حل تحلیلی مسئله‌ی تماس بین یک گوه‌ی نامتقارن و یک نیم‌فضا

سعید ادیب‌نظری (استادیار)
داود نادری (دانشجوی دوره دکتری)
دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف
امیررضا شاهانی (دانشیار)
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار به بررسی مسئله‌ی تماس بین یک نفوذکننده به شکل گوه‌ی نامتقارن و یک نیم‌فضا[1] پرداخته شده است. در آغاز، با استفاده از روش‌های تئوری الاستیسیته، معادلات حاکم بر مسئله را به دست آورده و سپس با حل این معادلات، توزیع فشار و طول ناحیه‌های تماس را در حالت بدون اصطکاک، محاسبه شده‌اند. بدین ترتیب، حالت کلی‌تری از مسائل تماسی مورد بررسی قرار گرفته و اثرات عدم تقارن بر توزیع فشار و طول ناحیه‌های تماس، مشخص شده‌اند. در نهایت پاسخ‌های به دست آمده در حالت خاص با کارهای قبلی مقایسه شده و صحت آنها اثبات شده است.

مقدمه

مسئله‌ی تماس یکی از اصلی‌ترین مسائل در مهندسی مکانیک است، چراکه بیشتر بارگذاری‌ها بر روی قطعات مکانیکی از همین طریق صورت می‌گیرد. در ضمن یکی از بحرانی‌ترین مسائل در قطعات مکانیکی، تمرکز تنش‌هایی است که در ناحیه‌های تماس به‌وجود می‌آیند.[1]

مسائل تماسی با توجه به هندسه‌ی دو جسم درگیر، به دو دسته تقسیم می‌شوند: مسائل تماس هرتزی[2] و مسائل تماس غیر هرتزی[3]. مسائل تماس هرتزی، مسائلی هستند که در آنها اجسام درگیر شعاع انحنای محدودی دارند و تغییر ناگهانی در شعاع انحنای آنها وجود ندارد، مانند مسئله تماس دو کره یا دو استوانه. مسائل تماس غیر هرتزی به مسئله‌هایی اطلاق می‌شود که در آنها اجسام درگیر دارای نقاطی نوک تیز باشند، مانند مسئله تماس گوه‌ها. یکی از اصلی‌ترین پیچیدگی‌ها در هنگام بررسی مسائل تماس غیر هرتزی، وجود همین نقاط نوک تیز است که باعث می‌شود در حل تحلیلی، تنش در این نقاط به سمت بی‌نهایت میل کند. این پدیده را اصطلاحاً «منفرد بودن میدان تنش»[4] می‌گویند. البته واضح است که این امر عملاً امکان‌پذیر نیست، چراکه اولاً نقطه‌ی کاملاً تیزِ واقعی وجود ندارد و تمام لبه‌ها دارای شعاع انحنا هستند؛ ثانیاً اگر تنش بخواهد به سمت بی‌نهایت میل کند در اثر ایجاد شدن پلاستیسیته‌ی موضعی در آن محل، تنش آزاد می‌شود.[2] اما این عامل ـــ منفرد بودن میدان تنش ـــ باعث می‌شود تا حل تحلیلی این‌گونه مسائل با پیچیدگی‌های خاصی روبرو شود و حتی در غالب موارد ارائه‌ی حل تحلیلی برای آنها غیرممکن باشد.

ارائه‌ی مسئله‌ی کلاسیکِ تماس یک گوه با یک نیم‌فضا به‌دلیل شکل هندسی ساده‌یی که دارد، و نیز به‌دلیل کاربردهای فراوان آن در مواردی نظیر آزمایش‌های سختی‌سنجی، آزمایش‌های خستگی فرسایشی[5] و همچنین قابلیت مدل‌سازی بسیاری از موارد عملی همچون درگیری بین رزوه‌های پیچ و مهره‌ها و دندانه‌های چرخ‌دنده‌ها، مورد بررسی‌های زیادی قرار گرفته است. ترومن و همکارانش مسئله تماس بین یک گوه‌ی کشسان متقارن و یک نیم‌فضا را مورد بررسی قرار داده‌اند که در انتها نتایج تحقیق اخیر با نتایج آنها مقایسه شده است.[3] در یک بررسی دیگر مسئله تماس بین یک گوه‌ی کشسان متقارن با رأس گرد و یک نیم‌فضا بررسی شده و اثرات گردی رأس بر توزیع فشار و میدان مشخص شده است.[2] مسئله‌ی تماس بین یک سنبه و یک نیم‌فضا را به روش تحلیلی حل کرده[4] و نتایج خود را با نتایج به دست آمده از روش اجزاء محدود مقایسه کرده‌اند.

