

مدل سازی جزئیات طراحی در محاسبات اجزاء محدود

در سازه های تیر و تاوه

مجید صادق آذر (دانشیار)

گروه مهندسی عمران

دانشگاه تهران

روش اجزاء محدود^۱ و برنامه های رایانه ای موجود در این ارتباط در حال حاضر چنان پیشرفته اند که یک محاسب کم تجربه نیز می تواند با استفاده از آن، یک سازه ی تیر و تاوه^۲ را مدل کرده و محاسبه کند. اما به علت کم دقتی ها، خطاها، ناهمگرایی ها و ناسازگاری های موجود در اتصال اجزاء مختلف محدود به یکدیگر، نمی توان از صحت نتایج این محاسبات چندان مطمئن بود. مسئله ی اصلی این است که استفاده ی همزمان از اجزاء تیر، تاوه، انواع تکیه گاه ها در مدل سازی یک سازه ی تیر و تاوه در شرایط مرزی مختلف، به علت تعاریف مختلف توابع اجزاء محدود و نیز سازگاری کم بین اجزاء ممکن است به خطاهای موضعی یا پیوسته منجر شود. در نوشتار حاضر، به بررسی سازه های متشکل از تیر و تاوه، و مسئله ی موجود بین تیر و تاوه ای که خط میانی آنها با هم منطبق نیست و در آن گشتاور خارج از مرکز به وجود می آید، می پردازیم. سپس با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی^۳ در تیر و برش مرزی بین تیر و تاوه (حاصل از گشتاور خارج از مرکز) در اجزاء محدود، تابع انرژی را برای استفاده در روش اجزاء محدود ارائه می کنیم.

مقدمه

مدل های ایستا یا پویا، در حدی که برای طراحی لازم است، به دست آورد. در گام دوم، برای اطلاع از خصوصیات دقیق سازه در محل های بخصوص، آن محل به عنصر بندی ریزتر با قابلیت ارائه ی رفتار دقیق تر سازه تبدیل می شود.

مسئله ی خاصی که در روش اجزاء محدود ظاهر می شود در ارتباط با اتصال انواع سازه ها با یکدیگر است، مانند آنچه که در اتصال تاوه ها به تیرها و عضوهای کناری مشاهده می شود. سعی این نوشتار بررسی این مسائل در سازه های تیر و تاوه، و ارائه ی راه حلی است که در «استفاده از زیر برنامه هایی برای تبدیل عناصر درشت به ریز عنصرهای توافقی و قابل انطباق» قابل استفاده باشد. این شیوه چنان است که رفتار کلی و جزئی سازه را در یک گام قابل محاسبه می کند و تعریف رفتار خصوصی و جزئیات سازه در محل اتصال عنصرهای مختلف سازه را از مدل سازی ثانوی بی نیاز می کند. به طور کلی این عملکرد به تعمیم روش اجزاء محدود منجر خواهد شد که ارضاء شرایط سازگاری، رفتار عنصرهای مختلف در محل مرز و اتصال آنها را مد نظر دارد.

اتصال تیر به تاوه

مدل سازی های رایج

در شکل ۱ مدل سازی متداول تیر و تاوه با استفاده از روش اجزاء محدود رسم شده است.^[۵] محور مدل سازی، معمولاً سطح میانی تاوه

امروزه به کمک برنامه های متعدد می توان اغلب سازه های فضایی پیچیده را با روش اجزاء محدود محاسبه و تحلیل کرد. این برنامه های رایانه ای به عنوان ابزار عملی کار روزانه ی مهندسان محاسب و محققان مطرح اند و با پیشرفت های اخیر، قادرند به موازات تحلیل سازه، کنترل تنش و طراحی، امور دیگری چون نقشه کشی، متره و برآورد مالی را نیز انجام دهند. این پیشرفت ها در تسهیل و تسریع محاسبات نقش بسزایی دارند.

