

حل تحلیلی معادله‌ی حرکت جرم و فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثر نیروی باد تحت بار دینامیکی

محمد رضا اشراقی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف
بهمن مهری (استاد)
دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
علی مقداری (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار سعی شده است با استفاده از تابع گرین و تابع تبدیل^[۱-۳] برای معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر سیستم جرم و فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثرات نیروی باد، یک حل تحلیلی ارائه شود. این معادله در مدل‌سازی انواع سازه‌های فضایی، بال هواپیما و تمامی سازه‌هایی که در ارتفاع بالا به کار می‌روند و بهتر است که فونداسیون آنها به صورت فنر غیرخطی مدل شود. کاربرد بسیار زیادی دارد، به طوری که جواب معادله مذکور بیان‌کننده‌ی رفتار مکانیکی سیستم واقعی باشد.

مقدمه

پیشرفت صنایع در علوم مختلف و پیش‌بینی رفتار انواع سیستم‌ها، مخصوصاً در شرایط دینامیکی و بارگذاری‌های متناوب، دارای اهمیت ویژه‌ی است. از آنجا که در مدل‌سازی، به دست آوردن معادله‌ی ریاضی برای نشان دادن رفتار یک سیستم واقعی ممکن است با چندین فرض ساده شونده انجام شود، لذا بهتر است برای نزدیک شدن جواب معادله‌ی ریاضی سیستم شبیه‌سازی شده به رفتار سیستم واقعی، معادلات با استفاده از روش‌های دقیق حل شوند. اگر چه در هر حال جواب معادلات به دست آمده با رفتار واقعی سیستم تا حدی متفاوت است. لذا باید دقت داشت تا جایی که ممکن است معادلات به دست آمده دارای حل دقیق باشند. به بیان دیگر تا جایی که ممکن است حل تحلیلی معادله را به دست آورد، زیرا روش‌های عددی ذاتاً دارای خطای قابل ملاحظه‌اند و با این کار از انباشته شدن خطاها جلوگیری می‌شود.

یکی از روش‌های بسیار کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب و عبارات غیرخطی روش حل تحلیلی تابع گرین است. در ضمن روش‌های عددی زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که حل تحلیلی غیر ممکن و پر زحمت باشد. با استفاده از روش ارائه شده در نوشتار حاضر نشان داده خواهد شد حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل غیرخطی نیز دست‌یافتنی است و در مسائل دقیق استفاده از روش‌های عددی ضروری نیست.

روش به دست آوردن معادله و حل آن

در مدل‌سازی‌های واقعی که سرعت در آنها بسیار بالا است و نمی‌توان از اثرات نیروی باد صرف‌نظر کرد، معادله‌ی حاکم بر سیستم جرم و فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثر نیروی باد کاربردهای بسیار زیادی دارد. مانند مدل‌سازی بال هواپیما یا دیگر قسمت‌های خارجی سازه‌ی هواپیما و یا سازه‌های فضایی در علوم هوافضا که اثرات نیروی باد بسیار زیاد است و نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. برای مدل‌سازی واقعی تکیه‌گاه بهتر است آن را به صورت فنر غیرخطی در نظر گرفت. در ضمن معادلات حرکت برج‌های بلند در مهندسی عمران را که اثرات باد در آنها، بسیار زیاد است می‌توان شبیه یک جرم و فنر غیرخطی مدل‌سازی نمود، و نهایتاً معادله‌ی شبیه معادله‌ی ۱ بر سیستم حاکم خواهد بود. با توجه به کاربردهای متفاوت مدل‌سازی‌های مختلف در علوم مهندسی، ضرایب معادله به صورت پارامتری در نظر گرفته شده است تا بتوان از حل این معادله در تمام مدل‌سازی‌هایی که معادله‌ی حاکم بر آن به صورت زیر است استفاده کرد. لازم به ذکر است که فنر غیرخطی ممکن است به دو صورت سخت شونده و نرم شونده باشد که این موضوع به علامت ضریب γ^3 در رابطه فنر غیرخطی بستگی دارد. اگر ضریب γ^3 در رابطه فنر غیرخطی مثبت باشد فنر سخت شونده و اگر منفی باشد فنر نرم شونده است. در نوشتار حاضر هیچ فرضی در مورد سخت‌شوندگی یا نرم‌شوندگی فنر انجام نشده است، برای مدل‌سازی‌های مختلف

$$\ddot{y} + \alpha y + \beta y^3 + \gamma \dot{y}^2 = \delta \sin(\omega t) \quad (4)$$