در تمام کارهای ذکر شده، مسئله‌ی تماس در حالت متقارن مورد بررسی قرار گرفته است و هیچ یک به بررسی وجود عدم تقارن و تأثیرات ناشی از آن نپرداخته‌اند. در حالت کلی، فرض وجود تقارن، باعث ساده شدن روابط و مراحل حل یک مسئله می‌شود. اما باید توجه داشت که حذف این فرض، نه‌تنها به پیچیده‌تر شدن روابط و مراحل حل می‌انجامد، بلکه گاهی باعث می‌شود تا نتوان برای

مسئله‌ی مورد بررسی، از نظر تحلیلی جوابی پیدا کرد. از دیدگاه مهندسی هیچ قطعه‌یی را نمی‌توان کاملاً متقارن تولید کرد و همچنین در جاهایی مثل آزمایش‌های سختی‌سنجی و خستگی فرسایشی، نمی‌توان محور ماشین را کاملاً عمود بر سطح قطعه تنظیم کرد. لذا مشخص است که همخوانی جواب‌های مسئله‌ی متقارن، با آنچه که واقعاً اتفاق می‌افتد کم است.

موارد ذکر شده در بالا انگیزه‌یی شد برای بررسی مسئله‌ی تماس در حالت نامتقارن و مقایسه‌ی جواب‌های آن در حالت خاص با جواب‌های حالت متقارن، به‌منظور اثبات صحت جوابها.

مدل‌سازی و حل مسئله

هندسه‌ی مورد بررسی در شکل ۱ نشان داده شده است. منظور از گوه‌ی نامتقارن، گوه‌یی است که در آن زوایای γ و θ (مطابق شکل) با هم برابر نباشند. مسئله هم برای حالتی که گوه صلب باشد و هم برای گوه‌ی کشسان، مدل‌سازی شده است. باید توجه داشت که در حالت کشسان، برای کوچک نگه داشتن کرنش‌ها باید زوایای خارجی گوه، ϕ_1 و ϕ_2 کوچک باشند. این فرض اجازه می‌دهد تا بتوان از «روابط کشسانی برای تغییر شکل‌های کوچک» استفاده کرد، که باعث سهولت در به دست آوردن حل تحلیلی مسئله می‌شود. همچنین هنگام به دست آوردن قوانین تماس و محاسبه‌ی توزیع فشار، برای جلوگیری از به وجود آمدن تنش‌های برشیِ سطحی[۶] بین دو جسم، فرض می‌شود که روغن‌کاری به خوبی انجام می‌شود یا دو جسم از نظر خواص کشسانی کاملاً مشابه‌اند. هر چند تأثیر این مؤلفه‌های برشی بر توزیع فشار تماسی بسیار کم است و می‌توان با دقت بسیار خوبی از نتایج به دست آمده استفاده کرد.[۵ و ۶]

روشی که در اینجا برای حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته، روش معادلات انتگرالی است[۷ و ۸] که کاربرد آن در حل مسائل تماس نیز مورد بررسی قرار گرفته است.[۵]

توزیع فشار تماسی روی ناحیه‌ی تماس، به‌وسیله‌ی حل معادله‌ی انتگرالی زیر[۵] به دست می‌آید:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial h(x)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{p(\xi)}{x-\xi}d\xi \qquad (۱)$$

که در این رابطه A (ثابت Dundurs) معیاری است از نرمی دو جسم[۷] و برای حالت کرنش صفحه‌یی[۸] چنین تعریف می‌شود:

$$A=2\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right) \qquad (۲)$$

که در آن، E_1 و E_2 مدول یانگ[۹] و ν_1 و ν_2 نسبت پواسون[۱۰] جسم اول و دوم هستند. در ضمن L بیانگر ناحیه‌ی تماس است.

