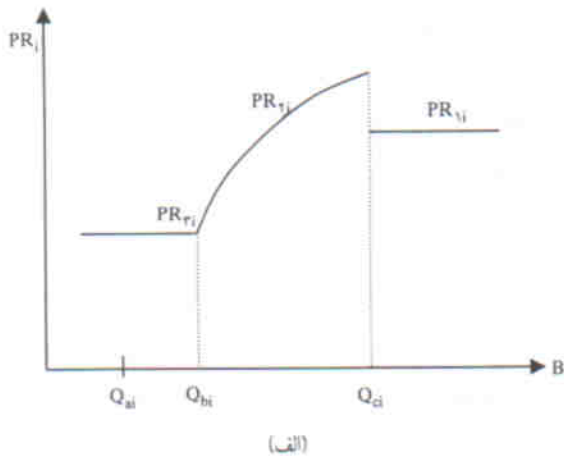
$$a_i \frac{D_i}{Q_{ci}} + h_i p(1-R) \frac{Q_{ci}}{2} + p(1-R) D_i = \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i$$

پس از مرتب کردن عبارت فوق، داریم:

$$h_i p(1-R) Q_{ci}^2 + 2[p(1-R) - \sqrt{2a_i h_i p D_i} + p D_i] Q_{ci} + 2a_i D_i = 0$$

$$X Q_{ci}^2 + Y Q_{ci} + Z = 0$$

از آنجاکه مجموع ریشه‌های معادله‌ی فوق $(-Y/X)$ و حاصل ضرب آنها (Z/X) بزرگ‌تر از صفر است، معادله دارای دو ریشه‌ی مثبت است که با توجه به شکل ۵ ریشه‌ی بزرگ‌تر مد نظر است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۶ سهم خریدار i ام در سود تأمین کننده (با مقدار ثابت R_p).

برابر PR_{r1} است. در نتیجه در بازه‌ی (X_p, ∞) همه‌ی خریداران متعلق به G_1 خواهند بود.

با توجه به شکل ۶، بسته به موقعیت B ، بیشینه‌ی PR_i یا در $PR_{r1}(R_p, B=Q_{ci})$ یا در مقادیر B بزرگ‌تر از Q_{ci} ، یعنی در $PR_{r1}(R_p, B > Q_{ci})$ اتفاق می‌افتد. بنابراین برای تعیین مقداری از B که $\max_B PR(R_p, B)$ را می‌دهد، $PR(R_p, B)$ را در $B=Q_{ci}$ برای هر i محاسبه می‌کنیم. همچنین $PR(R_p, B)$ را به‌ازای مقداری در بازه‌ی (X_p, ∞) ، که در آن همه‌ی خریداران متعلق به G_1 هستند، تعیین می‌کنیم. سپس نتایج را مقایسه کرده و مقداری از B را که بیشترین مقدار PR را می‌دهد به‌عنوان نقطه‌ی تخفیف مناسب پیشنهادی تأمین‌کننده انتخاب می‌کنیم.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار میزان سفارش دهی خریداران و برنامه‌ی تخفیف‌نوی و کلی تأمین‌کننده در یک زنجیره‌ی عرضه‌ی دوسطحی با یک

طوری که:

$$PR_{r1} = p(1-R)D_i - A\left(\frac{D_i}{Q_{bi}}\right) \quad (22)$$

مقدار سفارش خریدارانی که به G_1 تعلق دارد تحت تأثیر برنامه‌ی تخفیف قرار ندارد، اما مقدار سفارش خریدارانی که به G_2 و G_3 تعلق دارند پس از اطلاع از برنامه‌ی تخفیف از Q_{bi} به Q_{ci} یا B تغییر می‌کند.

حال $PR(R, B)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$PR(R, B) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in G_j} PR_{ji}(R, B)$$

برای یافتن برنامه‌ی مناسب تخفیف کلی به‌دلیل پیچیدگی مسئله، در اینجا فرض می‌کنیم تنها نرخ تخفیف از قبل مشخص است و در این صورت نقطه‌ی تخفیف را تعیین می‌کنیم.

