

# شبیه‌سازی عددی جریان آشفته بین استوانه‌های هم‌مرکز با چرخش استوانه‌ی داخلی

ابوالحسن عسگرشمسی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

بیژن فرهانی (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار میدان سرعت و دما در فاصله‌ی هوایی دو استوانه‌ی هم‌مرکز به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در حالتی که استوانه‌ی داخلی با سرعت دورانی ثابت حول محور خود می‌چرخد و استوانه‌ی خارجی ثابت است، سیال با جریان یکنواخت وارد فاصله‌ی هوایی بین دو استوانه می‌شود و به‌صورت توسعه‌یافته خارج می‌شود. شرایط مرزی گرمایی شار ثابت و آدیاباتیک بر دیوار داخلی و دیوار خارجی اعمال می‌شود و در هر حالت، مقدار عدد نوسل روی دیواری که تحت شار ثابت است محاسبه خواهد شد. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت دورانی در هر حالت عدد نوسل افزایش می‌یابد.

واژگان کلیدی: استوانه‌های هم‌مرکز، عدد تیلور، عدد نوسل، جریان آشفته، سرعت زاویه‌یی.

a\_shamsi@mech.sharif.edu  
bifa@sharif.edu

## مقدمه

محاسبه‌ی میدان سرعت و دما بین دو استوانه‌ی هم‌مرکز به‌عنوان مسئله‌ی اساسی در محاسبه‌ی حرارت و افت فشار در وسایل مخلوط‌کننده‌ی شیمیایی، توربوماشین‌ها، یاقان‌ها، مبدل‌های حرارتی چرخشی، حفاری چاه‌های نفتی، خنک‌کاری در ماشین‌های الکتریکی و میکروژنراتورهای دوربالا کاربرد دارد. در این وسایل به دست آوردن میدان جریان و انتقال حرارت در فاصله‌ی هوایی بین استوانه‌ی ثابت و استوانه‌ی چرخنده اهمیت بسیاری در طراحی سیستم خنک‌کاری، تعیین میزان دبی سیال مورد نیاز برای خنک‌کاری، و افت فشار ناشی از عبور سیال از این فاصله دارد. مسئله در حالت کلی سه‌بعدی همراه با لایه‌ی مرزی آشفته است.

درخصوص میدان سرعت و دمای بین دو استوانه‌ی هم‌مرکز تحقیقات متعددی انجام شده است. اولین بار در سال ۱۹۲۳ جریان میان دو استوانه‌ی هم‌مرکز به‌وسیله‌ی تیلور مورد بررسی قرار گرفت.<sup>[۱]</sup> او پایداری جریان بین دو استوانه‌ی چرخان هم‌مرکز را به‌صورت تجربی بررسی کرد و دریافت که وقتی استوانه‌ی خارجی می‌چرخد و استوانه‌ی داخلی ساکن است جریان پایدار خواهد بود و در غیر این صورت جریان ناپایدار می‌شود. او در مشاهداتش ملاحظه کرد که با افزایش سرعت دورانی استوانه‌ی داخلی و عبور آن از یک سرعت دورانی بحرانی ورتکس‌هایی در راستای محوری تشکیل می‌شود. به این ترتیب جریان از حالت دوبعدی خارج و به‌صورت سه‌بعدی درمی‌آید. علت به‌وجود آمدن این ورتکس‌ها ناپایدار شدن جریان آرام بین دو استوانه بر اثر نیروهای شناور ناشی از گریز از مرکز است. او برای نشان دادن سرعت بحرانی،

عددی تحت عنوان عدد تیلور تعریف کرد:

$$Ta = \frac{V_w (r_o - r_i)}{\nu} \sqrt{\frac{D_h}{2r_m}}$$

که در آن  $V_w$  سرعت دورانی دیوار داخلی است. در سال ۱۹۴۳ بر پایه‌ی تحقیقات آزمایشگاهی، جریان حلقوی آرام و مغشوش بین استوانه‌های هم‌مرکز مورد مطالعه قرار گرفت.<sup>[۲]</sup> نتایج حاصله نشان داد که بر اثر دوران استوانه‌ی داخلی یک جریان ورتکس در هر دو رژیم آرام و آشفته القا می‌شود به‌گونه‌ی که در جریان آرام محور جریان ورتکس بر محور دوران عمود است، در حالی که در جریان مغشوش غیر متعامد است.<sup>[۲]</sup>

تحقیقات انجام شده در سال ۱۹۶۱ نشان داد که جریان اندک در راستای محوری بر ساختار جریان تأثیری پایدار دارد. برای جریان محوری با رینولدزهای پایین، عدد تیلور بحرانی که در آن رژیم جریان تغییر می‌کند طبق رابطه‌ی ۱ افزایش می‌یابد:

$$Ta_{cr}(Re_z) = Ta_{cr}(Re_z = 0) + 26/5 Re_z^2 \quad (1)$$

گزلی<sup>[۳]</sup> رابطه‌ی عدد نوسل با رینولدز مؤثر را چنین بیان کرد:

$$Nu \approx (Re_{eff})^{0.8} \quad (2)$$

که در آن رینولدز مؤثر مطابق رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود:

$$Re_{eff} = \frac{U_{eff} D_h}{\nu} \quad (3)$$

در رابطه‌ی ۷ نیازمند محاسبه‌ی  $\mu_t$  هستیم که با استفاده از مدل‌های مختلفی نظیر اسپالارت و  $k - \varepsilon$  این کار ممکن خواهد بود. بر این مبنا، انرژی جنبشی آشفتگی و نرخ اتلاف آن طبق روابط ۸-۱۱ مدل می‌شوند. در این معادلات  $\mu_t$  لزجت ناشی از تأثیرات گردابه‌ی در جریان آشفتگی و  $\mu_{eff}$  لزجت کل جریان بعد از اعمال اثرات گردابه‌ی است.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_2 \frac{\varepsilon}{k} \rho \quad (9)$$

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (10)$$

$$\mu_{eff} = \mu_t + \mu \quad (11)$$

همچنین در این مدل، شار حرارتی رینولدز براساس رابطه‌ی ۱۲ و ۱۳ مدل می‌شود. در این رابطه‌ها  $\alpha_t$  توزیع حرارتی ناشی از حرکت گردابه‌ی است.

$$\overline{u_i' \theta'} = -\alpha_t \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

$$\alpha_t = \frac{c_\mu}{Pr_t} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (13)$$

در رابطه‌ی ۱۳،  $Pr_t$  عدد پراکتل آشفتگی است و در محدوده‌ی ۰٫۸ تا ۱٫۳ قرار دارد. مقادیر عددی سایر ضرایب در جدول ۱ آورده شده است.