تابع h(x) عبارت است از میزان هم‌پوشانی[۱۱] دو جسم، با فرض آنکه بتوانند آزادانه در همدیگر نفوذ کنند (شکل ۲). بنابراین اگر چرخشِ صلب[۱۲] اجسام محدود شده باشد، و تابع پروفیل هندسی اجسام در حالتِ بدون تغییر شکل، $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ باشد، h(x) عبارت خواهد بود از:

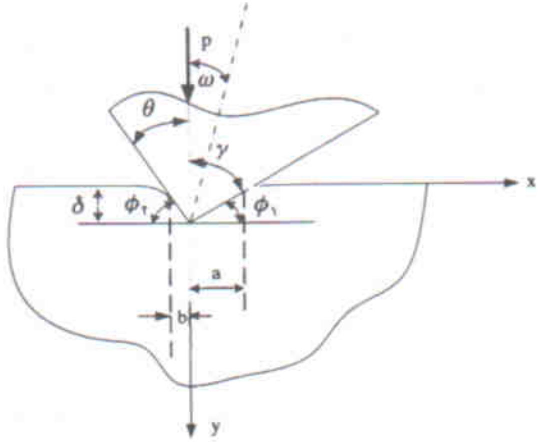
$$h(x)=C-[f_1(x)-f_2(x)] \qquad (۳)$$

لذا برای هندسه‌ی مورد بررسی، h(x) با استفاده از مفهوم توابع منفرد به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

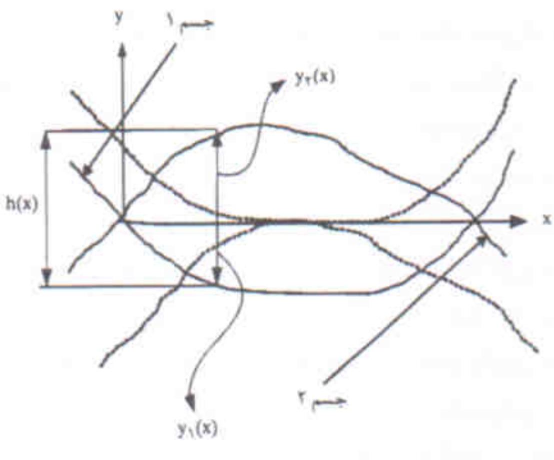
$$h(x)=\delta-\phi_1\langle x\rangle+\phi_2\langle -x\rangle \qquad (۴)$$

که در این رابطه، δ ماکزیمم تغییر شکل سطح (در زیر رأس گوه) است. با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۴ و جایگذاری آن در رابطه‌ی ۱ چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{A}\{-\phi_1\langle x\rangle^{0}+\phi_2\langle -x\rangle^{0}\}=\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(\xi)}{x-\xi}d\xi \qquad (۵)$$



شکل ۱. هندسه‌ی مورد بررسی.



شکل ۲. هم‌پوشانی.

در این رابطه، a و b طول ناحیه‌های تماس مطابق شکل ۱ هستند (لازم به ذکر است که طول بزرگ‌تر همواره a و طول کوچک‌تر همواره b انتخاب می‌شود). معادله‌ی ۵ یک معادله‌ی انتگرالی منفرد است که در این حالت حل تحلیلی برای آن وجود دارد.[۵-۸]

با توجه به روابطی که برای معکوس‌کردن معادله‌ی ۵ وجود دارد،[۵] باید حدود انتگرال را متقارن کرد. برای این کار با استفاده از نگاشت‌های خطی زیر:

$$\xi=\frac{a+b}{2}r+\frac{a-b}{2}=\alpha r+\zeta \qquad (۶)$$

$$x=\frac{a+b}{2}s+\frac{a-b}{2}=\alpha s+\zeta \qquad (۷)$$

می‌توان طرف راست معادله‌ی ۵ را به صورت رابطه‌ی ۸ نوشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\alpha r+\xi)}{s-r}dr=\frac{-\phi<\alpha\, s+\xi>^{0}+\phi_2<-\alpha s-\xi>^{0}}{A} \qquad (۸)$$

که در آن، p(-b) و p(a) هر دو محدودند، یعنی در دو انتهای ناحیه‌ی تماس، پدیده‌ی منفرد بودن[۱۳] وجود ندارد و می‌توان نوشت: $p(a)=p(b)=0$. لذا حل عمومیِ معادله‌ی ۸ در ناحیه‌ی $-1\leq s\leq 1$ عبارت خواهد بود از:[۵و۷]

$$p(s)=-\frac{\phi_1+\phi_2}{\pi A}\ln\left|\frac{\alpha+\zeta s+\sqrt{\alpha^2-\zeta^2}\sqrt{1-s^2}}{\alpha s+\zeta}\right| \qquad (۹)$$