تعیین برنامه‌ی مناسب تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده با نرخ تخفیف مشخص

گاهی تعیین نرخ تخفیف توسط مدیریت ارشد سازمان یا شرایط بازار کاملاً محتمل است. برای تعیین برنامه‌ی تخفیف با داشتن نرخ تخفیف R_p ، باید نقطه‌ی تخفیف به‌نحوی تعیین شود که سود تأمین‌کننده بیشینه شود. با توجه به معادلات ۲۰، ۲۱ و ۲۲ ملاحظه می‌شود برای مقدار مشخص R_p ، نسبت به B افزایشی است (بخشی از منحنی که در ربع اول محور مختصات قرار دارد مد نظر است). در حالی که $PR_{r1}(R_p, B)$ و $PR_{r2}(R_p, B)$ ثابت است. بسته به مقادیر پارامترهای مدل، مقدار ثابت PR_{r1} ممکن است از بیشترین مقدار PR_{r1} بیشتر یا کم‌تر باشد. با در نظر گرفتن این موضوع دو نوع منحنی برای سهم خریدار i ام در سود تأمین‌کننده می‌توان رسم کرد که در شکل ۶ نمایش داده شده است.

با معلوم بودن R_p ، می‌توان Q_{ci} را برای همه‌ی خریداران تعیین کرد. در حین این فرایند حداکثر n مقدار مختلف برای Q_{ci} به دست می‌آید، زیرا ممکن است Q_{ci} برای بعضی از خریداران مشابه باشد. چنانچه $X_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ را آماره‌ی ترتیبی متغیر Q_{ci} تعریف کنیم، به‌طوری‌که $X_0=0$ و $X_n = \max_i Q_{ci}$ ، در هر بازه $[X_i, X_{i+1}]$ از B ، سه مجموعه‌ی G_1 و G_2 و G_3 به‌صورت منحصر به فرد تعیین می‌شوند. خریدار k ام با $X_i \leq Q_{ck} \leq X_{i+1}$ متعلق به G_1 است و سهم‌وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{r1} است، و با $Q_{bk} > X_{i+1} > Q_{ck}$ متعلق به G_2 خواهد بود و سهم‌وی از سود تأمین‌کننده برابر PR_{r2} است و در نهایت با $X_{i+1} \geq Q_{bk}$ متعلق به G_3 خواهد بود و سهم‌وی از سود تأمین‌کننده

۲. در نظر گرفتن محدودیت‌هایی از قبیل محدودیت ظرفیت، بودجه... برای تأمین‌کننده.
۳. در نظر گرفتن محدودیت‌هایی از قبیل فضا، بودجه... برای خریداران.
۴. در نظر گرفتن هزینه‌ی نگاه‌داری تأمین‌کننده، یعنی تغییر سیاست سفارشی تأمین‌کننده به سیاست انبارشی.
۵. توسعه‌ی زنجیره‌ی عرضه‌ی مورد بررسی از یک زنجیره‌ی دوسطحی به یک زنجیره‌ی چندسطحی و وجود تخفیف در سطوح مختلف.

تأمین‌کننده و چندین خریدار متفاوت و با هدف پیشینه کردن سود کل تأمین‌کننده ناشی از فروش محصول و کمینه کردن ضمنی هزینه‌ی کل خریداران تعیین شد. فرضیات مهمی که مدل بر پایه آنها شکل گرفته است، وجود تنها یک نقطه‌ی تخفیف، سیاست سفارش‌دهی (EOQ) با تقاضای قطعی و مشخص برای یک محصول، مجاز نبودن کمبود و وجود زمان تحویل قطعی و مشخص برای خریداران و سیاست تولید/توزیع سفارشی برای تأمین‌کننده است. در این راستا زمینه‌های زیر برای تحقیقات بیشتر پیشنهاد می‌شود:

۱. افزایش تعداد نقاط تخفیف از یک نقطه به چندین نقطه‌ی تخفیف.

پانوش

1. Discount
2. Perfect Discrimination
3. Partial Discrimination
4. Transaction
5. Economic Order Quantity

منابع

1. Kohli, R. and Park, H. "A cooperative game theory model of quantity discounts", *Management Science*, **35**(6), pp 693-707 (1989).
2. Dolan, R.J., "A normative model of industrial buyer response to quantity discounts", in *Research Frontiers of Marketing: Dialogues and Directions*, S.C. Jain (ed.), American Marketing Association, Chicago, IL, pp 121-125 (1978).
3. Crowther, J.L., "Rationale for quantity discounts", *Harvard Business Review*, **42**, pp 21-27 (1964).
4. Lam, S.M., and Wong, D.S. "A fuzzy mathematical model for the joint economic lot size problem with multiple price breaks", *European Journal of Operational Research*, **95**, pp 611-622 (1996).
5. Lal, R., and Staelin, "An approach for developing an optimal discount pricing policy", *Management Science*, **30**, pp 1524-1539 (1984).
6. Hadley, G., and T.M. Whitin, "Analysis of inventory systems, prentice hall, englewood cliffs", NJ, pp 62-68 and pp 323-345 (1963).