### حل عددی

به منظور تحلیل عددی، یک کد رایانه‌ی توسعه یافته به طوری که جریان به صورت سه بعدی، دائم و آشفتگی در حالت تراکم‌ناپذیر مدل‌سازی شده است. محاسبات کد بر پایه‌ی حل معادلات دیفرانسیل پارایی حاکم بر جریان است. این معادلات به روش حجم محدود<sup>۴</sup> گسسته می‌شود. معادلات اندازه حرکت برای مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات دکارتی و شبکه‌ی متمرکز<sup>۵</sup> حل می‌شوند. معادلات گسسته شده به صورت رابطه‌ی ۱۴ بازنویسی می‌شوند:

$$a_P \phi_P = \sum a_{NB} \phi_{NB} + S_C \quad (14)$$

متغیر  $\phi$  می‌تواند هر یک از متغیرهای  $U, V, W, T, k, \varepsilon$  باشد. برای به دست آوردن سرعت روی سطوح کنترل از میان‌یابی رای-چاو<sup>۶</sup> استفاده شده است. همچنین با استفاده از معادله‌ی پیوستگی به معادله‌ی برای تصحیح فشار دست می‌یابیم. برای ارتباط بین میدان سرعت و فشار نیز از الگوریتم سیمپل‌سی<sup>۷</sup> استفاده شده است.

برای تخمین شارهای جابه‌جایی از طرح کوئیک<sup>۸</sup> استفاده می‌کنیم. این طرح دارای خطای قطع از مرتبه‌ی سوم است و به کارگیری آن در مسائل کم‌انتشار<sup>۹</sup> مفید است. استفاده از روش‌های مرتبه پایین، مانند روش بادسو<sup>۱۰</sup> ی مرتبه‌ی اول، در

جدول ۱. ضرایب مورد استفاده در معادله‌ی  $k - \varepsilon$ .

ضریب	$\sigma_\varepsilon$	$\sigma_k$	$c_\mu$	$c_2$	$c_1$
مقدار	۱٫۳	۱٫۰	۰٫۰۹	۱٫۹۲	۱٫۴۴

سرعت مؤثر  $(U_{eff})$  براساس سرعت متوسط در راستای محوری  $(U_m)$  و سرعت دورانی دیوار داخلی  $(V_w)$  تعریف می‌شود:

$$U_{eff} = \sqrt{(U_m^2 + V_w^2/4)} \quad (4)$$

بعدها با استفاده از سرعت مؤثر برای عدد رینولدز، رابطه‌ی ۵ برای عدد نوسل ارائه شد:<sup>[۴]</sup>

$$Nu = 0.15 \left( 1 + 2.3 \frac{D_h}{L} \right) \left( \frac{r_o}{r_i} \right)^{0.25} (Re_{eff})^{0.8} Pr^{1/3} \quad (5)$$

سرعت متوسط و مؤلفه‌های نانسور تنش برشی رینولدز برای سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی از طریق سرعت سنجی لیزری داپلری (LDV)<sup>۱</sup> اندازه‌گیری شد.<sup>[۵]</sup> محققین در بررسی جریان آشفتگی بین دو استوانه‌ی دوار هم‌مرکز، از مدل‌سازی گردابه‌های بزرگ<sup>۲</sup> استفاده کرده‌اند. آنان این تحقیق را در سرعت‌های دورانی پایین انجام داده‌اند به طوری که نسبت چرخش  $(N = V_w/U_m)$  کوچک‌تر از ۱ باشد.<sup>[۶]</sup> در این نوشتار، مسئله‌ی میدان جریان و انتقال سه بعدی حرارت به روش عددی شبیه‌سازی شده است. جریان در حالت تراکم‌ناپذیر برای سرعت دورانی استوانه‌ی داخلی در حدود  $8000$  دور در دقیقه (نسبت چرخش در حدود ۲۰) بررسی شده است. از مدل  $k - \varepsilon$  برای مدل‌سازی آشفتگی استفاده شده است. در نتیجه‌ی بررسی کامل میدان دما تحت شرایط مرزی مختلف، می‌توان دما روی سطح استوانه‌ی داخلی و خارجی را محاسبه کرد و از آن‌ها برای محاسبه‌ی تنش‌های حرارتی در طراحی استفاده کرد.

### فرمولاسیون ریاضی

معادلات بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان جریان سیال‌اند که در تمام محیط‌ها صدق می‌کنند. در مدل‌سازی عددی مستقیم<sup>۳</sup> نیز همین معادلات -- به صورت کامل همراه با شرایط دقیق مرزی و اولیه -- توسط ابررایانه‌ها حل می‌شوند. اما در حال حاضر قوی‌ترین ابررایانه‌ها نیز فقط قادر به حل جریان‌های ساده هستند. لذا به منظور حل مسائل پیچیده‌تر باید ساده‌سازی‌هایی بر روی این معادلات صورت پذیرد. بدین منظور کمیت‌های جریان به دو بخش متوسط و نوسانی تقسیم، و در این معادلات قرار داده می‌شود و سپس متوسط‌گیری زمانی روی آن‌ها صورت می‌پذیرد. نتیجه‌ی این متوسط‌گیری زمانی ایجاد معادلات متوسط‌گیری شده است:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i' u_j'} \right] \quad (6)$$