برای بررسی صحت نتیجه‌ی به دست آمده، می‌توان در حالت خاص رابطه‌ی ۹ را برای یک گوه‌ی متقارن نوشت و آن را با حل‌های موجود مقایسه کرد.[۳] اگر گوه متقارن باشد:

$$\phi_1=\phi_2 \qquad (۱۰)$$

در نتیجه a=b و بنابراین:

$$\alpha=a;\zeta=0 \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری روابط ۱۰ و ۱۱ در رابطه‌ی ۹ و ساده‌سازی آن، خواهیم داشت:

$$p(s)=\frac{2\phi}{\pi A}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{|s|}\right) \qquad (۱۲)$$

که این رابطه دقیقاً همان رابطه‌یی است که برای گوه‌ی متقارن، توسط محققان دیگر به دست آورده شده است.[۳]

برای محاسبه‌ی توزیع فشار برحسب مختصات x، می‌توان با استفاده از رابطه‌ی:

$$s=\frac{x-\zeta}{a} \qquad (۱۳)$$

و جایگذاری آن در رابطه‌ی ۹ نوشت:

$$p(x)=-\left[\frac{\phi_1+\phi_2}{\pi A}\right]\ln\left|\frac{\alpha^2-\xi^2+\xi x+\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sqrt{\alpha^2-(x-\xi)^2}}{\alpha x}\right| \qquad (۱۴)$$

این رابطه توزیع فشار p(x) ناشی از تماس یک گوه‌ی نامتقارن کشسان با یک نیم‌فضای کشسان را برحسب ϕ_1 و ϕ_2 (زوایای دیواره‌های گوه با سطح تغییر شکل نداده‌ی نیم‌فضا)، A (ثابت Dundurs) و α و ξ (مرتبط با طول ناحیه‌های تماس) به دست می‌دهد. طول ناحیه‌های تماس را با استفاده از تعادل استاتیکی می‌توان به‌دست آورد.

با توجه به تعادل:

$$p=\int_{-b}^{a}p(\xi)d\xi \qquad (۱۵)$$

با نرمال‌سازی[۱۴] رابطه‌ی ۱۵ و استفاده از توزیع فشار نرمال شده (رابطه‌ی ۹) خواهیم داشت:

$$\frac{-\pi AP}{\phi_1+\phi_2}=\alpha\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{\alpha+\xi s+\sqrt{\alpha^2-\xi^2}\sqrt{1-s^2}}{\alpha s+\xi}\right|ds \qquad (۱۶)$$

مشاهده می‌شود که در رابطه‌ی ۱۶ دو مجهول α و ξ حضور دارند، لذا برای حل آن به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز است. معادله‌ی دوم با استفاده از شرط سازگاری[۱۵] برای حل‌پذیری معادله‌ی انتگرالیِ اصلی، معادله‌ی ۸ به دست می‌آید. این رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:[۵]

$$\int_{-1}^{1}\frac{-\phi<\alpha s+\xi>^{0}+\phi_2<-\alpha s-\xi>^{0}}{A\sqrt{1-s^2}}ds \qquad (۱۷)$$

با محاسبه‌ی انتگرال و ساده‌سازی، در نهایت رابطه‌ی ۱۷ به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\xi}{\alpha}=\sin\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right) \qquad (۱۸)$$

اکنون معادلات ۱۶ و ۱۸ به‌منظور یافتن a و b (طول ناحیه‌های تماس) مورد استفاده قرار می‌گیرند. با حل این معالات:

$$\alpha=\frac{AP}{\phi_1+\phi_2}\sec\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right) \qquad (۱۹)$$

$$\zeta=\frac{AP}{\phi_1+\phi_2}\tan\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right) \qquad (۲۰)$$

در نهایت با استفاده از روابط ۶ و ۷، طول ناحیه‌های تماس به‌دست می‌آیند:

$$a=\frac{AP}{\phi_1+\phi_2}\left\{\frac{1+\sin\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right)}{\cos\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right)}\right. \qquad (۲۱)$$

$$b=\frac{AP}{\phi_1+\phi_2}\left\{\frac{1+\sin\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right)}{\cos\left(\pi\frac{\phi_2-\phi_1}{2\phi_2+\phi_1}\right)}\right\} \qquad (۲۲)$$