بدیهی است که حل معادله‌ی فوق چون از مرتبه‌ی دوم است نیاز به دو شرط مرزی دارد. با توجه به مدل‌های واقعی شرایط مرزی معادله‌ی فوق چنان در نظر گرفته شده که مبدأ زمان و مکان بر هم منطبق باشند؛ در واقع سیستم در لحظه‌ی صفر از نقطه‌ی صفر شروع به حرکت می‌کند ($y(0) = 0$). شرط دوم بهتر است چنان در نظر گرفته شود که از تشدید جلوگیری شود. برای جلوگیری از تشدید می‌بایستی ارتعاشات طبیعی حذف شوند، یعنی هر وقت که نیرو صفر شد تغییر مکان نیز صفر شود، زیرا ارتعاشات طبیعی بدون داشتن نیروی خارجی به وجود می‌آیند. هرگاه در سیستمی نیروی خارجی صفر باشد، و در همان لحظه نیز جابه‌جایی صفر شود (یعنی در صورت عدم وجود نیروی خارجی، جابه‌جایی نیز در سیستم وجود نداشته باشد)، ارتعاشات طبیعی نیز صفر شده و نتیجتاً از تشدید جلوگیری خواهد شد. پس شرط دوم به صورت $y(2\pi/\omega) = 0$ در نظر گرفته می‌شود. در نهایت معادله‌ی ۴ چنین در نظر گرفته شده و حل می‌شود.

$$\ddot{y} = \delta \sin(\omega^* t) - \alpha y - \beta y^3 - \gamma \dot{y}^2 \quad (5)$$

برای حل تحلیلی معادله، از تابع گرین استفاده می‌شود. بدین صورت که $\ddot{G}(t) = 0$ در نظر گرفته می‌شود؛ زیرا تابع گرین باید در قسمت خطی معادله‌ی دیفرانسیل مطلوب صدق کند. در نتیجه تابع گرین باید به صورت خطی زیر در نظر گرفته شود: [5]

$$G(t) = \begin{cases} at + b & 0 \leq t \leq \xi \\ ct + d & 0 \leq \xi \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (6)$$

برای به دست آوردن ضرایب تابع گرین باید شرایط زیر اعمال شود. تابع گرین باید شرایط مرزی را ارضا کند و در $t = \xi$ پیوسته باشد و همچنین مشتق آن در $t = \xi$ دارای ناپیوستگی و پرش واحد (یک) باشد. [6، 7]

$$G(0) = 0 \rightarrow a \times 0 + b = 0$$

$$G\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0 \rightarrow c \times \frac{2\pi}{\omega} + d = 0$$

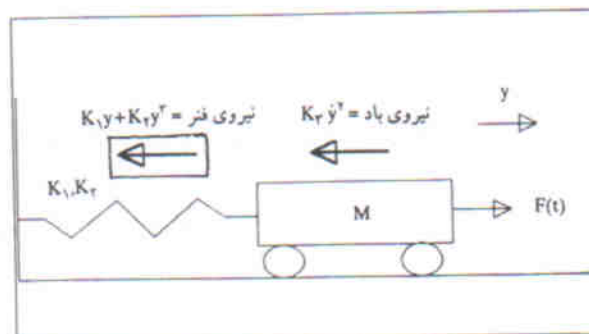
$$a \times \xi + b = c \times \xi + d$$

$$\dot{G}(\xi^+) - \dot{G}(\xi^-) = 1 \rightarrow c - a = 1$$

با حل دستگاه معادلات فوق نتایج زیر به دست می‌آید:

$$a = \frac{\xi\omega}{2\pi} - 1 \quad b = 0 \quad c = \frac{\xi\omega}{2\pi} \quad d = -\xi$$

در نتیجه تابع گرین چنین به دست می‌آید:



شکل ۱. نمای شماتیک جرم، فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثر نیروی باد.