همان‌طور که در معادله‌ی ۶ مشاهده می‌شود یک عبارت اضافی  $(-\rho \overline{u_i' u_j'})$  در معادلات ناویر-استوکس وارد شده که ناچار به مدل‌کردن آن هستیم. بوزینسک با ارائه‌ی یک رابطه سعی در مدل‌کردن آن کرد. با استفاده از این رابطه، مدل‌های مختلفی نظیر اسپالارت،  $k - \varepsilon$ ، و تنش‌های رینولدز ارائه شده است. مدل  $k - \varepsilon$  یکی از پرکاربردترین مدل‌های آشفتگی در محاسبات عددی است. در این مدل ترم‌های تنش رینولدز به وسیله‌ی رابطه‌ی بوزینسک (رابطه‌ی ۷) تقریب زده می‌شود و لذا معادلات حقیقی آن‌ها حل نمی‌شوند:

$$\overline{\rho u_i' u_j'} = -\mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (7)$$

جدول ۳. خواص متوسط جریان.

$N$	۱۳,۲۴	۱۳,۷۹	۱۴,۰۱
$Ta$	۳۰۰	۳۱۰	۳۱۵
$Re_{\tau}(Inner)$	۱۰,۹۳	۱۱,۲۲	۱۱,۳۷
$Re_{\tau}(Outer)$	۵,۶۷	۵,۷۸	۵,۸۴
$C_f(Inner)$	۳,۴۲	۳,۴۹	۳,۵۲
$C_f(Outer)$	۲,۷۸	۲,۸۲	۲,۸۵

آشفته‌گی ۱۰٪ انرژی جنبشی جریان فرض می‌شود؛ در خروج نیز شرط توسعه‌یافتگی اعمال شده است.

جریان ورودی دارای دمای ثابت، دیوار داخلی آدیاباتیک و دیوار خارجی تحت شار ثابت گرمایی است. در این حالت تغییرات عدد نوسل روی دیوار خارجی محاسبه شده، و در حالت دیگر این شرایط مرزی معکوس شده و تغییرات عدد نوسل روی دیوار داخلی به دست آمده است. سیال عامل هوا با خواص ثابت در نظر گرفته شده است.

### نتایج

#### الف) میدان سرعت

برای اعتماد به دقت نتایج، در جدول ۳ مقادیر متوسط جریان برای سه مقدار مختلف نسبت چرخش، در رینولدز محوری اندک و سرعت دورانی پایین محاسبه شده است. عدد تیلور ( $Ta$ ) با سرعت متوسط محیطی روی دیوار ( $V_w$ ) رابطه‌ی مستقیم دارد. ضریب اصطکاک پوسته‌ی براساس تنش برشی متوسط روی دیوار داخلی یا خارجی تعریف می‌شود.

$$C_f = \frac{2\tau_z}{\rho V_m^2} \quad (16)$$

در جدول ۳ دیده می‌شود که با افزایش نسبت چرخش، مقدار  $C_f$  افزایش می‌یابد و در هر حالت این مقدار روی دیوار چرخان بیشتر است.  $Re_{\tau}$  براساس سرعت اصطکاک  $Q_t$  روی دیوار داخلی یا خارجی مطابق رابطه ۱۷ تعریف می‌شود.  $\delta$  نصف فاصله‌ی هوایی و  $v$  گران روی سینماتیک سیال است.

$$Re_{\tau} = \frac{Q_t \delta}{\nu}, \quad Q_t = \left( \sqrt{\tau_z^2 + \tau_{\theta}^2} / \rho \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$\tau_z$  تنش متوسط روی دیوار در جهت محوری و  $\tau_{\theta}$  تنش متوسط روی دیوار در جهت محیطی است.

در شکل ۲ و ۳ نتایج کار حاضر با نتایج عددی موجود [۶] مقایسه شده است. اختلاف مشاهده شده در این نمودارها ناشی از اختلاف روش‌های شبیه‌سازی آشفته‌گی است. تغییرات شعاعی به صورت رابطه‌ی ۱۸ بی‌بعد شده است:

$$\bar{r} = \frac{2(r - r_i)}{r_o - r_i} \quad (18)$$

نمودار سرعت محوری از مقدار کمینه‌ی خود که محصول شرط عدم لغزش روی دیوار است به تدریج افزایش می‌یابد و تقریباً در وسط فاصله‌ی هوایی به مقدار بیشینه می‌رسد.

برای بررسی تأثیر سرعت چرخشی دیوار داخلی روی میدان سرعت، در یک عدد رینولدز محوری ثابت و در سه سرعت چرخشی مختلف، پروفیل سرعت محوری

مدل‌سازی شارهای جابه‌جایی باعث مشاهده‌ی نتایج غیر فیزیکی می‌شود. برای مثال با استفاده از یک روش مرتبه پایین دیده می‌شود که بردارهای سرعت به سمت داخل دیوار چرخان منحرف می‌شود که با استفاده از طرح کوئیک این مشکل قابل حل است.

برای حل دستگاه معادلات گسسته شده از الگوریتم حل ماتریس سه قطری<sup>۱۱</sup> استفاده شده است. در این روش، ابتدا گره‌های شبکه در جهت شمال - جنوب و سپس در جهت شرق - غرب و در انتها نیز در جهت بالا - پایین جاروب می‌شود. در طی روند حل و در هر تکرار، باقی‌مانده‌ها برای تک تک حجم‌های کنترل محاسبه و سپس قدر مطلق آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شود و به عنوان باقی‌مانده‌ی کلی منظور خواهد شد. باقی‌مانده‌ها برای حل معادله به طور جداگانه از رابطه‌ی ۱۵ محاسبه می‌شوند.