علی رغم پیشرفت هایی که در ربع قرن اخیر برای ایجاد سازگاری بین انواع اجزاء - بخصوص در مرز آنها - انجام گرفته است، روش اجزاء محدود هنوز از خطاها، ناسازگاری ها و ناهمگرایی هایی در بین اجزاء برخوردار است که کتابها و مقالات متعددی به بحث پیرامون آن پرداخته اند.^[۴ و ۳، ۲، ۱] در برخی از مقالات گذشته و حال، این مسئله با عنصر بندی مناسب مورد بررسی قرار گرفته است. در آینده نیز با توسعه ی روش های برنامه نویسی، استفاده از زیر برنامه هایی که عناصر درشت را به ریز عنصرهای توافقی و قابل انطباق، با قابلیت همگرایی بالاتر تبدیل می کنند، بیشتر مورد توجه قرار خواهد گرفت. استفاده از تابع شکل سازگار در محاسبه ی تاوه ها و تیرها در مرحله یی است که فقط بیان کننده ی رفتار عنصر در محل است. برای بررسی خصوصیات ویژه ی سازه با استفاده از روش اجزاء محدود در گام اول می توان رفتار و خصوصیات کلی سازه را در

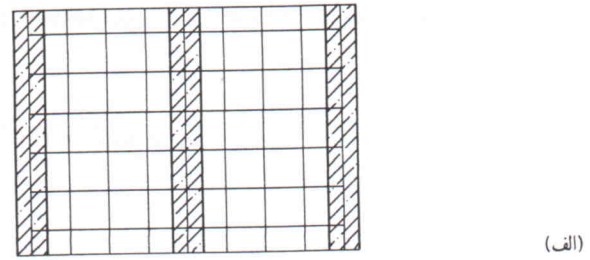
است. اگر محور تیر و تاوه در یک سطح باشند (شکل ۱-ب) از عنصرهای مستطیلی (یا مثلثی) برای تاوه و از عنصرهای تیر برای تیر استفاده می‌شود. روش اجزاء محدود متداول در محاسبات رابانه‌یی پاسخگوی این حالت است. در صورت وجود خارج از مرکزیت بین محور تیر و تاوه (شکل ۱-ج)، مسئله‌ی خروج از مرکز با کمک اجزاء صلب مدل می‌شود. این مدل، گشتاور ناشی از خروج از مرکز محور تیر و تاوه را در نظر می‌گیرد ولی تغییر شکل‌های برشی مرزی بین تیر و تاوه، از آنجا که در تابع انرژی منظور نشده است، در محاسبات ظاهر نمی‌شوند.

تغییر شکل برشی Δ_S بین تیر و تاوه ناشی از تغییر طول تیر تحت اثر نیروی گشتاور خارج از مرکز باید در تابع انرژی تغییر شکل اجزاء محدود منظور شود (شکل ۲). معمولاً در روش اجزاء محدود، اثر این تغییر شکل برای تیر و برای تاوه به‌طور مجزا در محاسبات عادی سازه‌ها و در برنامه‌های رابانه‌یی موجود است، ولی اثر تغییر شکل برشی مرزی Δ_S ناشی از اثر گشتاور خارج از مرکز در توسعه‌ی اجزاء تیر و تاوه منظور نشده است.

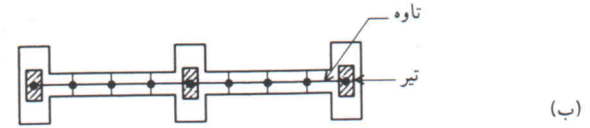
مدل‌سازی با رعایت اثر تغییر شکل برشی مرزی

شکل ۲ سازه‌ی تیر و تاوه (ورق) را نشان می‌دهد که در آن، تاوه بر روی تیر تکیه‌دار قرار دارد و تیر و تاوه به هم متصل‌اند و با هم کار می‌کنند. چنان‌که مشاهده می‌شود، خط میانی تاوه و محور ثقل تیر بر روی هم منطبق نیستند و تیر به صورت غیرمرکزی به تاوه (یا برعکس) وصل شده است. در محاسبات متداول اجزاء محدود، اتصال غیرمرکزی تیر به تاوه، در رابطه‌های مربوطه منظور نشده است و ناسازگاری در رفتار بین دو بخش سازه (یعنی بین تیر و تاوه) ناشی از اثرات غشایی موجود است. اگر از اثر تغییر شکل‌های ناشی از برش حاصل از اثر خروج از مرکز صرف‌نظر شود، یک ناسازگاری در روند تغییر شکل تیر و تاوه، و در جهت طولی در لبه‌ی اتصال آن‌ها پدید می‌آید. علت این ناسازگاری انتخاب توابع شکل برای جابجایی طولی و دوران‌های طولی تیر و تاوه از درجات مختلف است. همچنین در عنصرهایی که بر پایه‌ی استفاده از توابع یکسان (هم‌مرتبه) با رعایت اثر تغییر شکل برشی استوارند، معمولاً تغییر شکل‌های برشی بین عنصرهای تیر و تاوه منظور نشده‌اند.