می‌توان با جایگزین ساختن مناسب پارامترها (از نظر علامت) هر یک از حالت‌های ذکر شده را در اختیار داشت. نیروی فنر غیرخطی در حالت کلی به صورت

$$F(y) = K_1 y + K_2 y^3$$

در نظر گرفته می‌شود. [2] اگر $K_2 > 0$ فنر سخت‌شونده و اگر $K_2 < 0$ فنر نرم‌شونده است. (شکل ۱)

با توجه به قانون نیوتن و نوشتن معادلات تعادل نیروها در جهت y ، معادله جرم و فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثرات نیروی باد تحت بار خارجی $F(t)$ چنین است:

$$M\ddot{y} = F(t) - (K_1 y + K_2 y^3) - (K_2 \gamma \dot{y}^2) \quad (1)$$

در علوم مختلف مهندسی، برای بررسی پاسخ رفتار مکانیکی یک سیستم، آن را تحت بارهای استاندارد از جمله بار هارمونیک قرار می‌دهند. در معادله‌ی فوق $F(t)$ به صورت $K_f \sin(\omega t)$ در نظر گرفته می‌شود که K_f دامنه‌ی بارگذاری و ω فرکانس بارگذاری است. در این صورت معادله‌ی ۱ را می‌توان به صورت معادله‌ی ۲ بازنویسی کرد.

$$M\ddot{y} + K_1 y + K_2 y^3 + K_2 \gamma \dot{y}^2 = K_f \sin(\omega t) \quad (2)$$

با تقسیم طرفین معادله‌ی ۲ بر جرم M می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{y} + \frac{K_1}{M} y + \frac{K_2}{M} y^3 + \frac{K_2 \gamma}{M} \dot{y}^2 = \frac{K_f}{M} \sin(\omega t) \quad (3)$$

برای راحتی در انجام محاسبات، تغییرات پارامتری به صورت زیر در معادله انجام خواهد شد.

$$\frac{K_1}{M} = \alpha, \quad \frac{K_2}{M} = \beta, \quad \frac{K_2 \gamma}{M} = \gamma, \quad \frac{K_f}{M} = \delta$$

که پارامترهای α ، β ، γ ، δ به ترتیب K_1 تا K_2 نسبت به واحد جرم هستند. نهایتاً معادله‌ی حرکت جرم و فنر غیرخطی با در نظر گرفتن اثرات نیروی باد تحت بار هارمونیک به صورت معادله‌ی ۴ خواهد بود.

به همین ترتیب می توان از رابطه‌ی زنجیره‌یی 1^* جواب‌های متعددی به دست آورد. اولین جواب به صورت دلخواه از مجموعه‌ی توابع فضای باناخ (رابطه‌ی ۹)، انتخاب شده و از روی جواب اول فرض شده به کمک رابطه‌ی زنجیره‌یی 1^* می توان سایر جواب‌ها را نیز به دست آورد.

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = T(y_0) = -\frac{\delta}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

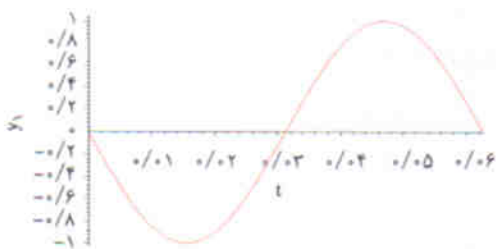
$$y_2 = T(y_1) = \dots$$

$$y_n = T(y_{n-1}) = \dots$$

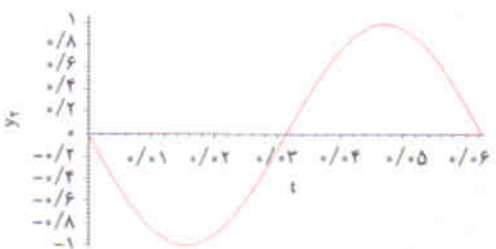
به منظور مقایسه‌ی عددی جواب‌های به دست آمده، به عنوان مثال پارامترهای معادله، به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\alpha = 10 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 20 \quad \lambda = 10000 \quad \omega = 1000$$