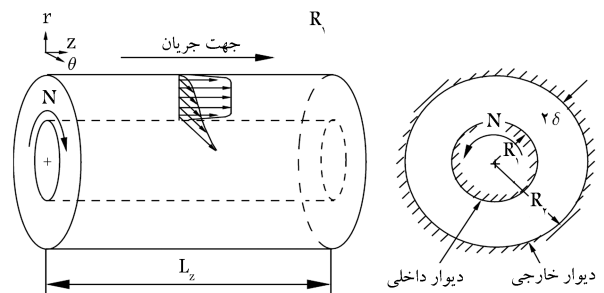
$$R_{\phi} = a_P \phi_P - \left( \sum a_{NB} \phi_{NB} + S_C \right) \quad (15)$$

در حل عددی، مقادیر باقی‌مانده‌ها برای متغیرها در حالت هم‌گرایی تقریباً از مرتبه‌ی  $10^{-5}$  است. مقادیر ضرایب مادون رهایی<sup>۱۲</sup> برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و همچنین سرعت‌های دورانی مختلف متفاوت است. به علت گرادبان شدید سرعت و دما در نزدیکی دیوار داخلی و خارجی، از یک شبکه‌ی محاسباتی غیر یکنواخت استفاده شده است. تعداد شبکه در جهت محوری  $10^{\circ}$ ، در جهت محیطی  $6^{\circ}$ ، و در جهت شعاعی  $5^{\circ}$  است.

### هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی

در این مسئله میدان جریان و انتقال حرارت میان دو استوانه‌ی هم‌مرکز به صورت سه بعدی و جریان پایا<sup>۱۳</sup> شبیه‌سازی شده است. هندسه‌ی مسئله در شکل ۱ و ابعاد هندسی مورد استفاده در جدول ۲ ارائه شده است.

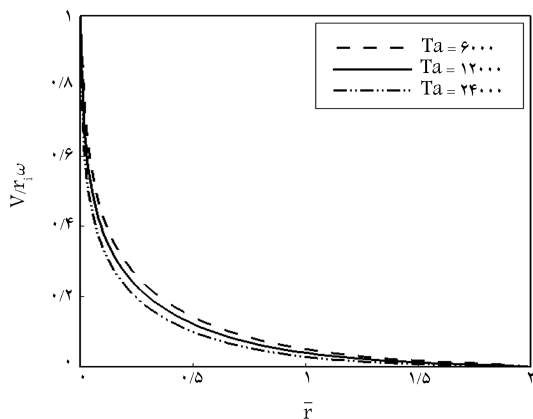
جریان سیال در ورود به فاصله‌ی هوایی بین دو استوانه به صورت جریان یکنواخت و در خروج از آن به صورت جریان توسعه‌یافته فرض شده است. چرخش دیوار داخلی با سرعت دورانی ثابت صورت می‌گیرد و دیوار خارجی ثابت است. با مشخص بودن اندازه‌ی سرعت روی دیوار داخلی و خارجی مقادیر متغیرهای آشفته‌گی روی جدار مشخص است. در ورود به فاصله‌ی هوایی مقدار انرژی جنبشی



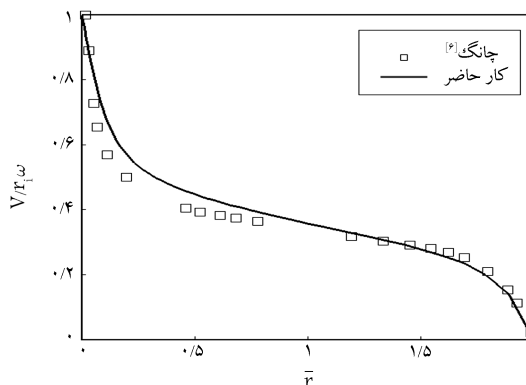
شکل ۱. مشخصات مسئله و طرح کلی آن.

جدول ۲. مشخصات هندسی مسئله.

پارامتر	$R_o$ (mm)	$R_i$ (mm)	$\delta$ (mm)	$L$ (mm)
مقدار	۹۰	۴۵	۹۰	۱۳۵۰



شکل ۵. مؤلفه‌ی سرعت محیطی در سه سرعت دورانی مختلف.



شکل ۲. مقایسه‌ی نمودار سرعت محیطی با نتایج عددی چانگ [۶].

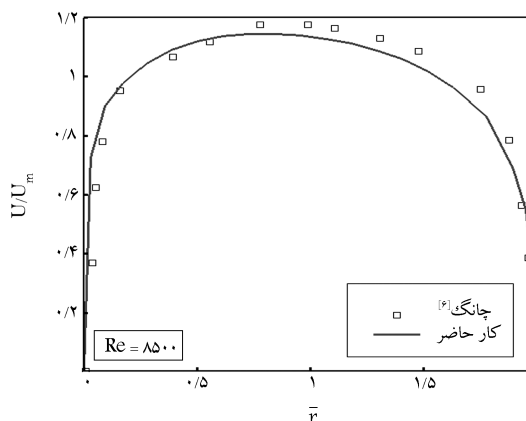
### ب) میدان دما

#### ۱. دیوار داخلی عایق و دیوار خارجی تحت شار ثابت

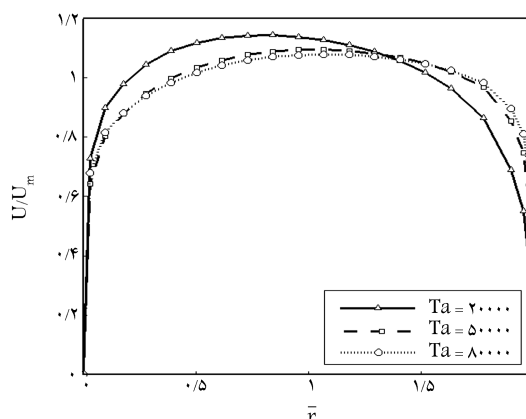
در این حالت، دمای سیال به صورت  $\theta = \frac{T - T_{ent}}{q'' D_h / k}$  بی‌بعد شده که در آن  $T_{ent} = 293 K$  دمای سیال ورودی،  $q'' = 10 W/m^2$  شار ثابت اعمال شده بر دیوار استوانه‌ی خارجی،  $D_h = 90 mm$  قطر هیدرولیکی و  $k$  ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی سیال عامل است.