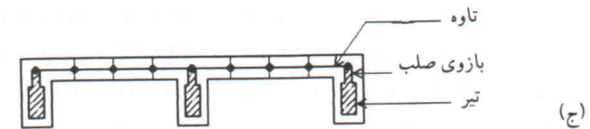
در شکل ۲ سازه‌ی تیر و تاوه (شکل ۲-الف) و نیروهای بین آن‌ها (شکل ۲-ب) رسم شده‌اند. U_p ، W_p و Φ_p به ترتیب تغییر شکل تاوه در تار میانی در جهت x و z و دوران حول محور خمشی y بوده و تغییر شکل‌های متناظر برای تیر U_B ، W_B و Φ_B در مرکز ثقل تیر است.



(الف)

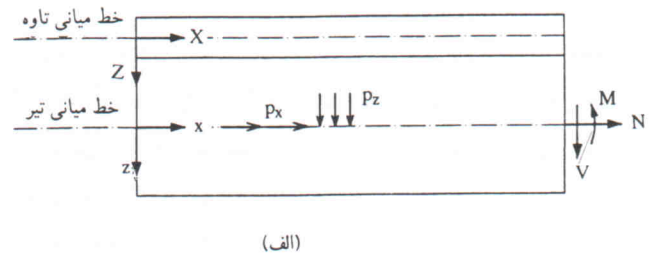


(ب)

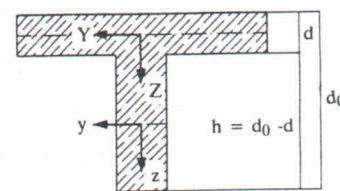


(ج)

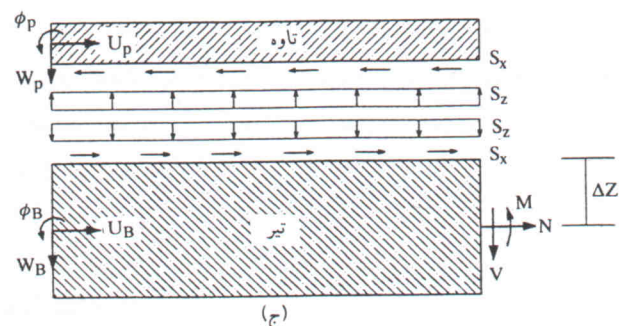
شکل ۱. مدل‌سازی متداول برای سازه‌ی تیر و تاوه در محاسبات عادی اجزاء محدود: الف) عنصربندی تیر و تاوه در نقشه؛ ب) مقطع و عنصربندی تیر و تاوه بدون خروج از مرکزیت؛ ج) مقطع و عنصربندی تیر و تاوه با خروج از مرکزیت.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲. تیر و تاوه: الف) تیر؛ ب) مقطع تیر؛ ج) نیروهای مؤثر بین تیر و تاوه، نیروهای تیر، و تغییر شکل تاوه و تیر.

$$= \frac{\Delta z}{Gbh} \left(V + \frac{f}{3} \Delta z \cdot S_x \right)$$

$$W_p - W_B = 0 \quad (6)$$

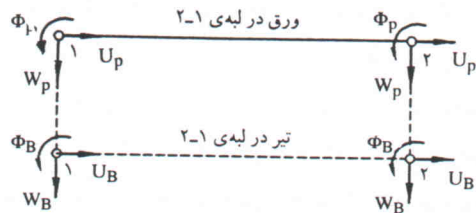
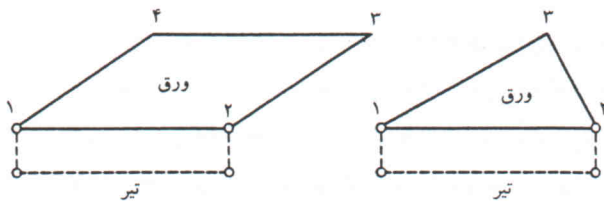
حال اگر تساوی انرژی تغییر شکل نیروهای داخلی و خارجی را بنویسیم، و در آن علاوه بر تعادل نیروها در تاوه، تعادل نیروها در تیر را هم منظور کنیم (با استفاده از رابطه‌های ۱ تا ۶)، تابع کلی تر π^* نسبت به تابع ورقها (π_p) در محاسبات روش اجزاء محدود به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\pi^* = \pi_p - \int_0^l \left\{ \left[u_p + \frac{d}{z} \Phi_p \right] \cdot N' - W_p \left[-M'' + (\Delta Z \cdot N') - p_z \right] \right\} dx \quad (7)$$