با استفاده از نرم افزار Maple جواب‌های y_1 و y_2 پس از محاسبه رسم شده‌اند، که شکل‌های ۲ و ۳ و ۴ به ترتیب نمایش دهنده‌ی رفتار y_1 ، y_2 و $y_2 - y_1$ در یک دوره‌ی تناوب $2\pi/\omega$ است. شکل ۴ نشان دهنده‌ی تفاوت جواب‌های y_1 و y_2 است.



شکل ۲. نمایش رفتار y_1



شکل ۳. نمایش رفتار y_2



شکل ۴. تابع خطای جواب $y_2 - y_1$

$$G(t) = \begin{cases} (\frac{\xi\omega}{\sqrt{\pi}} - 1)t & 0 \leq t \leq \xi \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \\ (\frac{t\omega}{\sqrt{\pi}} - 1)\xi & 0 \leq \xi \leq t \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \end{cases} \quad (7)$$

حال با داشتن تابع گرین و معادله‌ی ۵، می توان تابع تبدیلی را به صورت رابطه ۸ در نظر گرفت:

$$T(y) = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{\omega}} G(t, \omega) \times [\delta \sin(\omega^* \xi) - \alpha y(\xi) - \beta y''(\xi) - \gamma y'''(\xi)] d\xi \quad (8)$$

که با استفاده از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ وجود جواب اثبات می شود. ^[۱] برای این کار ابتدا باید فضای باناخ و فاصله‌ی متریک تعریف شوند. فضای باناخ را مجموعه‌ی توابع پیوسته در فاصله‌ی $[0, \frac{\sqrt{\pi}}{\omega}]$ در نظر گرفته و فاصله‌ی متریک نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$B = \left\{ y(t)/y(t) \in C \left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \right] \right\}$$

$$d(y_1, y_2) = \text{Sup} |y_1(t) - y_2(t)| + \text{Sup} |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| \quad (9)$$

برای وجود جواب باید ثابت کرد که فضای باناخ تعریف شده به صورت فوق و فاصله تعریف شده در رابطه‌ی ۹ همراه با تابع تبدیل ۸ یک تبدیل اقباضی است و در نتیجه طبق قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ یک جواب به صورت $y = T(y)$ وجود خواهد داشت و مسئله اثبات شده خواهد بود. ^[۱] برای اقباضی بودن تابع تبدیل کافی است ثابت شود $d(Ty_1, Ty_2) < a \times d(y_1, y_2)$ که در آن $0 < a < 1$ است.

$$d(Ty_1, Ty_2) < \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \times \left\{ [a_1 + 3M^2 a_2] \times \text{Sup} |y_2 - y_1| + [a_3 + 2Na_4] \times \text{Sup} |\dot{y}_2 - \dot{y}_1| \right\} < a \times \left[\text{Sup} |y_2 - y_1| + \text{Sup} |\dot{y}_2 - \dot{y}_1| \right] d(Ty_1, Ty_2) = \text{Sup} \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{\omega}} |G(t, \xi)| \times \left| [a_1(y_2 - y_1) + a_2(y_2'' - y_1'') + a_3(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + a_4(\dot{y}_2' - \dot{y}_1')] \right| d\xi$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt{(\alpha + 3M^2 \beta)^2 + (\gamma N)^2} < \frac{\omega}{\sqrt{\pi}}$$

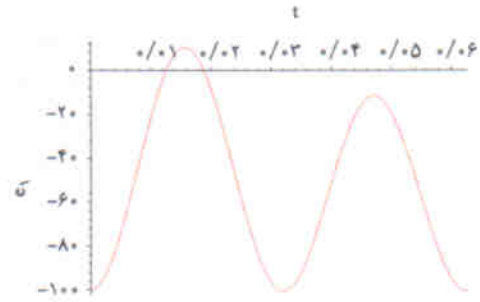
M بزرگ ترین مقدار توابع و N بزرگترین مقدار مشتق توابع در مجموعه فضای باناخ است. در نهایت می توان رابطه‌ی زنجیره‌یی زیر را در نظر گرفت.