در شکل ۶ تغییرات نمودار دمای بی‌بعد در فاصله‌ی هوایی در سرعت‌های دورانی مختلف و عدد رینولدز محوری ثابت، به‌منظور بررسی تأثیر افزایش سرعت دورانی دیوار داخلی بر نمودار دما نشان داده شده است. نمودارهای دما به‌طور یکنواخت از دمای دیوار داخلی به دما روی دیوار خارجی تغییر می‌کنند. در نزدیکی دیوار خارجی افزایش دمای زیادی به چشم می‌خورد؛ مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت دورانی، دمای سطح استوانه‌های داخلی افزایش و دمای سطح استوانه‌های خارجی کاهش می‌یابد و در نتیجه، نمودار دمای شعاعی به‌طور محسوس‌تری یکنواخت‌تر می‌شود. در نزدیکی دیوار داخلی «اضمحلال انرژی» و «افزایش طول اختلاط» دو عامل مهم روی نمودارهای دما هستند.

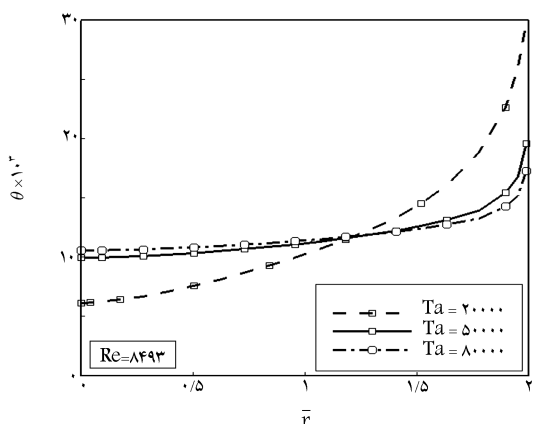
در شکل ۷ توزیع دمای دیوار داخلی در عدد رینولدز محوری ثابت و سه سرعت چرخشی متفاوت در راستای محوری ترسیم شده است. دمای دیوار داخلی، تا زمانی که شار ثابت اعمال شده بر دیوار خارجی باعث افزایش دمای آن شود، هم‌دما با سیال ورودی باقی می‌ماند. هنگامی که سیال طول توسعه‌یافته را طی می‌کند، به‌علت



شکل ۳. مقایسه‌ی نمودار سرعت محوری با نتایج عددی چانگ [۶].

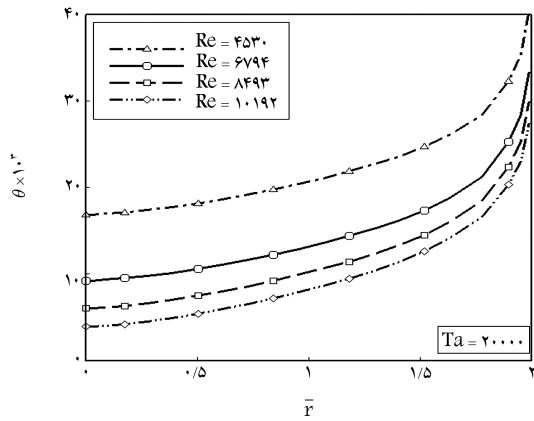


شکل ۴. مؤلفه‌ی سرعت محوری در سه سرعت دورانی مختلف.



شکل ۶. نمودار دما در فاصله‌ی هوایی در سرعت‌های دورانی مختلف.

محاسبه و در شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش عدد تیلور و در نتیجه افزایش سرعت چرخش دیوار داخلی، با افزایش نیروی گریز از مرکز نمودار سرعت محوری به سمت دیوار استوانه‌ی خارجی متمایل می‌شود و در نتیجه ضخامت لایه‌ی مرزی سرعت محوری نزدیک سطح استوانه‌ی داخلی و استوانه‌ی خارجی به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد. همچنین در شکل ۵ مؤلفه‌ی سرعت محیطی در سه سرعت دورانی مختلف و در یک رینولدز محوری ثابت رسم شده است. در این شکل سرعت محیطی بی‌بعد در برابر شعاع بی‌بعد رسم شده است. سرعت محیطی روی دیوار داخلی برابر سرعت دورانی استوانه‌ی داخلی است. در مجاورت دیوار داخلی گرادبان شدید مشاهده می‌شود.



شکل ۹. نمودار دما در فاصله‌ی هوایی در عدد رینولدز محوری مختلف.

خارجی محاسبه می‌شود:

$$Nu = \frac{q''}{\frac{1}{A} \int (T_w - T_b) dA} \frac{D_h}{k} \quad (19)$$

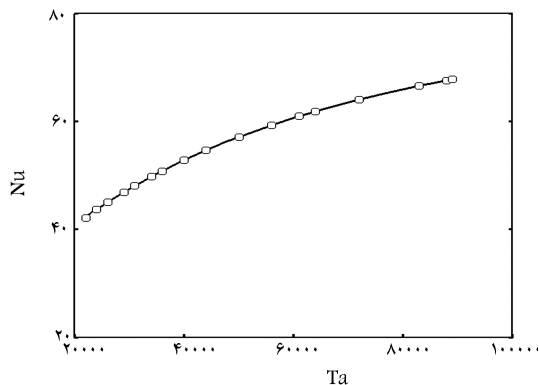
عدد نوسل در هر سرعت دورانی در خروجی استوانه‌ها به سمت مقدار ثابتی به نام «عدد نوسل در ناحیه‌ی توسعه‌یافته» میل می‌کند. در شکل ۱۰ این مقدار در یک رینولدز محوری ثابت ( $Re = 8493$ ) با سرعت‌های دورانی مختلف رسم شده است. دیده می‌شود که عدد نوسل در سرعت‌های دورانی پایین‌تر به تغییرات عدد تیلور حساس‌تر است و در سرعت‌های بالاتر مقدار تغییر عدد نوسل کم‌تر می‌شود. با برآش این نتایج می‌توان نتیجه گرفت که در یک رینولدز محوری ثابت عدد نوسل براساس رابطه‌ی ۲۰ با عدد تیلور متناسب است.