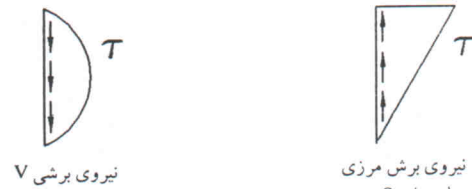
در رابطه‌ی فوق π_p تابعی است که در روش اجزاء محدود برای مدل‌سازی اجزاء سه یا چهار گره‌یی ورق به کار می‌رود (شکل ۴) و $A = b \cdot h$ است.

از آنجا که در جزء تیر برای نیروی محوری N از تابع خطی و برای گشتاور از تابع درجه دوم استفاده شده است، بهتر است برای اجزاء تاوه در مدل‌سازی اجزاء محدود - به منظور سازگاری و همگرایی در گره‌ها و لبه‌ها - در مورد تغییر شکل طولی (U_p) از تابع خطی و برای تغییر شکل قائم (خیز) ورق (W_p) از تابع درجه دوم استفاده شود. در این حالت رابطه‌ی ۷، از نظر اتصال تیر و تاوه، یک تابع سازگار و همگرا خواهد بود.

درجات آزادی تیر (Φ_B, W_B, U_B) فقط در دو گره انتهایی تیر ظاهر می‌شوند و در ارتباط با آنها، نیروهای M, N, V و محاسبه می‌شوند. بقیه‌ی نیروها $(M' \text{ و } N')$ در جزء محدود به عنوان یک

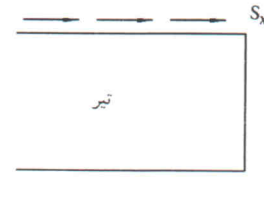


شکل ۴. اجزاء تیر و ورق: الف) تیر با آزادی‌های مستقل؛ ب) ورق چهارگره‌یی با عنصر تیر؛ ج) ورق سه گره‌یی با عنصر تیر



نیروی برشی V

نیروی برش مرزی ناشی از S_x در ارتفاع $\Delta z = \frac{h}{3}$



شکل ۳. روند تنش‌های برشی در تیر: الف) نیروی برشی V؛ ب) نیروی برشی مرزی S_x برای $\Delta z = \frac{h}{3}$

نیروهای برشی طولی بین ورق و تیر با S_x ، و نیروهای برشی قائم (بلندشدن ورق از روی تیر) با S_z نشان داده شده است. M, V, N نیروها و P_x و P_z بارهای گسترده‌ی وارده بر تیر هستند. تعادل نیروها در تیر به شرح زیر است:

$$S_x = -N' - p_x \quad (1)$$

$$V = M' - \frac{h}{3} \cdot N' = M' - \Delta Z \cdot N' \quad (\Delta Z = \frac{h}{3}) \quad (2)$$

$$S_z = -V' - p_z = -M'' + (\Delta Z \cdot N')' - p_z \quad (3)$$

در رابطه‌ی فوق مشتق‌گیری ($'$) به سمت متغیر dz است (مثل $N' = \frac{dN}{dz}$).

در شکل ۳ توزیع تنش‌های برشی بر روی مقطع تیر رسم شده است که از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول ناشی از نیروی برشی V و بخش دوم ناشی از برش مرزی S_x است. نیروی برشی مرزی به علت تأثیر گشتاور خارج از مرکز حاصل بین محور تیر و تاوه در تنش‌های تیر است. شرایط سازگاری تغییر شکل‌ها بین تیر و تاوه با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی و رعایت توزیع تنش‌های برشی بر روی مقطع تیر به شرح زیرند (سهمی برای V و خطی برای S_x):

تغییر شکل برشی (γ)

$$W'_B + \Phi_B = \gamma = \frac{1}{Gbh} \left(\frac{f}{3} V + \Delta Z \cdot S_x \right) \quad (4)$$

تغییر شکل برشی مرزی Δ_s

$$\left(U_p + \frac{d}{z} \Phi_p \right) - (U_B + \Delta Z \cdot \Phi_B) = \Delta_s \quad (5)$$