در اینجا نیز برای بررسی صحت محاسبات انجام شده می‌توان نتایج را در حالت متقارن با کارهای قبلی مقایسه کرد. با ساده‌سازی روابط ۲۱ و ۲۲ برای حالت متقارن، رابطه‌ی ۲۳ حاصل می‌شود:

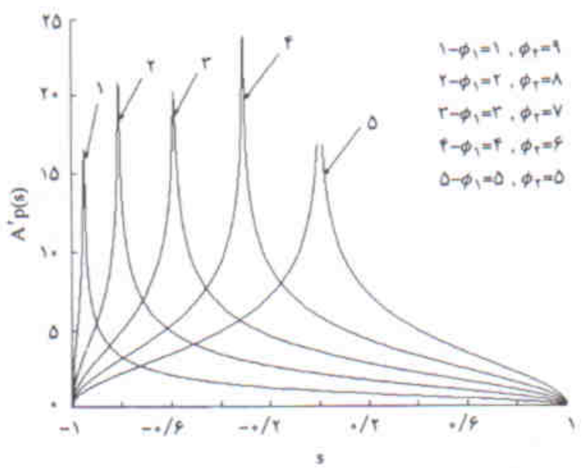
$$a=\frac{AP}{2\phi} \quad ; \quad b=-\frac{AP}{2\phi} \qquad (23)$$

که دقیقاً همان چیزی است که مورد انتظار بود و در ضمن با کارهای قبلی[۳] مطابقت کامل دارد. برای رسم تابع توزیع فشار، می‌توان رابطه‌ی ۹ را به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

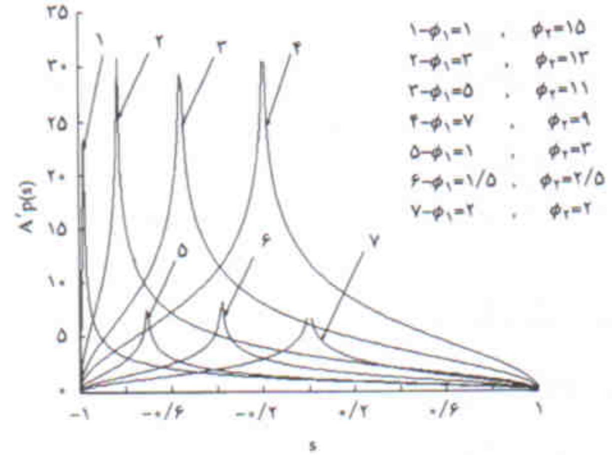
$$p(s)=\frac{\phi_1+\phi_2}{\pi A}\ln\left[\frac{1+\sin\left[\arccos(s)+\frac{\pi}{2}\frac{\phi_2-\phi_1}{\phi_2+\phi_1}\right]}{s+\sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{\phi_2-\phi_1}{\phi_2+\phi_1}\right]}\right] \qquad (24)$$

در شکل ۳ نمودار تغییرات $p(s)$ برحسب s در زاویه‌های مختلف رسم شده است. مشاهده می‌شود که در صورت ثابت بودن $\phi_1+\phi_2$ با افزایش اختلاف ϕ_1 و ϕ_2 اثرات عدم تقارن بیشتر می‌شود. در ضمن با افزایش $\phi_1+\phi_2$، چنان که انتظار می‌رفت میزان تنش‌ها افزایش پیدا می‌کند (شکل ۴). به همین دلیل در ابتدای کار اخیر برای محدود نگه‌داشتن کرنش‌ها در زیر رأس گوه، ϕ_1 و ϕ_2 زوایای کوچکی فرض شده‌اند.