$$Nu \approx Ta^{0.24} \quad (20)$$

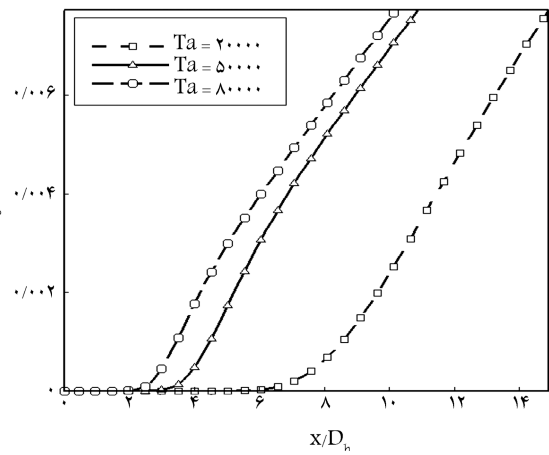
در جدول ۴ عدد نوسل حاصل از کد و رابطه‌ی تجربی ۵ با هم مقایسه شده‌اند. این مقادیر در رینولدز محوری و سرعت دورانی پایین به دست آمده و مشاهده می‌شود که با افزایش عدد تیلور مقدار عدد نوسل به تدریج افزایش می‌یابد.

#### ۲. دیوار داخلی تحت شار ثابت و دیوار خارجی عایق

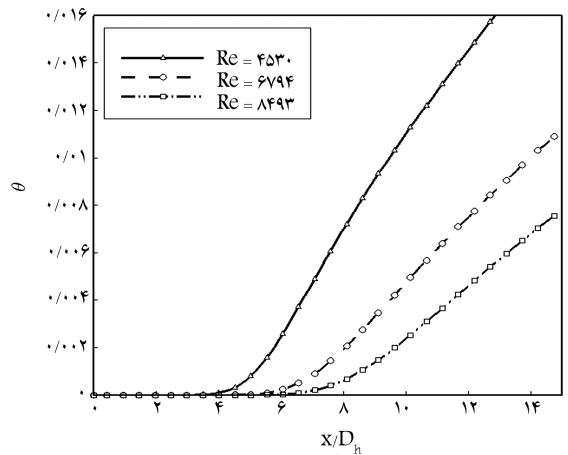
در این بخش شرایط مرزی گرمایی حاکم بر مسئله تغییر کرده و شار ثابت گرمایی بر دیوار داخلی اعمال شده، در حالی که دیوار خارجی عایق است. در این حالت نیز سیال با دمای ثابت وارد فاصله‌ی هوایی می‌شود و عدد نوسل روی دیوار داخلی محاسبه می‌شود. در شکل ۱۱ نمودار دمای بی‌بعد در فاصله‌ی هوایی در سرعت‌های دورانی مختلف و در یک عدد رینولدز محوری ثابت برای این شرایط مرزی نشان



شکل ۱۰. توزیع عدد نوسل در ناحیه‌ی توسعه‌یافته.



شکل ۷. توزیع دمای دیوار داخلی در سرعت‌های چرخشی مختلف.



شکل ۸. توزیع دمای دیوار داخلی در سه رینولدز محوری مختلف.

ثابت بودن مقدار شار حرارتی اعمالی بر دیوار خارجی، افزایش دما به صورت خطی خواهد بود. افزایش سرعت چرخشی باعث کاهش طول ناحیه‌ی در حال توسعه می‌شود و به شروع زودهنگام افزایش دما روی دیوار داخلی می‌انجامد. علت آن است که با افزایش سرعت چرخشی، اندازه حرکت شعاعی جریان در مقابل اندازه حرکت محوری تقویت شده و ضخامت لایه‌ی مرزی در راستای شعاعی به سرعت افزایش می‌یابد. همچنین چرخش دیوار داخلی با سرعت دورانی بالاتر باعث می‌شود که دمای سیال خروجی نیز افزایش یابد.

در شکل ۸ توزیع دمای دیوار داخلی در سه رینولدز محوری مختلف و در یک سرعت چرخشی ثابت مشاهده می‌شود. بر این اساس افزایش عدد رینولدز باعث افزایش طول توسعه یافته و کاهش دمای سیال در نقطه‌ی خروج می‌شود. در رینولدزهای محوری کم‌تر جریان زودتر به حالت توسعه یافته می‌رسد؛ زیرا کاهش رینولدز محوری باعث ضعیف‌تر شدن اندازه حرکت محوری در برابر اندازه حرکت شعاعی می‌شود و در نتیجه لایه‌ی مرزی در عرض فاصله‌ی هوایی زودتر رشد کرده و جریان زودتر به حالت توسعه یافته می‌رسد.

در شکل ۹ نمودار دما در فاصله‌ی هوایی در چهار عدد رینولدز محوری مختلف و سرعت دورانی ثابت نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش عدد رینولدز، به علت افزایش دبی سیال خنک‌کننده دمای دیوار استوانه‌ی داخلی و خارجی کاهش می‌یابد. عدد نوسل در این حالت مطابق رابطه‌ی ۱۹ روی دیوار

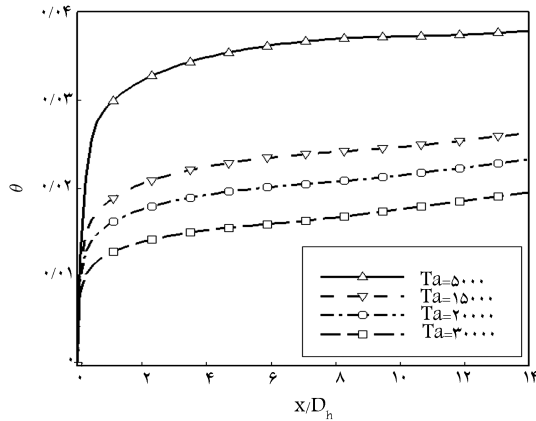
جدول ۴. مقایسه‌ی عدد نوسل حاصل از کد و رابطه‌ی تجربی ۵.