جدول ۱. اثر مدل‌سازی برشی بر روی گشتاورها و تغییر شکل

مدل سوم γ طبق رابطه‌ی ۴ Δ_s طبق رابطه‌ی ۵	مدل دوم $\gamma = \frac{1}{Gb_h} \frac{6}{5} V$ $\Delta_s = 0$	مدل اول $\Delta_s = 0$ و $\gamma = 0$	
۱۶۵/۶	۱۶۲/۴	۱۶۷/۹	گشتاور داخل دهانه (KNm)
-۲۶۲/۸	-۲۷۷/۷	-۲۸۰/۰	گشتاور تکیه‌گاهی تیر (KNm)
۰/۱۶۷	۰/۱۲۳	۰/۱۱۶	خیز در وسط دهانه‌ی تیر (mm)

مدل دوم - محاسبه‌ی سازه با رعایت تغییر شکل‌های برشی γ ناشی از نیروی برشی V ($\Delta_s = 0$ و $\gamma \neq 0$). در این حالت، تغییر شکل‌های برشی به گونه‌ی که در محاسبات عادی سازه‌ی به روش اجزاء محدود مطرح است منظور می‌شوند و $\gamma = \frac{1}{Gb_h} \frac{6}{5} V$ در نظر گرفته می‌شود.

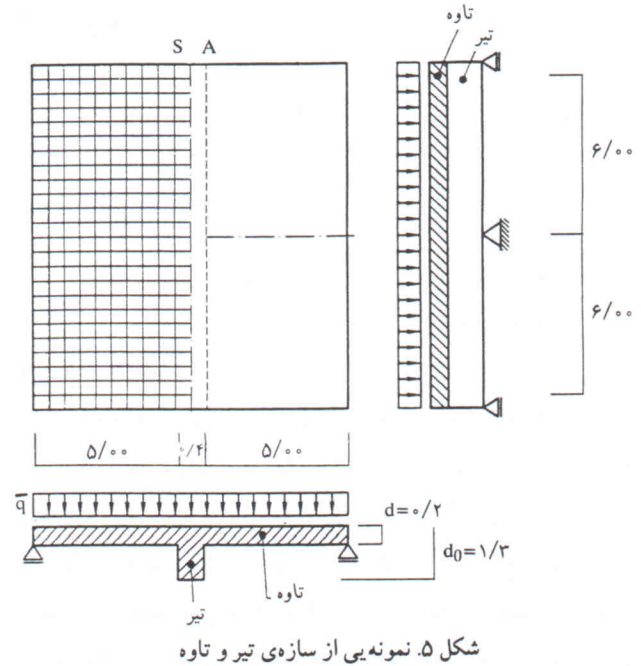
مدل سوم - محاسبه‌ی سازه با رعایت تغییر شکل‌های برشی کامل (γ و Δ_s)، طبق رابطه‌های ۴ و ۵ ($\Delta_s \neq 0$ و $\gamma \neq 0$). نتایج محاسبات برای گشتاور منفی تیر بر روی تکیه‌گاه وسط و گشتاور مثبت تیر (در داخل دهانه) و نیز تغییر شکل وسط دهانه‌ی تیر در جدول ۱ آمده است.

اثر تغییر شکل‌های برشی بر روی تغییر شکل سازه به وضوح در جدول دیده می‌شود. اگر اثر تغییر شکل برشی به نحوی که در محاسبات عادی سازه‌ها متداول است، در نظر گرفته شود میزان افزایش تغییر شکل در حدود ۶٪ و اگر به‌طور کامل طی رابطه‌های ۴ و ۵ در نظر گرفته شود حدود ۳۹٪ است.

اثر رعایت تغییر شکل برشی بر روی گشتاورها نیز قابل ملاحظه است. با توجه به نتایج حاصله می‌توان نتیجه گرفت که رعایت اثر تغییر شکل‌های برشی (مدل دوم)، چنان‌که در محاسبات عادی سازه‌ی به روش اجزاء محدود انجام می‌گیرد، کافی و بیان‌کننده‌ی کل اثر برشی نیست. اثر مدل‌سازی فوق بر نیروهای حاصله در تاوه، به‌علت سختی زیاد تیر ناچیز است.