$$y_{n+1} = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{\omega}} G(t, \xi) \times [\delta \sin(\omega^* \xi) - \alpha y_n(\xi) - \beta y_n''(\xi) - \gamma \dot{y}_n'(\xi)] d\xi \quad (10)$$

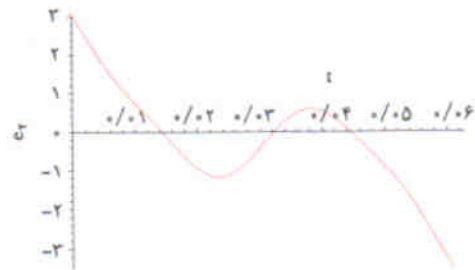
خطای این توابع در بازه‌ی دوره‌ی تناوب $[0, 2\pi/\omega]$ به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود.

نتیجه‌گیری

شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند که این روش به سرعت همگرا شده و نیازی به تکرار جواب‌های متعدد نیست. با توجه به این‌که جواب y_1 فقط دارای ضریب δ بوده و تابع y_2 برحسب تمامی ضرایب است، رفتار دو تابع یکسان است ولی مقدار دو تابع برابر نیست (این موضوع در شکل ۴ نشان داده شده است). همچنین رفتار تابع خطا برای دو تابع y_1 و y_2 متفاوت است. در ضمن مقدار قدر مطلق تابع خطا با مقایسه‌ی شکل‌های ۵ و ۶ به سرعت کم شده و نسبت به حالت قبل به سمت صفر میل می‌کند. منظور از سرعت همگرایی که در بالا ذکر شد، یکسانی رفتار دو تابع جواب y_1 و y_2 در اولین قدم‌های استفاده از معادله زنجیره‌ی است. با مقایسه‌ی روش فوق با روش‌های عددی که غالباً همگرا نمی‌شوند - یا به سختی همگرا می‌شوند - کارایی این روش را می‌توان ملاحظه کرد. علاوه بر اینکه جواب‌های به دست آمده از روش فوق قابل اعتمادتر از روش‌های عددی‌اند، تجربه نشان داده است که تعداد تکرارها در به دست آوردن جواب از روش مذکور بسیار کم‌تر از روش‌های عددی است.



شکل ۵. تابع خطای جواب y_1 .



شکل ۶. تابع خطای جواب y_2 .

با تعریف تابع خطا به صورت:

$$e = \delta \sin(\omega^* t) - \bar{y} - \alpha y - \beta y^3 - \gamma y^5$$

می‌توان تابع خطا را به‌ازاء جواب‌های y_1 و y_2 محاسبه کرد. رفتار

منابع

1. Laser, A.C., on Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillation, *J. Math. Anal. Appl.* **21**, pp 421-425 (1968).
2. Mehri, B. and Niksirat, M., on the existence of periodic oscillation for vector nonlinear second order system, Proc. of 28th annual Iranian Mathematics conference (1997).
3. Mehri, B. and Niksirat, M., the existence of periodic solution for the nonlinear autonomous ODEs, *Nonlinear Analysis Forum*, **5**, pp 163-171 (2000).
4. Stoker, J.J., nonlinear vibration in mechanical and electrical systems, Interscience Publisher (1950).
5. Bihari, I., on periodic solutions of certain second order ordinary differential equation with periodic coefficients, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12**, pp 11-16 (1961).
6. Bihari, I., periodic solutions of some second order nonlinear differential equations with periodic coefficients, ordinary and partial differential equations, *Lecture Notes in Math.* **1151**, Springer, Berlin, pp 49-59 (1985).
7. Mehri, B. and Niksirat, M., on the existence of periodic solution for the quasi-linear third order ODE., *J. Math. Anal. Appl.*, **261** (1), pp 159-167 (2001).
8. Cronin, J., fixed point and topological degree in nonlinear analysis, math survey II, American Mathematical Society (1964).