$Ta$	۲۷۵	۲۵۰	۲۰۰	۳۰۰
$Nu(eq5)$	۳,۸۰	۳,۵۲	۲,۹۵	۴,۰۷
$Nu$	۳,۳۸	۳,۲۴	۲,۹۲	۳,۵۵
درصد خطا	%۱۲	%۸	%۱	%۱۴

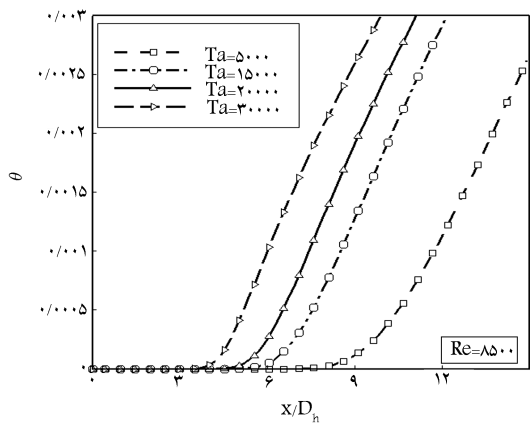
داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت دورانی از دمای سطوح استوانه‌های داخلی کاسته می‌شود در حالی که دمای سطوح استوانه‌های خارجی افزایش می‌یابد. در نتیجه نمودار دمای شعاعی به‌طور محسوسی یک‌نواخت‌تر می‌شود.

در شکل ۱۲ توزیع عدد نوسل روی دیوار داخلی در راستای محوری مشاهده می‌شود. مقدار عدد نوسل از مقدار بیشینه در ورودی استوانه‌ها به سمت مقدار ثابتی کاهش می‌یابد. با عبور از طول توسعه‌یافته، عدد نوسل به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند که با افزایش سرعت دورانی استوانه‌ی داخلی افزایش می‌یابد؛ این تغییر بیان‌گر این نکته است که در سرعت دورانی بالاتر مقدار ضریب انتقال حرارت از دیوار داخلی به سیال افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۳ توزیع دمای دیوار داخلی در یک عدد رینولدز ثابت و چهار سرعت چرخشی مختلف نمایش داده شده است. دیوار داخلی که تحت شار ثابت است در ورودی استوانه‌ها دارای افزایش دمای سهمی‌گون است، و سپس دما به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت چرخشی اختلاف دمای دیوار



شکل ۱۳. توزیع دمای دیوار داخلی در سرعت چرخشی مختلف.



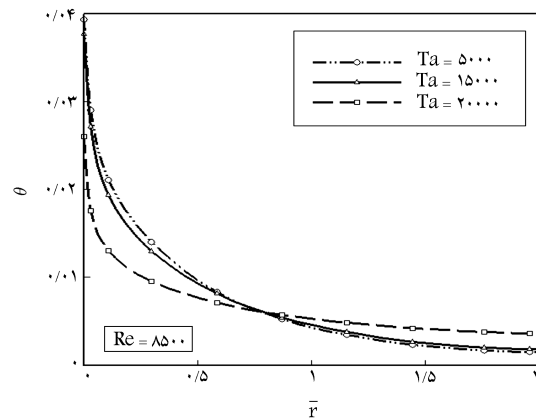
شکل ۱۴. توزیع دمای دیوار خارجی در سرعت چرخشی مختلف.

در هر مقطع با دمای ورودی کاهش می‌یابد. افزایش سرعت دورانی باعث کاهش طول توسعه‌یافته‌ی گرمایی می‌شود.

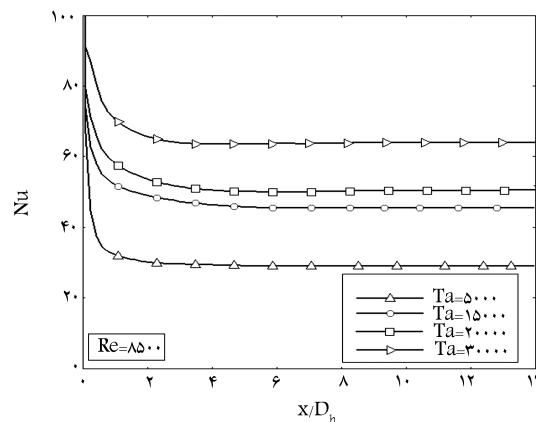
در شکل ۱۴ توزیع دمای دیواره‌ی خارجی که عایق است مشاهده می‌شود. افزایش دمای این دیوار، بعد از چهار تا هشت برابر قطر هیدرولیکی شروع می‌شود و قبل از آن دمای این دیوار برابر دمای سیال ورودی است. با افزایش سرعت چرخشی، دمای دیوار خارجی سریع‌تر افزایش می‌یابد و نیز، افزایش سرعت چرخشی باعث می‌شود که دمای دیوار خارجی بالاتر باشد.

### نتیجه‌گیری

در این نوشتار مسئله‌ی جریان بین دو استوانه‌ی دوار هم‌مرکز به‌صورت سه‌بعدی شبیه‌سازی عددی شده است. در شبیه‌سازی سه‌بعدی امکان اعمال شرایط مرزی گرمایی مختلف در راستای محوری و محیطی فراهم می‌شود. با بررسی میدان دما و سرعت در جریان بین استوانه‌های هم‌مرکز دوار، اثر چرخش دیوار داخلی این مجموعه بر مؤلفه‌های سرعت و دما از طریق نمودارها ارائه شده است. با بررسی اثر چرخش دیوار داخلی بر کمیت‌های متوسط جریان، مشاهده می‌شود که سرعت دورانی باعث افزایش این کمیت‌ها می‌شود. براساس نتایج حاصله، عدد نوسل به دو دلیل افزایش می‌یابد: افزایش سرعت ذرات سیال در مجاورت سطح و کاهش ضخامت لایه‌ی مرزی. در نتیجه افزایش عدد رینولدز جریان محوری و افزایش سرعت دورانی باعث افزایش ضریب انتقال حرارت می‌شود.