نتیجه‌گیری

برای مدل‌سازی سازه‌های تیر و تاوه، و محاسبه‌ی آن به روش اجزاء محدود، که در آن اجزاء تیر و تاوه به صورت سازگار عمل کنند و علاوه بر آن اثرات غیر هم سطح بودن محور میانی تاوه و محور ثقل نیز رعایت شده باشد، و نیز اثر تغییر شکل برشی به‌طور دقیق منظور شود، می‌توان از تابع کلی انرژی مطابق رابطه‌ی ۷ استفاده کرد. در اجزاء محدودی که در اینجا تعریف می‌شوند، یعنی اجزاء محدود مستطیلی یا مثلثی، برای تاوه و اجزاء تیر برای تیر، تغییر شکل برشی



زیر برنامه قابل محاسبه‌اند. در این حالت M' نیروی برشی در عنصر تیر، بدون در نظر گرفتن اثر نیروی برشی مرزی S_x است. در نهایت یک عنصر با دو گره در لبه‌ی ورق و نیز در ابتدا و انتهای عنصر تیر موجود خواهد بود (شکل ۴).

جهت بررسی اثر مدل‌سازی تیر و تغییر شکل‌های برشی بر روی سازه، نمونه‌ی را مورد محاسبه قرار می‌دهیم. این نمونه قبلاً مدل‌سازی و بررسی شده است [۷، ۶] و در اینجا اثر تغییر شکل برشی تیر (γ) و تغییر شکل برشی مرزی بین تیر و تاوه (Δ_s) طبق روابط ۴ و ۵ به سازه‌ی تیر و تاوه اضافه می‌شود. در شکل ۵ ضمن نمایش این نمونه مشاهده می‌شود که از یک تیر قوی در وسط و زیر تاوه استفاده شده است. تاوه در دو لبه، و تیر در دو انتها و وسط بر روی تکیه‌گاه قرار دارد. مدل‌سازی تیر و تاوه نیز در شکل رسم شده است. با استفاده از اجزاء مستطیلی برای تاوه، و از اجزاء تیر برای تیر، محاسبات برای سه مدل مختلف، طبق رابطه‌ی ۷، انجام می‌شود:

مدل اول - محاسبه‌ی سازه بدون رعایت تغییر شکل‌های ناشی از برش و برش مرزی ($\Delta_s = 0$ و $\gamma = 0$).

توجه قرار می‌گیرد. تأثیر اخیر ناشی از عدم تطابق محور تیر و تاوه است و میزان آن بر روی نتایج تغییر شکل و نیروهای تیر، چنان که محاسبه‌ی نمونه نشان می‌دهد، قابل توجه است و مقدار آن در نمونه حدود ۳۹٪ است.

به صورت دقیق‌تر بررسی می‌شود و در آن علاوه بر اثر تغییر شکل برشی ناشی از کرنش جانبی برشی γ ، که معمولاً به صورت متداول در برنامه‌های اجزاء محدود مرسوم است، اثر تفاوت تغییر شکل طولی بین تیر و تاوه $\Delta\delta$ به عنوان نیروی برشی مرز اتصال نیز مورد

پانوشتها

1. finite element method
2. slab-beam structure
3. shear deformation

منابع

1. Zienkiewicz and Taylor. "The finite element method" Fourth Edition, 1, Mc Graw Hill (1989).
2. Dietrich, R. "Finite element in alltagsgeschaef". In Wuderlich W & E. Stein (Hrsg). Finite Element Anwendungen in der Baupraxis: pp. 33-41. Berlin: Ernst & Sohn (1983).
3. Ramm, E.J. Mueller & K. Wassermann "Problemfalle bei FM-Modellierungen". Tagungsband Baustatik Baupraxis 4: 9.1-9.24, Hannover (1990).
4. Batoz, J.L. & M.B. Tahar. "Evaluation of a new quadrilateral

thin plate bending element". Int Meth. Eng. 18, pp. 1655-1677 (1982).

5. Mac Load, I. "Analytical modelling of structural systems", (1970).
6. Allmann, D.J. "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane clasticity analysis". Int. J.L. Num. Meth. Eng. 26, pp. 717-730 (1988).
7. Cramer, H. "Anwendungsorientierte finite element modelle fuer die kopplung verschiedenartiger tragwerksteile" Baustatik-Baupraxis 7, pp. 121-128. A.A. BALKEMA/ROTTERDAM (1999).
8. Wunderlich, W., G. Kiener & W. Ostermann "Modellierung und berechnung von deckenplatten" Bauingenieur 69: pp.381-390 (1994).