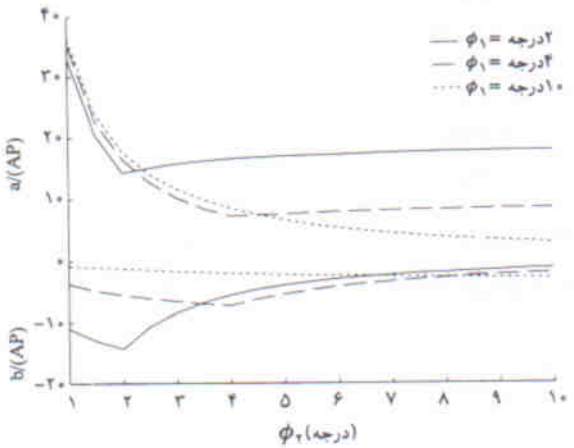
در نهایت در شکل ۵ نمودار تغییرات طول ناحیه‌های تماس برحسب تغییرات ϕ_1 و ϕ_2 رسم شده است. مشاهده می‌شود که در یک ϕ_1 ثابت، با افزایش ϕ_2 طول تماس a کم شده و طول تماس b افزایش می‌یابد. این روند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که گوه متقارن شود. در این نقطه طول‌های تماس a و b با هم برابر می‌شوند و پس از آن با افزایش ϕ_2 این روند معکوس می‌شود؛ یعنی طول a افزایش پیدا می‌کند و طول b کاهش. در ادامه‌ی این روند با افزایش بیشتر ϕ_2 طول تماس b به سمت صفر میل می‌کند و طول تماس a نیز به مقدار خاصی همگرا می‌شود.



شکل ۳. تغییرات $Ap(s)$ با ϕ_1 و ϕ_2 در $\phi_1+\phi_2=10°$.



شکل ۴. تغییرات $Ap(s)$ با ϕ_1 و ϕ_2 در $\phi_1+\phi_2=4°$ و $\phi_1+\phi_2=16°$ (حالت‌های $\phi_2=15°$ و $\phi_2=13°$ فقط برای نشان دادن حالت حدی نتایج آورده شده‌اند).



شکل ۵. تغییرات $\frac{a}{AP}$ و $\frac{b}{AP}$ برحسب ϕ_2 در $\phi_1=2°$ و $4°$ و $10°$

نتیجه‌گیری

در تحقیق اخیر مسئله‌ی تماس یک گوه و یک نیم‌فضا در حالت نامتقارن مورد بررسی قرار گرفت ونتایج جدیدی در این زمینه به‌دست آمد. در ضمن در حالت خاص، صحت جوابها با به دست آوردن جواب‌های مسئله‌ی متقارن مورد تأیید قرار گرفته است. این مسئله در بسیاری از موارد عملی، از جمله سختی سنجی و آزمایش‌های خستگی فرسایشی، می‌تواند کاربرد داشته باشد.

پانوشت

1. half-space
2. hertzian contact problems
3. non-hertzian contact problems
4. field singularity of stress
5. fretting fatigue
6. shearing tractions
7. composite compliance
8. plane-strain
9. Young's Modulus
10. Poisson's Ratio
11. overlap
12. rigid-body rotation
13. singularity
14. normalizing
15. consistency equation

منابع

1. Barber. J. R. and Ciavarella, M., "Contact mechanics". *International Journal of Solids and Structures,* **37**, pp 29-43 (2000).
2. Ciavarella, M., Hills, D.A. and Monno, J., "Contact problems for a wedge with rounded apex", *International Journal of Mechanical Sciences,* **30** (10), pp 977-988 (1998).
3. Truman, C.E., Sackfield, A. and Hills, D.A., "Contact mechanics of wedge and cone indenters". *International Journal of Mechanical Sciences,* **37** (3), pp 261-275 (1995).
4. Jager, J., "New analytical and numerical results for two-dimensional contact profiles", *International Journal of Solids and Structures,* **39**, pp 959-972 (2002).
5. Hills, D.A., Nowell, D. and Sackfield, A., "Mechanics of elastic contacts". Butterworth, Hienemann (1993).
6. Muskhelishvili, N.I., "Singular integral equations". *Noordhoff International Publishing,* (Translated by J.R.M. Radok) (1977).
7. Shtayerman, I., Ya., "Contact problems of theory of elasticity". Leningerad, Moscow. Gostekhteoretizdat, (1949) Available from the British Library in an English Translation by Foreign Technology Div., FTD-MT-24-61-70 (1970).
8. Muskhelishvili, N.I., "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity". 4th Corrected and Augmented Edition, P. Noordhoff, Moscow (1957).
9. Spiegel, M.R., "Mathematical handbook". Schaum's Outline Series, McGraw Hill Book Co. (1968).