شکل ۱۱. نمودار دما در فاصله‌ی هوایی در سرعت‌های دورانی مختلف.



شکل ۱۲. تغییرات عدد نوسل روی دیوار داخلی در راستای محوری.

$U$ : سرعت محوری [ $\text{ms}^{-1}$ ]  
 $U_m$ : سرعت متوسط محوری [ $\text{ms}^{-1}$ ]  
 $V$ : سرعت مماسی [ $\text{ms}^{-1}$ ]  
 $V_{\theta w}$ : سرعت چرخش استوانه داخلی [ $\text{ms}^{-1}$ ]  
 $x$ : مختصات محوری

### علائم یونانی

$\Gamma$ : ضریب پخش در معادلات  
 $\varepsilon$ : نرخ اضمحلال انرژی [ $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ]  
 $\mu$ : گرانروی دینامیک [ $\text{kgms}^{-1}$ ]  
 $\theta$ : دمای بی بعد  
 $\nu$ : گرانروی سینماتیک [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]  
 $\rho$ : چگالی [ $\text{kg.m}^{-3}$ ]  
 $\varphi$ : متغیر جریان  
 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ : ضرایب نیمه تجربی در مدل آشفتگی  
 $\Omega$ : سرعت زاویه‌ی دیوار داخلی

### زیرنویس‌ها

$b$ : بالک  
 $eff$ : مؤثر  
 $h$ : هیدرولیک  
 $i$ : دیوار داخلی  
 $in$ : ورودی  
 $o$ : دیوار خارجی  
 $out$ : خروجی  
 $t$ : آشفتگی  
 $w$ : دیوار

### اعداد بدون بعد

$Nu$ : عدد نوسل  
 $Pr$ : عدد پراتل  
 $Re$ : عدد رینولدز  
 $Ta$ : عدد تیلور

در فاصله‌ی هوایی، ابتدا ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی کم است و سپس در جهت محوری افزایش می‌یابد تا هنگامی که لایه‌ی مرزی سطح استوانه‌ی داخلی و خارجی به هم رسیده و جریان به حالت توسعه‌یافته می‌رسد. در نتیجه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در ابتدا بیشینه‌است و در حالت توسعه‌یافته، یکنواخت می‌شود.

در رینولدزهای کم‌تر، جریان زودتر به حالت توسعه‌یافته می‌رسد زیرا کاهش عدد رینولدز سبب ضعیف‌تر شدن اندازه‌حرکت محوری در برابر اندازه‌حرکت شعاعی می‌شود. لایه‌ی مرزی در عرض فاصله‌ی هوایی زودتر رشد کرده و جریان زودتر به حالت توسعه‌یافته می‌رسد.

با افزایش سرعت دورانی اندازه‌حرکت شعاعی در برابر اندازه‌حرکت محوری افزایش می‌یابد و ضخامت لایه‌ی مرزی در فاصله‌ی هوایی سریع‌تر افزایش می‌یابد و جریان زودتر به حالت توسعه‌یافته می‌رسد. افزایش سرعت دورانی دیوار داخلی، باعث یکنواخت شدن توزیع دمای شعاعی می‌شود زیرا چرخش دیوار داخلی در سرعت دورانی بالاتر باعث اختلاط بیشتر جریان می‌شود.

### فهرست علائم

$A$ : سطح بین دو استوانه  
 $C_1, C_2, C_\mu$ : ثوابت نیمه‌تجربی در مدل آشفتگی  
 $c_p$ : ضریب گرمایی در فشار ثابت [ $\text{kJ/kgK}$ ]  
 $D_h$ : قطر هیدرولیکی  
 $h$ : ضریب انتقال حرارت [ $\text{Wm}^{-2} \text{K}^{-1}$ ]  
 $k$ : ضریب هدایت گرمایی [ $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]  
 انرژی جنبشی آشفتگی [ $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ]  
 $L$ : طول استوانه  
 $N$ : نسبت چرخش  
 $P$ : فشار [ $\text{Pa}$ ]  
 $r$ : شعاع استوانه  
 $S$ : عبارت چشمه  
 $t$ : زمان [ $\text{sec}$ ]  
 $T$ : دما [ $\text{K}$ ]  
 $u$ : سرعت [ $\text{ms}^{-1}$ ]

### پانویس

1. laser doppler velocimetry
2. large-eddy simulation
3. direct numerical simulation
4. finite volume
5. collocated
6. Rhie-Chow
7. SIMPIE C
8. QUICK
9. low diffusion problems

10. upwind
11. tri-diagonal matrix algorithm (TDMA)
12. under relaxation factor
13. steady flow

### منابع

1. Taylor, G.I. "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", *Philosophical Transactions*

- of the Royal Society of London, England, Series A, **223**, pp. 289-343 (1923).
2. Pai, S.I., *Turbulent Flow Between Rotating Cylinders*, NACA TN 892 (March 1943).
  3. Kuzay, T.M. and Scott, C.J. "Turbulent heat transfer studies in annulus with inner cylinder rotation", *Journal of Heat Transfer*, 99, PP.12-20 (1977).
  4. Tachibana, F. and Fukui, S. "Convective heat transfer of rotational and axial flow between concentric cylinders", *JSME*, **7**(26) (1964).
  5. Nouri, J.M. and Whitelaw, J.H. "Flow of newtonian and non-newtonian fluids in a concentric annulus with rotation of the inner cylinder", *Trans. ASME: J. Fluids Eng.*, **116**, pp. 821-827 (1994).
  6. Chung, S.Y. and Sung, H.J. "Large eddy simulation of turbulent flow in a concentric annulus with rotation of an inner cylinder", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **26**, pp. 191-203 (2005).
  7. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Washington, McGraw-Hill (1980).